4300259 – Termoestatística

Sexta Lista de Exercícios: Sólido de Einstein, Postulado de Equiprobabilidade e Equilíbrio.

Conceitos importantes:

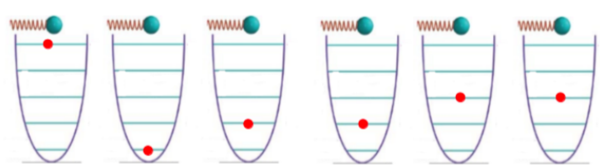
1) O modelo no sólido de Einstein, no qual os átomos que constituem os sólidos (metais) são representados por osciladores tridimensionais com energia quantizada.

2) Macroestados, microestados e o Postulado Fundamental da Física Estatística.

3) Equilíbrio Térmico. Você deve ser capaz de entendê-lo do ponto de vista estatístico (densidade de energia, energia térmica e microestados) e conectá-lo com a visão macroscópica da Termodinâmica (calor e temperatura).

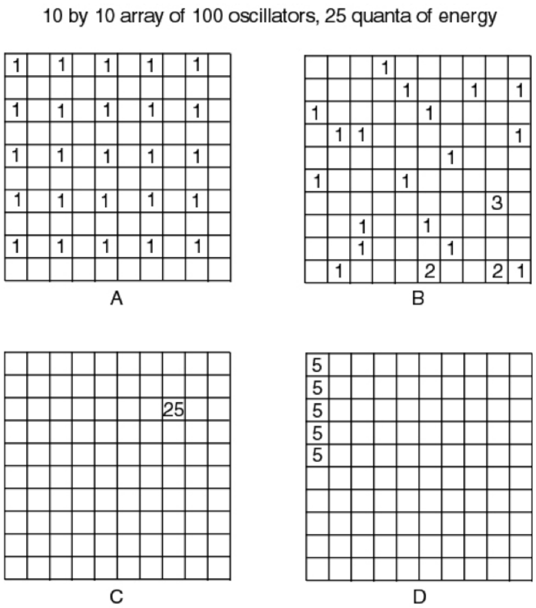
Q1) Considere um sistema constituído por 300 osciladores e 100 quanta de energia. De acordo com o modelo do Sólido de Einstein discutido na Disciplina, esse sistema representa:
(a) Um átomo oscilando em 300 direções.
(b) 300 átomos, todos no centésimo nível de energia ($n = 100$).
(c) 300 átomos com 100 joules de energia distribuídos entre si.
(d) 100 átomos com 300 joules de energia distribuídos entre si.
(e) 100 átomos com energia total de $100\hbar\omega_0$.
(f) Nenhuma das alternativas anteriores.

Q2) Considere o modelo de Einstein para um sistema de dois átomos. A figura abaixo corresponde a um estado desse sistema, onde os três osciladores à esquerda representam o átomo 1, e os três osciladores à direita representam o átomo 2. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F), com base na situação mostrada na figura.



( ) A energia interna do sistema é $U = 16\hbar\omega_0$.
( ) Os átomos têm energia iguais.
( ) A configuração do átomo 1 é menos provável que a configuração do átomo 2.
( ) O número de microestados do sistema é $\Omega = 15!/[5!\ 10!]$.

Q3) Considere um nanofio, formado por uma cadeia linear de átomos. Vamos admitir que só haja movimento vibracional em uma direção (isto é, na direção do nanofio). Nesse caso, não representaremos um átomo por três osciladores, como no sólido tridimensional, mas por apenas um oscilador. Havendo N_{at} átomos no fio, o número de microestados compatíveis com a energia interna $U = q\hbar\omega_0$ do nanofio será (justifique):
(a) $\Omega = (q + N_{\text{at}} - 1)!/[q!\,(N_{\text{at}} - 1)!]$
(b) $\Omega = (q + N_{\text{at}})!/[q!\,N_{\text{at}}!]$
(c) $\Omega = (q + 2N_{\text{at}})!/[q!\,(2N_{\text{at}})!]$
(d) $\Omega = (q + 2N_{\text{at}} - 1)!/[q!\,(2N_{\text{at}} - 1)!]$



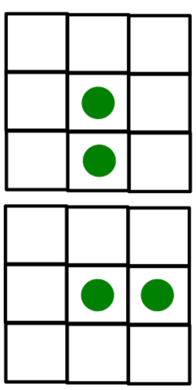
Q4) Considere um sistema isolado formado por 100 osciladores. Seus microestados podem ser representados por diagramas com 100 células, cada uma correspondendo a um oscilador, e por números indicando os quanta de energia em cada oscilador (uma célula em branco corresponde a zero quantum). A figura ao lado mostra quatro microestados, denominados A, B, C e D, todos compatíveis com a energia interna de 25 quanta para o sistema. Abaixo, justifique suas respostas.

(i) Qual dos microestados mostrados na figura é o *mais provável*?

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) São equiprováveis.

(ii) Considere agora todos os microestados compatíveis com a energia interna de 25 quanta. Ocorrem em *menor número* microestados com distribuições de energia semelhantes a:

(f) A (g) B (h) C (i) D (j) Mesmo número, pois são equiprováveis.



Q5) No modelo do gás de rede (figura ao lado) dividimos o volume do gás em N células. Distribuímos então q partículas entre as células, obedecendo à regra de que não pode haver mais de uma partícula por célula, de forma que o número de possibilidades de acomodar as partículas é dado por $\Omega = N!/[q!\,(N-q)!]$.

(i) Iremos definir que a energia interna do gás, na ausência de interação, é zero. Quantos microestados são compatíveis com o macroestado $U = 0$, considerando $N = 9$ e $q = 2$?

(a) $\Omega = 0$
(b) $\Omega = 1$
(c) $\Omega = 36$
(d) $\Omega = 45$

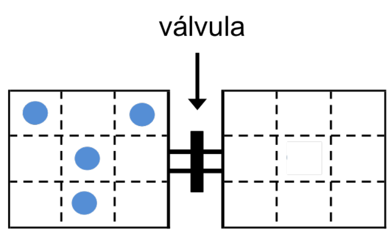
(ii) Vamos agora construir um modelo de gás de rede com interação, obedecendo à seguinte regra adicional: a energia de interação de um par de partículas é zero, a não ser que as partículas sejam vizinhas na horizontal ou na vertical (como nos exemplos mostrados na figura). Em qualquer outra situação, inclusive partículas vizinhas em diagonal, a energia de interação do par será zero. Sendo as partículas vizinhas na horizontal ou na vertical, a energia de interação do par é $-\epsilon$ (note que, sendo a interação atarativa, sua energia deverá ser menor que zero). Para o caso $q = 2$ e $N = 9$, admita que o macroestado do gás seja definido pela energia interna $U = -\epsilon$. Nessa condição, indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

(   ) A probabilidade de encontrar o sistema em qualquer configuração (microestado), interagente ou não interagente, é a mesma.
(   ) A probabilidade de encontrar o sistema em qualquer configuração interagente é a mesma.
(   ) A probabilidade de encontrar o sistema em uma configuração não interagente é nula.

Problemas:

P1) Suponha um sistema isolado composto por 300 osciladores (100 átomos), cuja energia interna corresponde a 100 quanta. Admita também dispor de um equipamento que permita observar a distribuição da energia entre os osciladores. (a) Qual a probabilidade de observar um microestado qualquer do sistema? (b) Qual a probabilidade de encontrar toda a energia do sistema concentrada em um único oscilador? (c) Suponha que seu equipamento permita realizar 10^6 observações por segundo. Estime o tempo médio para que a situação do item (b) seja observada experimentalmente. (d) Compare o resultado do item (c) à idade estimada do universo, ≈ 13 bilhões de anos.

P2) Retomemos o gás de rede sem interação (ver fórmula para contagem de microestados na **Q5**). A figura mostra dois compartimentos com $N = 9$ sítios cada, separados por uma válvula. Inicialmente as quatro partículas estão confinadas a um dos compartimentos. A válvula é então aberta, permitindo que o gás se expanda para o volume total das 18 células, até atingir o equilíbrio.



(a) Seja q_E o numero de partículas no compartimento à esquerda. Na situação final de equilíbrio, calcule o número de microestados compatíveis com os macroestados $q_E = 0, 1, 2, 3, 4$. Faça uma tabela com o número de microestados no compartimento à esquerda (Ω_E), à direita (Ω_D) e nos dois compartimentos (Ω) para cada macroestado q_E. Esboce então um histograma com as probabilidades $P(q_E)$ dos macroestados em função de q_E.

(b) Repita os procedimentos dos itens (a) e (b) para um gás com 18 células em cada compartimento ($N = 36$ no total) e $q = 8$ partículas. Discuta, qualitativamente, como seria o histograma caso tomássemos o limite em que q e N se tornam muito grandes (digamos, da ordem de 10^{24}), mantendo constante a densidade $q/N = 2/9$.

P3) Considere dois nanoblocos, A e B, feitos de diferentes materiais, tais que os quanta de energia em cada bloco sejam diferentes, $\hbar\omega_A = 2\hbar\omega_B$. Além disso, o bloco A tem 10 átomos ($N_A = 30$ osciladores), enquanto o bloco B tem apenas 5 átomos ($N_B = 15$ osciladores). Inicialmente, os blocos estão isolados do entorno e isolados entre si, com energias internas iguais, $U_A = 6\hbar\omega_A$ e $U_B = U_A$.
(a) Qual dos blocos (isolados) tem maior temperatura?
(b) Na condição do item (a), qual o número de quanta de energia no bloco B, q_B?
(c) Suponha agora que os blocos sejam postos em contato térmico (ainda isolados da vizinhança), até que entrem em equilíbrio. No macroestado em que as energias médias por átomo são iguais nos dois blocos, qual a energia interna de cada bloco, U'_A e U'_B? Expresse ambas as respostas em termos de $\hbar\omega_A$.

Respostas

Q1) (e)

Q1) F, V, F, V.

Q3) (a)

Q4) (e) e (h)

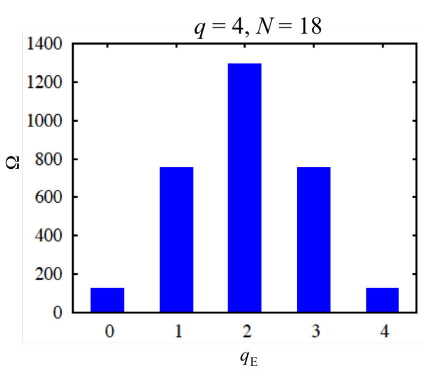
Q5) Em (i), a alternativa correta é (c). Em (ii), F, V, V.

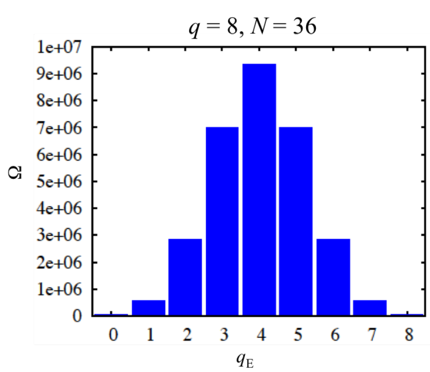
P1) (a) Sendo o número de microestados $\Omega = 1.681 \times 10^{96}$, a probabilidade de qualquer microestado será $P = 5.947 \times 10^{-97}$. (b) $P = 1.784 \times 10^{-94}$. (c) $\Delta t \sim 5.6 \times 10^{87}$ s. (d) Cerca de 1.4×10^{70} idades do universo.

P2) Para ambos os casos, $q = 4$ e $N = 18$, bem como $q = 8/N = 36$, as tabelas e histogramas (não deixe de construir o seu próprio histograma!) são:

q_E	q_D	Ω_E	Ω_D	Ω
0	4	1	126	126
1	3	9	84	756
2	2	36	36	1296
3	1	84	9	756
4	0	126	1	126

N_E	N_D	Ω_E	Ω_D	Ω
0	8	1	43758	43758
1	7	18	31824	572832
2	6	153	18564	2840292
3	5	816	8568	6991488
4	4	3060	3060	9363600
5	3	8568	816	6991488
6	2	18564	153	2840292
7	1	31824	18	572832
8	0	43758	1	43758





No limite termodinâmico (q e N muito grandes), $\frac{q_E}{N_E} = \frac{q_D}{N_D}$, com flutuações (largura do histograma) desprezíveis.

P3) (a) $\frac{U_A}{N_A} = \frac{1}{2}\frac{U_B}{N_B} \Rightarrow T_A < T_B$.
(b) $q_B = 12$.
(c) $U'_A = 8\hbar\omega_A$ e $U'_B = 4\hbar\omega_A$.