Formulação Diferencial das Equações da Mecânica dos Fluidos

- Usada em situações onde os detalhes do escoamento são importantes (variação de grandezas ponto a ponto).

- Equações diferenciais que descrevem a conservação de massa e de quantidade de movimento.

- Formulação é utilizada no desenvolvimento e implementação de métodos numéricos tais como o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos.

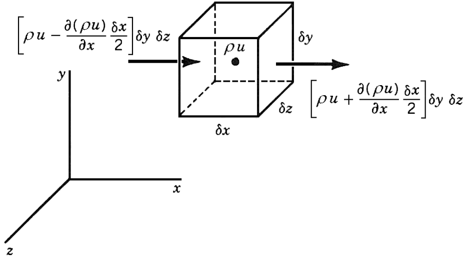
1 Conservação da massa

Sistema: $$\left.\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t}\right|_{\text{sist}} = 0$$

Formulação integral para $\cancel{V}C$: $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho \, \mathrm{d}\cancel{V} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

Vamos aplicar a um $\cancel{V}C$ diferencial.
A taxa de variação da massa no $\cancel{V}C$ é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho \, \mathrm{d}\cancel{V} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x \delta y \delta z$$



A vazão em massa nas superfícies do elemento perpendiculares ao eixo x são:

$$\rho u|_{x+(\delta x/2)} \delta y \delta z = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right] \delta y \delta z$$

$$\rho u|_{x-(\delta x/2)} \delta y \delta z = \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right] \delta y \delta z$$

Somando as duas, temos a vazão mássica líquida na direção x:

$$\dot{m}_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Analogamente, temos: $\dot{m}_y = \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z; \qquad \dot{m}_z = \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$

Portanto, a vazão mássica líquida no elemento é:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

Substituindo esses resultados na eq. da conservação de massa e dividindo por $\delta x \delta y \delta z$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Em notação vetorial: $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

Para regime permanente ($\partial \rho / \partial t = 0$): $\quad \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

Para escoamento incompressível (ρ constante): $\quad \nabla \cdot \vec{V} = 0$

1.1 Coordenadas cilíndricas

Eq. da continuidade: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Para regime permanente: $$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Para escoamento incompressível: $$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (v_z)}{\partial z} = 0$$

2 Conservação da quantidade de movimento

Sistema: $\vec{F} = \left.\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t}\right|_{\text{sist}}$; $\vec{P} = \int_{\text{sist}} \vec{V}\,\mathrm{d}m$

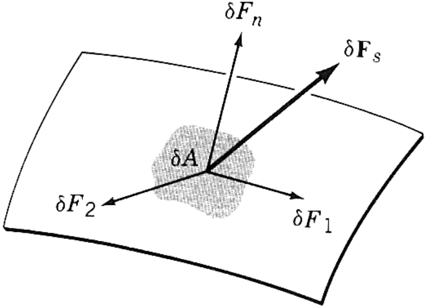
Aplicando a um sistema diferencial (massa δm):

$$\delta\vec{F} = \frac{\mathrm{D}(\vec{V}\delta m)}{\mathrm{D}t} = \delta m \frac{\mathrm{D}\vec{V}}{\mathrm{D}t} = \delta m \vec{a}$$

2.1 Descrição das forças

Força peso: $\delta\vec{F}_b = \delta m \vec{g} = \rho \delta x \delta y \delta z \vec{g}$

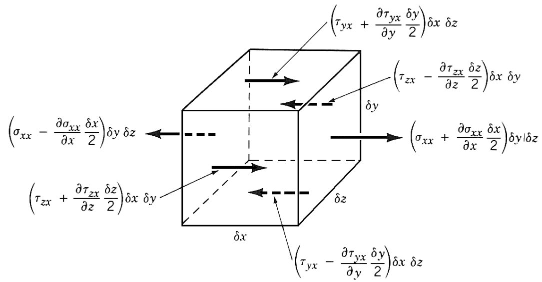
Forças superficiais: $\delta \vec{F}_s$, que pode ser decomposta nas componentes normal, δF_n, e paralelas ao plano δF_1 e δF_2, mutualmente ortogonais.



Definimos a tensão normal: $\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$

e as tensões de cisalhamento: $\tau_1 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A}; \qquad \tau_2 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_2}{\delta A}$

Exprimindo as forças superficiais em função dessas tensões:



$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z$$

Portanto:

$$\delta \vec{F}_s = \delta F_{sx}\vec{i} + \delta F_{sy}\vec{j} + \delta F_{sz}\vec{k}$$

2.2 Relações entre tensões e deformações

Para fluidos Newtonianos incompressíveis:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

A pressão p é definida como o negativo da média das três tensões normais: $-p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$.

Substituindo, por exemplo, na eq. na direção x, considerando μ constante:

$$\delta F_{sx} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]\delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left\{-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}\right]\right\}\delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]\delta x \delta y \delta z$$

Procedemos analogamente para as direções y e z, substituímos as expressões de aceleração e das forças nas equações do movimento, dividimos por $\delta x \delta y \delta z$ e obtemos as equações de Navier–Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

2.3 Coordenadas cilíndricas

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)-\frac{v_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) =$$

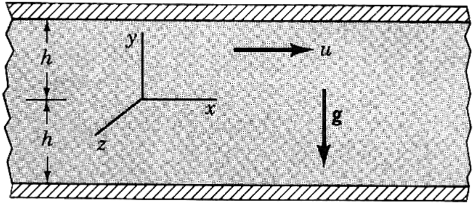
$$- \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) =$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z$$

3 Soluções simples para escoamentos incompressíveis e viscosos

3.1 Escoamento laminar em regime permanente entre placas paralelas horizontais



Assumimos $v = w = 0$ e $\partial u/\partial z = 0$ para placas infinitas. A eq. da continuidade fornece $\partial u/\partial x = 0$. Como se trata de regime permanente, $\partial u/\partial t = 0$. Assim, as equações de Navier–Stokes se tornam

$$
\begin{aligned}
x: \quad & 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
y: \quad & 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \\
z: \quad & 0 = -\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Concluímos que a pressão não é função de z e integrando a equação em y obtemos $p = -\rho g y + f(x)$, ou seja, a pressão varia hidrostaticamente na direção y.

Integrando a eq. em x: $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + C_1$$

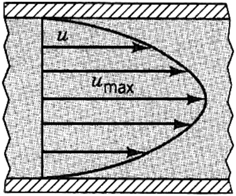
Integrando mais uma vez: $$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

Considerando que o canal tenha largura $2h$, as condições de contorno são $u = 0$ para $y = \pm h$. Assim:

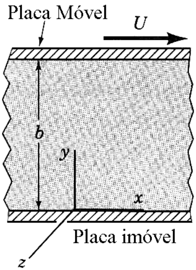
$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2 + C_1 h + C_2 \\ 0 &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2 - C_1 h + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} C_2 &= -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, o perfil é dado por

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - h^2) \quad \text{[perfil parabólico]}$$



3.2 Escoamento de Couette



Placa inferior fixa e superior se movendo com velocidade constante U. Como no caso anterior, assumimos $v = w = \partial u/\partial z = 0$, a eq. da continuidade fornece $\partial u/\partial x = 0$ e como se trata de regime permanente, $\partial u/\partial t = 0$. Chega-se portanto à mesma solução geral,

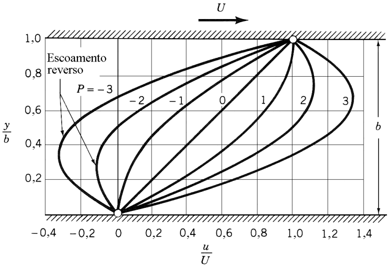
$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

porém com condições de contorno diferentes. Considerando um canal de largura b, as condições são $u = 0$ para $y = 0$ e $u = U$ para $y = b$. Aplicando-as à equação acima, determinamos C_1 e C_2 e chegamos à forma final

$$u = U\frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - by)$$

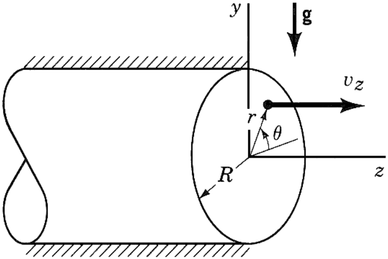
O perfil de velocidade é função do parâmetro adimensional $P = -\frac{b^2}{2\mu U}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$.

Quando $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $u = U\frac{y}{b}$.



3.3 Escoamento laminar em regime permanente em tubos

Considere um tubo de raio R. Admitimos escoamento paralelo à parede, $v_r = v_\theta = 0$, axissimétrico, $\partial v_z/\partial\theta = 0$ e permanente, $\partial v_z/\partial t = 0$. A equação da continuidade fornece $\partial v_z/\partial z = 0$; portanto $v_z = v_z(r)$. As equações de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas se reduzem a



$$r: \quad 0 = -\rho g \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta: \quad 0 = -\rho g \cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$z: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$$

Integrando a primeira equação, $p = -\rho g r \operatorname{sen}\theta + f_1(z) = -\rho g y + f_1(z)$. Ou seja, a pressão varia hidrostaticamente na seção transversal e $\partial p/\partial z$ não é função de r ou θ. Derivando a equação na direção z em relação a z e lembrando que $\partial v_z/\partial z = 0$, conclui-se que $\partial p/\partial z$ também não é função de z. Portanto $\partial p/\partial z$ é constante.

Integrando a eq. da direção z em relação a r: $$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + C_1$$

Integrando novamente: $$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

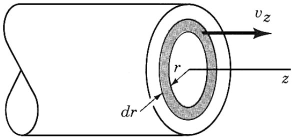
Condições de contorno:

- Velocidade finita no centro do tubo $(r = 0) \rightarrow C_1 = 0$
- $v_z = 0$ para $r = R \rightarrow C_2 = -\dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) R^2$

O perfil de velocidades é: $v_z = \dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2 - R^2)$ [perfil parabólico].

Como $\partial p/\partial z$ é constante, $\partial p/\partial z = -\Delta p/L$, onde Δp é a queda de pressão que ocorre ao longo de um comprimento L de tubo.

<u>Vazão</u>: $\mathrm{d}Q = v_z(2\pi r)\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad Q = 2\pi \int_0^R v_z r\,\mathrm{d}r$



$$Q = \frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\int_0^R (r^3 - rR^2)\,\mathrm{d}r =$$

$$-\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu L}$$

Velocidade média: $\bar{V} = \dfrac{Q}{A_t} = \dfrac{Q}{\pi R^2} = -\dfrac{R^2}{8\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) = \dfrac{D^2 \Delta p}{32\mu L}$

Velocidade máxima (centro do tubo, $r = 0$): $v_{\text{max}} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 2\bar{V}$

Tensão de cisalhamento: $\tau = \mu\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)r$ [perfil linear]