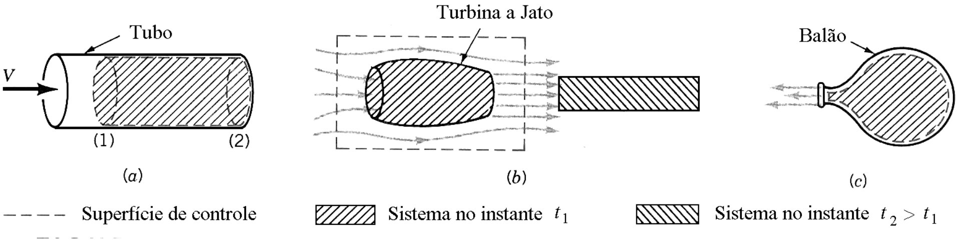
Formulação Integral das Equações da Mecânica dos Fluidos

1 Sistema e volume de controle

Sistema: certa quantidade de material com identidade fixa que pode se mover, escoar e interagir com o meio.

Volume de controle ($\forall C$): volume no espaço, delimitado por uma superfície de controle, através da qual o fluido pode escoar. Podem ser fixos ou móveis, indeformáveis ou deformáveis.*

*Semelhança entre sistema/descrição lagrangiana e $\forall C$/descrição euleriana.



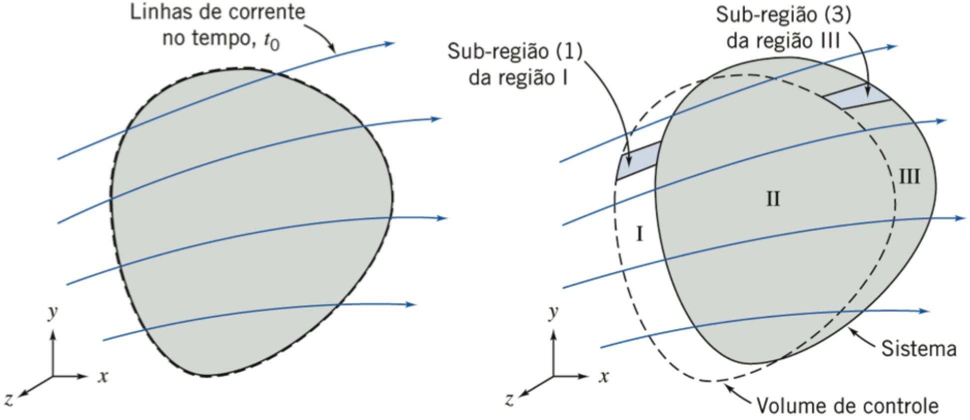
VC fixo e indeformável $\quad$ VC móvel e indeformável $\quad$ VC móvel e deformável

2 Teorema de transporte de Reynolds

Útil para a obtenção das leis de conservação formuladas para $\cancel{V}C$.

Seja B um parâmetro físico e b a quantidade deste parâmetro por unidade de massa: $B_{\text{sist}} = \displaystyle\int_{\text{sist}} b \, \mathrm{d}m = \int_{\text{sist}} \rho b \, \mathrm{d}\cancel{V}$

Queremos relacionar $\mathrm{d}B_{\text{sist}}/\mathrm{d}t$ com $\mathrm{d}B_{\forall C}/\mathrm{d}t$.



(a) Tempo, t_0 (b) Tempo, $t_0 + \Delta t$

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{B_{\text{sist}}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{sist}}(t_0)}{\Delta t}$$

No instante t_0: $B_{\text{sist}}(t_0) = B_{\forall C}(t_0)$

No instante $t_0 + \Delta t$: $B_{\text{sist}}(t_0 + \Delta t) = B_{\text{II}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) = B_{\forall C}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t)$

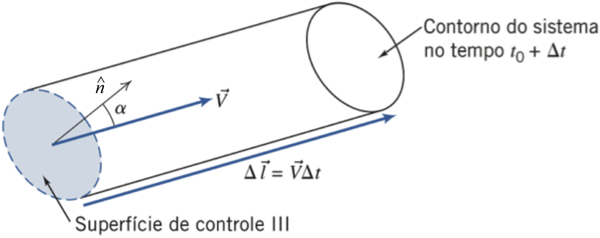
$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\forall C}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) - B_{\forall C}(t_0)}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\forall C}(t_0 + \Delta t) - B_{\forall C}(t_0)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} + \\ - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$$

Avaliando cada termo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\forall C}(t + \Delta t) - B_{\forall C}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial B_{\forall C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\forall C} \rho b \, \mathrm{d}\forall \right)$$

Expressão para B_{III}:



Massa sai do $\cancel{V}C$ durante Δt, portanto $0 < \alpha < \pi/2$.

$$\mathrm{d}B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) = (\rho_3 b_3)(\mathrm{d}\cancel{V}_3) = (\rho_3 b_3)(\Delta l \cos\alpha\, \mathrm{d}A)_3$$

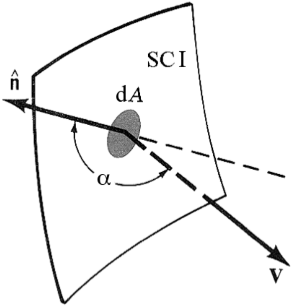
Para toda a região III:

$$B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) = \left[\int_{SC\ \text{III}} \rho b \Delta l \cos\alpha\, \mathrm{d}A\right]_{t_0 + \Delta t}$$

$$\text{Assim:}\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{III}}(t_0+\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\Delta l\cos\alpha\,\mathrm{d}A\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\int_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\,\mathrm{d}A=\int_{SC\ \mathrm{III}}\rho b|\vec{V}|\cos\alpha\,\mathrm{d}A=\int_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$$

Para a região I a análise é a mesma, só que $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \mathrm{d}\cancel{V} = \Delta l(-\cos\alpha)\,\mathrm{d}A$. Dessa forma:



$$\mathrm{d}B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\rho_1 b_1[\Delta l(-\cos\alpha)\,\mathrm{d}A]_1$$

$$B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\left[\int_{SC\ \mathrm{I}}-\rho b\Delta l\cos\alpha\,\mathrm{d}A\right]_{t_0+\Delta t}$$

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)}{\Delta t}=\int_{SC\ \mathrm{I}}\rho b\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$$

Portanto:

$$\frac{\mathrm{D}B_{sist}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho b \,\mathrm{d}\cancel{V} + \int_{SC\ \mathrm{I}} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \,\mathrm{d}A + \int_{SC\ \mathrm{III}} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \,\mathrm{d}A$$

Como $SC = SC\ \mathrm{I} + SC\ \mathrm{III} + SC_p$, sendo SC_p a parte da SC sem fluxo ($\vec{V} = 0$ ou $\cos\alpha = 0$), chegamos a

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}B_{\mathrm{sist}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho b \,\mathrm{d}\cancel{V} + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \,\mathrm{d}A}$$

que é o <u>Teorema de Transporte de Reynolds</u> (TTR).†

†Interpretação física, relação com a derivada material, regime permanente

É preciso ressaltar que no termo de fluxo a velocidade $\vec{V}$ é medida em relação à SC. Portanto, para $\cancel{V}C$s móveis ou deformáveis, o TTR é:

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho b \, \mathrm{d}\cancel{V} + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A$$

onde $\vec{V}_r$ é a velocidade relativa à SC.

Se os escoamentos nas seções de entrada e saída puderem ser considerados unidimensionais e com propriedades uniformes,

$$\int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \sum_{\text{saídas}} b_i \rho_i V_i A_i |\cos\alpha_i| - \sum_{\text{entradas}} b_j \rho_j V_j A_j |\cos\alpha_j| =$$

$$= \sum_{\text{saídas}} b_i \dot{m}_i - \sum_{\text{entradas}} b_j \dot{m}_j$$