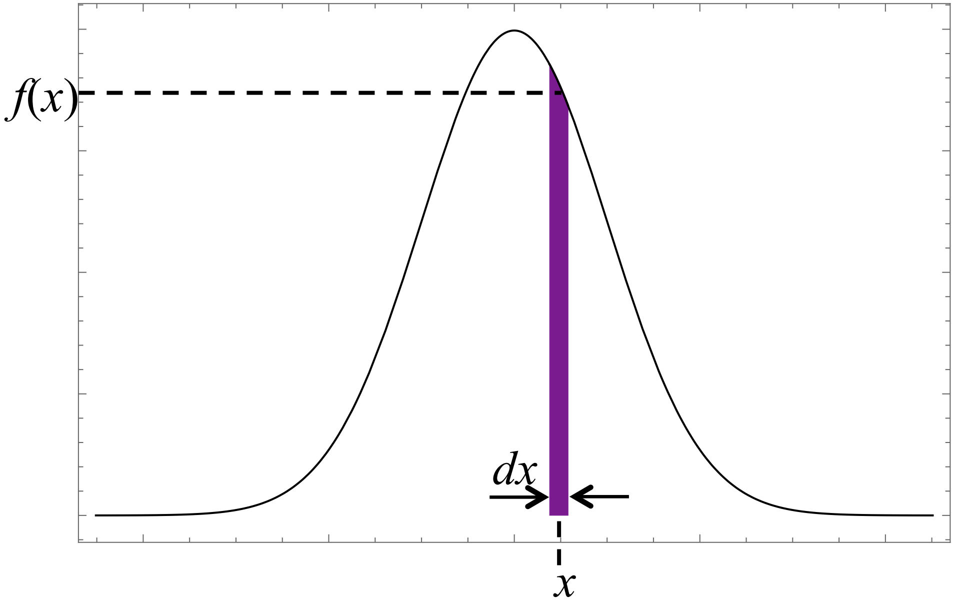
# 4300259 – Termoestatística

## Funções de Distribuição de Probabilidade – III




– Função de Distribuição (Densidade) de Probabilidade:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{dP(x)}{dx}$$

– Probabilidade de um evento no intervalo *dx* em torno de *x*:

$$dP(x) = f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$ (normalização usual)

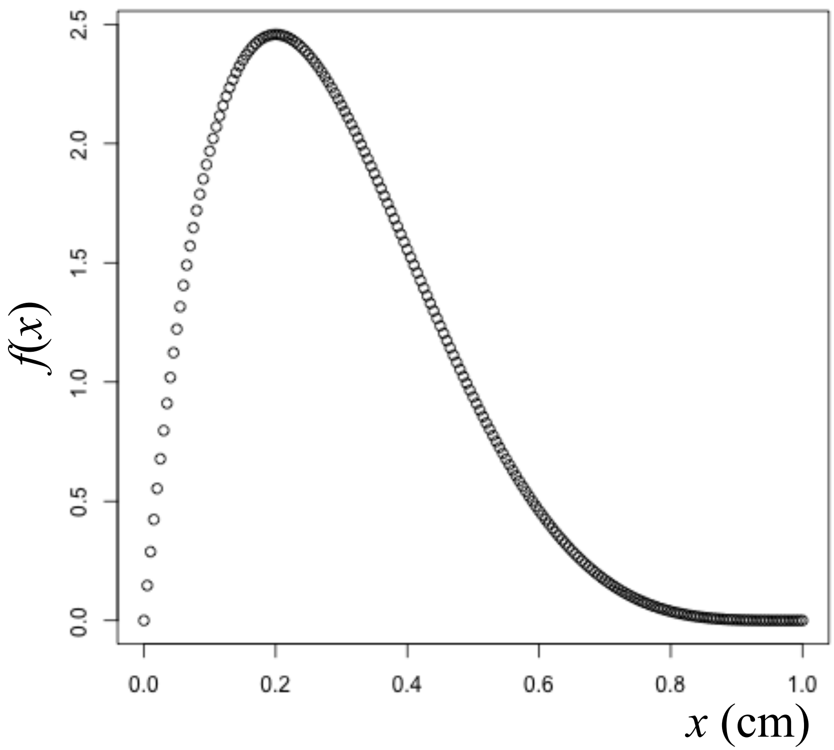
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,dx$$ (valor médio de *x*)

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x^2\,dx$$ (valor médio de $x^2$)

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$ (variância)

**1)**: A tabela abaixo mostra o resultado obtido para a detecção de 10 partículas em um experimento. Obtenha $<x>^2$, $<x^2>$ e $\sigma^2$.

| $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$(mm) | 1.0 | 2.5 | –3.0 | –0.5 | 0.3 | –1.2 | 0.8 | 1.8 | –1.7 | –0.9 |




**2)**: O gráfico mostra a função de distribuição de probabilidade relacionada à detecção de partículas ao longo da direção $x$. Seja $x_m$ o ponto em torno do qual a probabilidade de detecção é máxima, e $<x>$ a posição média das partículas detectadas. É verdade que

(a) $x_m < <x>$
(b) $x_m = <x>$
(c) $x_m > <x>$

| $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$(mm) | 1.0 | 2.5 | –3.0 | –0.5 | 0.3 | –1.2 | 0.8 | 1.8 | –1.7 | –0.9 |

**1)** $<x>$ e $<x>^2$:

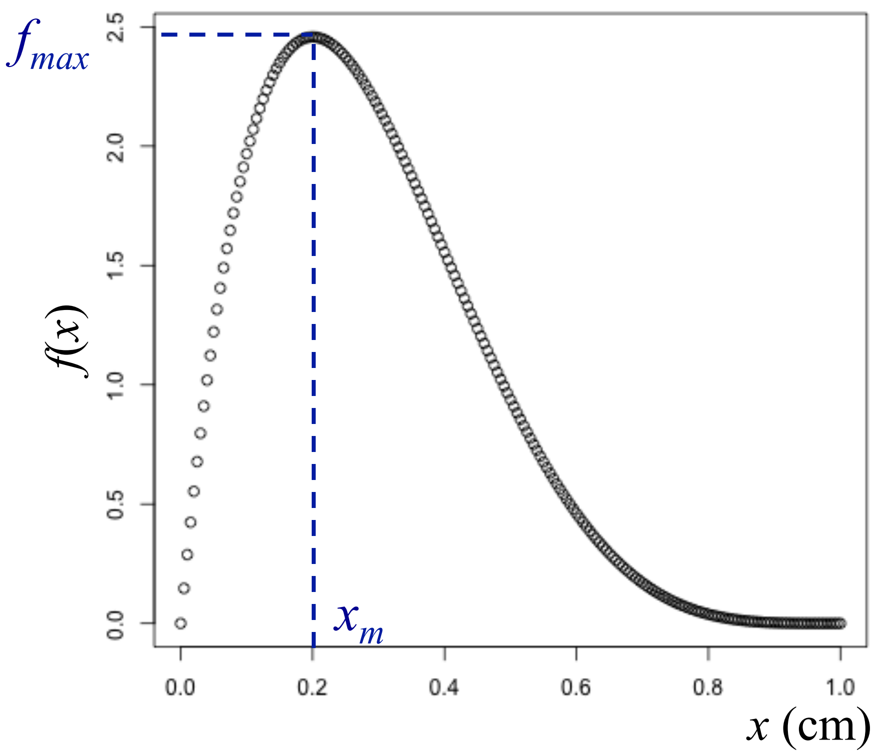
$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha = \frac{1}{10}\sum_{\alpha=1}^{10} x_\alpha = -0.09$$

$$\langle x \rangle^2 = (-0.09)^2 = 0.0081$$

$<x^2>$: $$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha^2 = \frac{1}{10}\sum_{\alpha=1}^{10} x_\alpha^2 = 2.561$$

$\sigma^2$: $$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \langle x \rangle)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2.553$$

**2)** O ponto $x_m$ (posição em torno da qual a probabilidade $f(x)dx$ é máxima) pode ser obtido na leitura do gráfico, $x_m \approx 0.2$ cm. Perceba que a curva $f(x)$ é assimétrica em torno de $x = x_m$, isto é, a área sob a curva à esquerda de $x_m$ é claramente menor que a área à direita desse ponto. Isso significa que no cálculo da média, $<x> = \int f(x)xdx$, haverá maior peso da região $x > x_m$ que da região $x < x_m$. Portanto, $x_m < <x>$ .




Caso o argumento acima não seja claro para você, aproxime a curva por uma sucessão de histogramas com largura $\Delta x \approx 0.1$ cm (ou menor), centrados nos pontos $x_i = i\,\Delta x$, com $i = 0,1,2,...$

Estime então o valor médio,

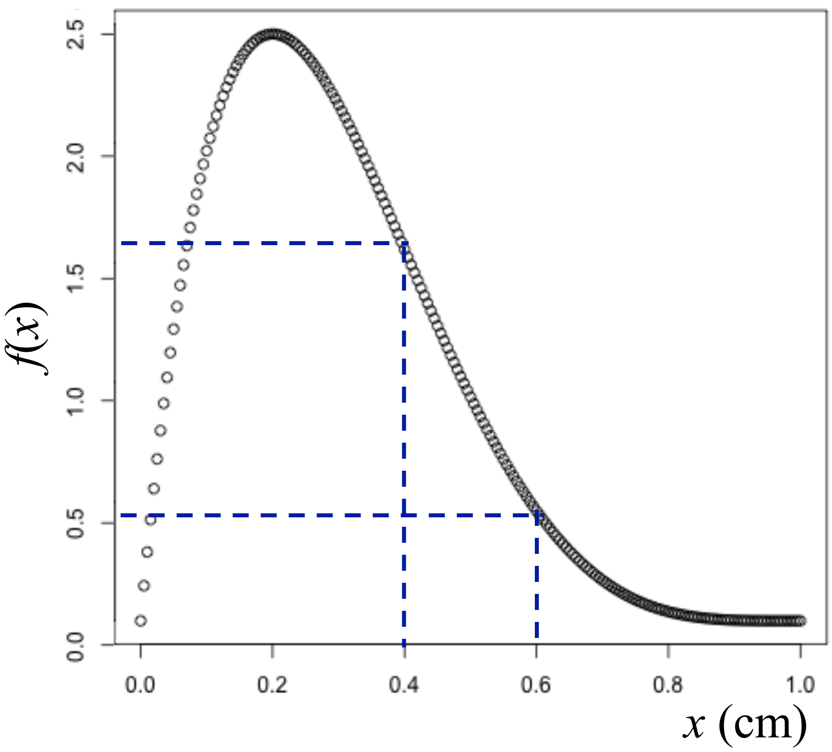
$$\langle x \rangle \approx \sum_i f(x_i)\, x_i\, \Delta x$$

atentando para as contribuições à esquerda e à direita de $x_m$.

**3)** Ainda em relação à função de distribuição mostrada no gráfico:

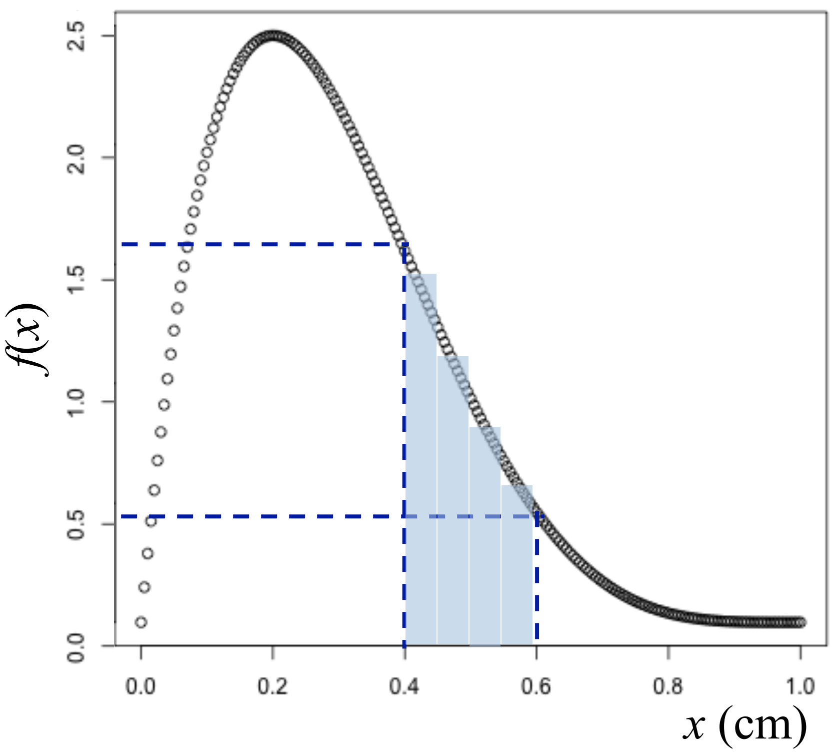
(a) Estime a probabilidade de detectar uma partícula entre 0.4cm e 0.6cm.

(b) Indique essa probabilidade no gráfico.



**3)** Deveremos computar as probabilidades infinitesimais *dP* em todos os intervalos *dx* contidos entre $x_i$= 0.4cm e $x_f$ = 0.6cm, isto é,

$$P(x_i < x < x_f) = \int_{x_i}^{x_f} dP = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx$$




(a) Essa integral corresponde à área sob a curva (preenchida, aproximadamente, pelos histogramas). Para estimar essa área, podemos somar as áreas dos histogramas, ou aproveitar a forma quase linear de $f(x)$ no intervalo de interesse e aproxima-la pela área de um trapézio:

$$P \approx \frac{1}{2}[f(0.4) + f(0.6)](0.6 - 0.4) \approx$$

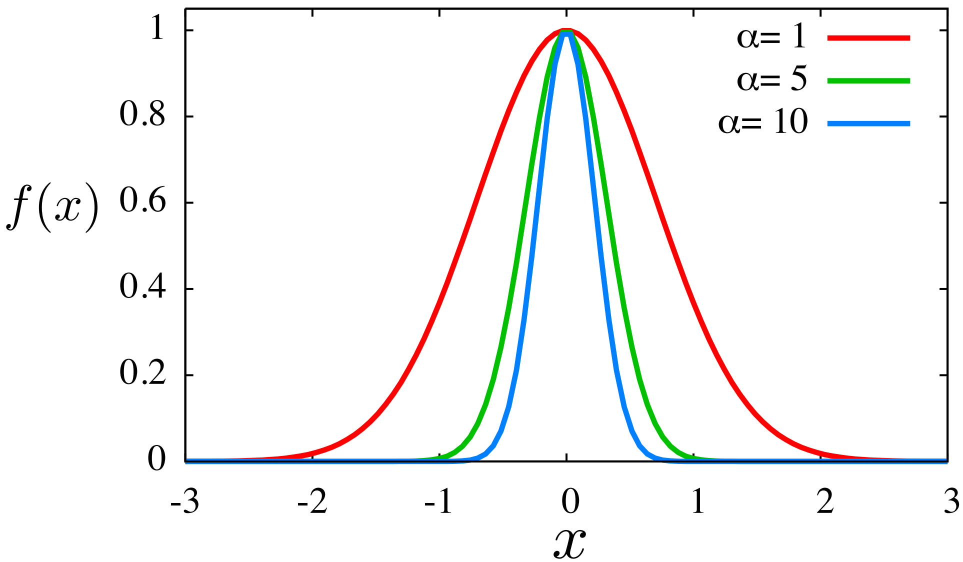
$$\approx \frac{1}{2}[1.65 + 0.55] \times 0.2 = 0.22 \ (22\%)$$

(b) No gráfico, a probabilidade é indica pela área sob a curva (de maneira aproximada utilizando os histogramas).

**Integrais Gaussianas:** Um dos exemplos mais importantes entre as funções de distribuição é a Distribuição Normal (também chamada Gaussiana):

$$f(x) = Ce^{-\alpha x^2}$$

onde $\alpha$ e $N$ são constantes. O gráfico abaixo mostra distribuições para $C = 1$ e $\alpha = 1, 5, 10$ (**não** normalizadas segundo a convenção usual).




– $C$ controla a "altura" da curva.

– $\alpha$ controla a "largura" da curva (variância).

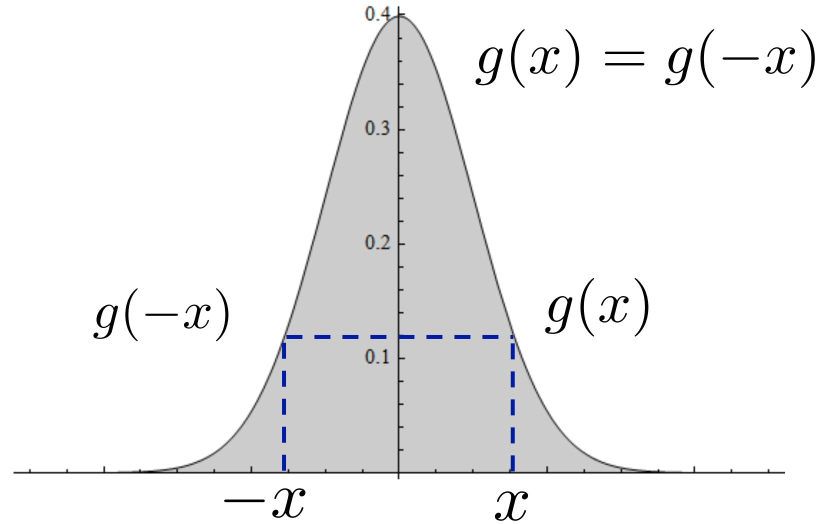
Será interessante demonstrar e explorar integrais da função Gaussiana.

**1)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}$$

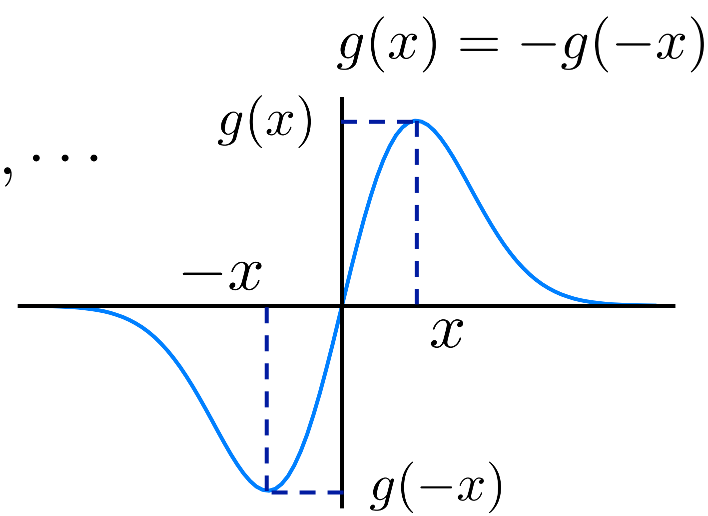
**2)** Sendo $g(x) = \exp(-\alpha x^2)$ uma função par, teremos:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}$$




**3)** Sendo $g(x) = x^{2n+1} \exp(-\alpha x^2)$ uma função ímpar, onde $n$ = 0,1,2,..., teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$



**4)** Para $g(x) = x^{2n}\exp(-\alpha x^2)$, onde $n = 0,1,2,...,$ teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{(2n+1)/2}} \,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

**5)** Sendo $g(x) = x^{2n}\exp(-\alpha x^2)$ uma função par, onde $n = 0,1,2,...,$ teremos:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx$$

**6)** Para $g(x) = x^{2n+1}\exp(-\alpha x^2)$, onde $n = 0,1,2,...,$ teremos:

$$\int_0^{\infty} x \, e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$