4300259 – Termoestatística

Segunda Lista de Exercícios: Funções de Distribuição de Probabilidade

Q1) Em uma fábrica, uma máquina enche embalagens de café com capacidade nominal de 1kg. O controle de qualidade é realizado retirando algumas das embalagens cheias ao longo do dia para pesagem. O resultado do controle realizado em $N = 100$ embalagens é mostrado na tabela abaixo. As massas foram organizadas em intervalos sucessivos (indicados por i), e o número de embalagens em cada intervalo é denotado por n_i.

i	massa (kg)	n_i
1	0.900 – 0.925	1
2	0.925 – 0.950	7
3	0.950 – 0.975	25
4	0.975 – 1.000	32
5	1.000 – 1.025	30
6	1.025 – 1.050	5

Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando todas as respostas.

( ) A frequência do evento "encontrar uma embalagem com massa no i-ésimo intervalo" é n_i/N.
( ) A probabilidade do evento "encontrar uma embalagem com massa no i-ésimo intervalo" é exatamente n_i/N.
( ) A probabilidade do evento "encontrar uma embalagem com massa no i-ésimo intervalo" é aproximadamente n_i/N.
( ) Seja m_α a massa da α-ésima embalagem avaliada no controle de qualidade. A massa média das 100 embalagens analisadas é $\frac{1}{100}\sum_{\alpha=1}^{100} m_\alpha$.
( ) A massa média das 100 embalagens analisadas pode ser aproximada por $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{6} n_i m_i$, onde m_i corresponde ao centro do i-ésimo intervalo ($m_1 = 0.912\,\text{kg}$, $m_2 = 0.9375\,\text{kg}$, etc.).

Ainda em relação aos resultados mostrados na tabela, considere a definição de uma função de distribuição $f(i)$ que permita estimar a probabilidade de encontrar uma embalagem com massa no i-ésimo intervalo, $\Delta P(i)$.

( ) Essa função de distribuição será adimensional.
( ) Essa função de distribuição terá unidades de kg^{-1}.
( ) Uma definição razoável seria $f(i) = \frac{n_i}{N}$, pois uma função de distribuição representa uma probabilidade.
( ) Uma definição razoável seria $f(i) = \frac{n_i}{N\Delta m}$, com $\Delta m = 0.025\,\text{kg}$, pois permite estimar a probabilidade de encontrar uma embalagem no i-ésimo intervalo na forma $\Delta P(i) = f(i)\Delta m$.

Problemas: Em alguns dos problemas abaixo, será interessante explorar resultados conhecidos das integrais Gaussianas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}\,\frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{(2n+1)/2}}\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

P1) Voltemos à situação proposta na **Q1**. Utilizando os dados da tabela, estime:
(a) A massa média das embalagens.
(b) A variância e o desvio padrão das massas das embalagens.
(c) A probabilidade de encontrar uma embalagem com massa no intervalo $0.925\,\text{kg} < m < 1.025\,\text{kg}$.
(d) A probabilidade de encontrar uma embalagem com massa $m > 1.00\,\text{kg}$.

P2) A variável contínua x representa os eventos possíveis em um experimento (detectar uma partícula na posição x). A seguinte função representa a densidade de probabilidade associada ao experimento,

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), \ a \leq x \leq b \\ 0, \ x < a \text{ ou } x > b \end{cases} .$$

Esboce $f(x)$ em um gráfico e responda: (a) Mostre que $f(x)$ está normalizada de acordo com a convenção $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
(b) Calcule a probabilidade de detectar uma partícula nas regiões $x < a$ e $x < (b+a)/2$.
(c) Obtenha o valor médio $< x >$ da distribuição de eventos.
(d) Obtenha a variância σ^2 da distribuição. (Dica: a relação $(b^3 - a^3) = (b-a)[(b+a)^2 - ab]$ pode ser útil.)

P3) É usual expressar a função de distribuição Gaussiana na forma (σ e μ são constantes):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

(a) Mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
(b) Calcule o valor médio $\langle x \rangle$ da distribuição.
(c) Obtenha $\langle x^2 \rangle$.
(d) Calcule o desvio padrão da distribuição.

P4) A distribuição das velocidades escalares (módulos das velocidades) das moléculas em um gás ideal é descrita pela densidade de probabilidade

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 \, e^{-\alpha v^2} ,$$

onde $\alpha = m/(2k_B T)$ é uma constante (a uma dada temperatura T), m é a massa das moléculas do gás, k_B é a constante de Boltzmann, e $0 \leq v < \infty$.
(a) Mostre que a distribuição é normalizada a 1 (atenção ao intervalo de integração!).
(b) Obtenha a média das velocidades escalares, $\langle v \rangle$.
(c) Obtenha a raiz quadrada da média das velocidades ao quadrado, $\langle v^2 \rangle^{1/2}$.
(d) Obtenha a velocidade em torno da qual a probabilidade $f(v)dv$ é máxima.

Respostas:
Q1) Primeiro bloco:
(V)
(F)
(V)
(V)
(V)
Segundo bloco:

(F)
(V)
(F)
(V)

P1) (a) $\langle m\rangle \approx 0.987\,\text{kg}$.
(b) $\langle m^2\rangle \approx 0.975\,\text{kg}$. Portanto: $\sigma^2 \approx 0.0008\,\text{kg}$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx \sqrt{0.0008} = 0.028\,\text{kg}$.
(c) $P \approx 0.94$
(d)$P \approx 0.35$

P2) (b) $P(x < a) = 0$, enquanto $P(x < (b+a)/2) = \frac{1}{2}$
(c) $\langle x\rangle = \frac{(b+a)}{2}$.
(d) $\langle x^2\rangle = \frac{1}{3}[(b+a)^2 - ab]$. Portanto, $\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

P3) (a) Realizando a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ com a mudança de variável $u = (x-\mu)$, é imediato verificar que o resultado é 1.
(b) $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,dx$. Utilizando a mesma mudança de variável, obtemos $\langle x\rangle = \mu$.
(c) $\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x^2\,dx$. Utilizando a mesma mudança de variável, $\langle x^2\rangle = \sigma^2 + \mu^2$.
(d) Sendo o desvio padrão $\delta = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, é imediato obter $\delta = \sigma$.

P4) (a) A soma de todas as probabilidades $f(v)dv$ será: $\int_0^\infty f(v)dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2\,e^{-\alpha v^2}dv$. Sendo o integrando uma função par: $\int_0^\infty f(v)dv = 2\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^\infty v^2\,e^{-\alpha v^2}dv = 1$.
(b) $\langle v\rangle = \int_0^\infty f(v)\,v\,dv = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3\,e^{-\alpha v^2}dv = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$.
(c) $\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\,e^{-\alpha v^2}dv = \frac{3}{2}\alpha^{-1}$. Portanto, $\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$.
(d) O máximo de $f(v)dv$ corresponderá ao máximo de $f(v)$. Impondo a condição $\frac{df}{dv} = 0$, obtemos a velocidade (v_{mp}) em torno da qual a probabilidade é máxima: $v_{\text{mp}} = \frac{1}{\alpha^{1/2}} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.