



**ESCOLA POLITÉCNICA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**PEF2308 Fundamentos de Mecânica das Estruturas  
Prof. Osvaldo Nakao**

**Texto de apoio às aulas presenciais  
compilação de exercícios resolvidos**

**Elaborado pelos acadêmicos**  
Rodrigo Suzuki Okada  
João Paulo P. L. Sâmara

**- Junho 2006 -**

## *Índice*

<b>1. Definições</b>	<b>03</b>
<b>2. Apoios no plano</b>	<b>03</b>
2.1. Engastamento	03
2.2. Articulação Fixa	03
2.3. Articulação Móvel	03
<b>3. Exercícios Resolvidos</b>	<b>04</b>
3.1. Viga em balanço	04
3.2. Viga Simplesmente Apoiada	06
3.3. Vigas inclinadas	08
3.4. Vigas poligonais	10
3.5. Estruturas Espaciais	14
<b>4. Formulário</b>	<b>17</b>

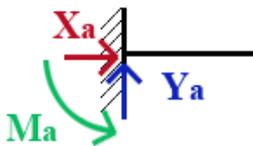
---

## 1. Definições

- **Apoios:** pontos de sustentação de qualquer estrutura.
- **Força Normal (N):** força que atua perpendicularmente à seção transversal, ou seja, na direção do eixo da peça. Pode-se expressar em  $kN$ .
- **Força Cortante (V):** força que atua no plano da seção transversal, ou seja, perpendicularmente ao eixo da peça. Pode-se expressar em  $kN$ .
- **Momento Fletor ou de Flexão (M):** momento que atua em torno dos eixos contidos no plano da seção transversal. Pode-se expressar em  $kN.m$ .
- **Momento Torçor ou de Torção (T):** momento que atua em torno do eixo perpendicular à seção transversal. Pode-se expressar em  $kN.m$ .
- **Esforços Solicitantes:** força normal, força cortante, momento fletor e momento de torção.
- **Carregamentos:** força aplicada em um único ponto, força aplicada em um comprimento (força distribuída por unidade de comprimento), força aplicada em uma superfície (força distribuída por unidade de área). Pode-se expressar em  $kN$ , em  $kN/m$ , ou em  $kN/m^2$ .

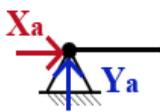
## 2. Apoios no plano

### 2.1. Engastamento



O engastamento impede qualquer movimento (translações ou rotações) pelo aparecimento de reações. A figura ilustra o engastamento de uma barra num plano. Nesse caso,  $X_a$  impede a translação horizontal,  $Y_a$  impede a translação vertical e  $M_a$  impede o giro em torno do ponto de engastamento. Por exemplo, um poste de iluminação está engastado ao solo.

### 2.2. Articulação Fixa



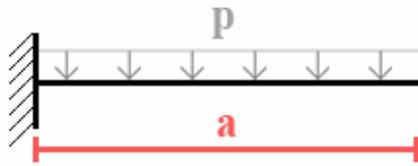
Apoio em que não se permite nenhum tipo de translação para a estrutura. Na figura, as reações  $X_a$  e  $Y_a$  impedem a translação horizontal e vertical, respectivamente. A articulação fixa permite o giro em torno do eixo ortogonal ao plano de  $X_a$  e  $Y_a$ . O apoio de uma cadeira sobre um piso rústico pode ser considerado uma articulação fixa.

### 2.3. Articulação Móvel



Apoio em que se impede apenas a translação perpendicular ao plano de apoio. Na figura, a reação  $Y_b$  impede apenas a translação vertical.

### 3. Exercícios Resolvidos

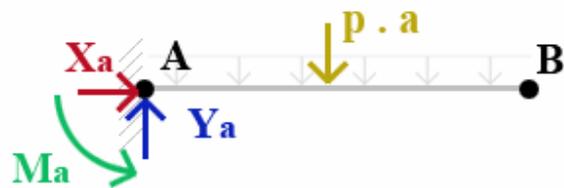


**1. Viga em balanço.** Determinar as reações no apoio e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes na viga em balanço. A força distribuída por comprimento ( $p$ ) está aplicada em todo o comprimento ( $a$ ) da viga em balanço.

#### 1.1. Determinar as reações no engastamento

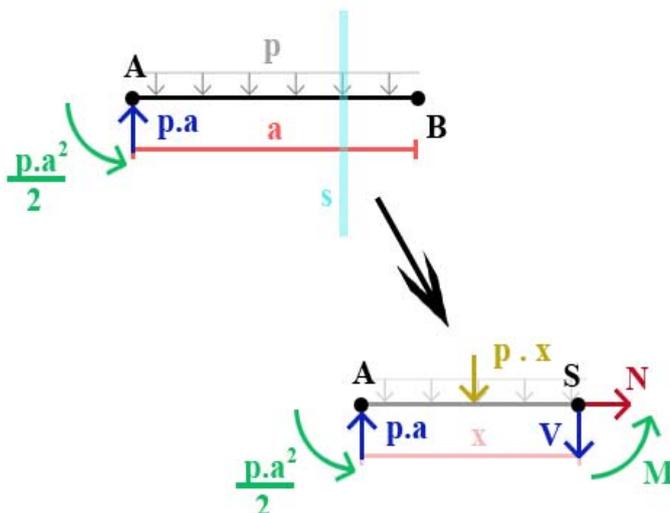
A força  $p$  distribuída pelo comprimento  $a$  é mecanicamente equivalente a  $p \cdot a$  aplicada a uma distância  $a/2$  do ponto A.

Se para a estrutura estar em equilíbrio a resultante das forças aplicadas deve ser nula e o momento em torno de qualquer ponto deve ser nulo, então pode-se impor o equilíbrio na barra:



- $\Sigma X = 0 = X_a \rightarrow X_a = 0$
- $\Sigma Y = 0 = Y_a - p \cdot a \rightarrow Y_a = p \cdot a$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = M_a - p \cdot a \cdot a/2 \rightarrow M_a = p \cdot a^2/2$

#### 1.2. Diagrama do corpo livre, e aplicação do teorema do corte.



Para conhecer como os esforços se distribuem ao longo da barra basta obtermos o diagrama dos esforços solicitantes. Para isso, corta-se a barra em uma seção genérica S a uma distância  $x$  de A, e determinam-se os esforços solicitantes que atuam nessa seção: a força normal ( $N$ ), a força cortante ( $V$ ) e o momento fletor ( $M$ ).

- $\Sigma X = 0 = N \rightarrow N = 0$

- $\Sigma Y = 0 = p.a - p.x - V \rightarrow V = p.(a - x)$
- $\Sigma M_{(S)} = 0 = p.a^2/2 - p.a.x + p.x.x/2 + M \rightarrow M = p.(-x^2/2 + a.x - a^2/2)$

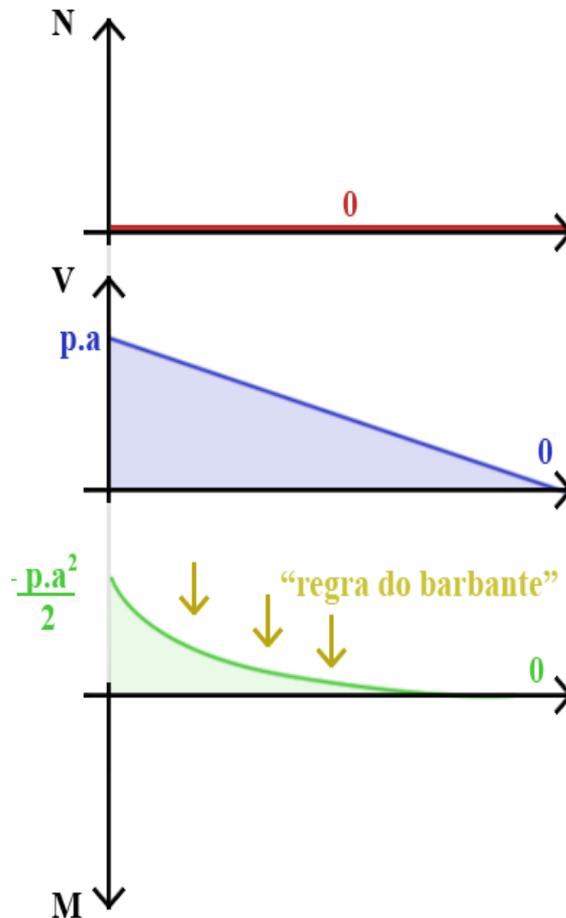
Com isso, obtêm-se os esforços solicitantes em qualquer ponto da barra. As expressões, em função de  $x$ , também permitem esboçar os diagramas desses esforços solicitantes.

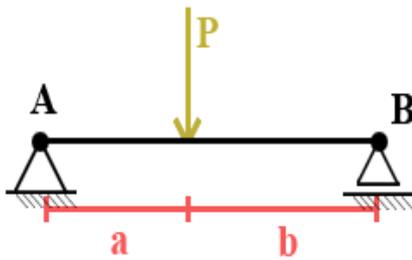
### 1.3. Diagramas dos esforços solicitantes

Para esboçar os diagramas pedidos, deve-se obter os valores de determinados pontos. Em particular, no início e no fim da barra.

- $N(x) = 0$
- $V(x) = p.(a - x)$ 
  - $V(0) = p.a$
  - $V(a) = 0$
- $M(x) = p.(-x^2/2 + a.x - a^2/2)$ 
  - $M(0) = - p.a^2/2$
  - $M(a/2) = - p.a^2/8$
  - $M(a) = 0$

Com isso, desenham-se os diagramas, lembrando que no gráfico de momento o eixo positivo é invertido.





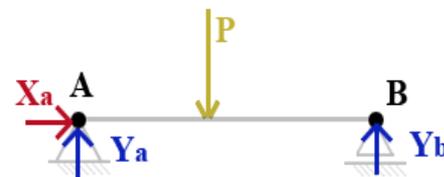
**2. Viga Simplesmente Apoiada:** Calcular as reações de apoio, e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes.

### 2.1. Calcular as reações nos apoios

A única força ativa é P. Nas articulações, como não há momento fletor aplicado, já se sabe que o momento fletor é zero, pois o giro é permitido. E, aplicam-se as condições de equilíbrio, ou seja, a resultante (somatória) das forças deve ser zero e a somatória dos momentos em torno de qualquer ponto deve ser zero.

Admitindo que  $L = a + b$ , temos que:

- $\Sigma X = 0 = X_a \rightarrow X_a = 0$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = P \cdot a + Y_b \cdot (a+b) \rightarrow Y_b = P \cdot a/L$
- $\Sigma M_{(B)} = 0 = -Y_a \cdot L + P \cdot b \rightarrow Y_a = P \cdot b/L$

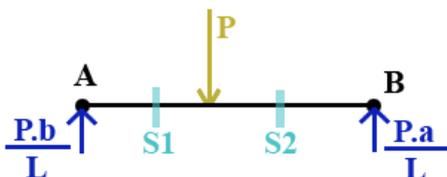


Há sempre, no plano, três equações independentes formando o sistema possível determinado com as três incógnitas do problema. Há outras equações (como por exemplo a somatória no Y), que podem ser utilizadas para verificação:

- $\Sigma Y = Y_a - P + Y_b = P(b + a - L)/L = 0 \rightarrow \text{OK}$

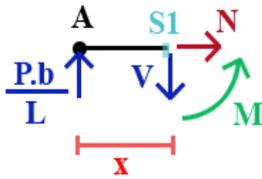
**Nota:** A verificação leva sempre a uma condição necessária, mas que não é suficiente.

### 2.2. Diagrama do corpo livre, e aplicação do teorema do corte



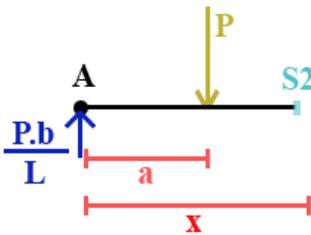
Neste problema, há necessidade de se efetuar fazer dois cortes, um antes da força P e um depois, obtendo-se as seções S1 e S2.

## 2.2.1. Seção S1



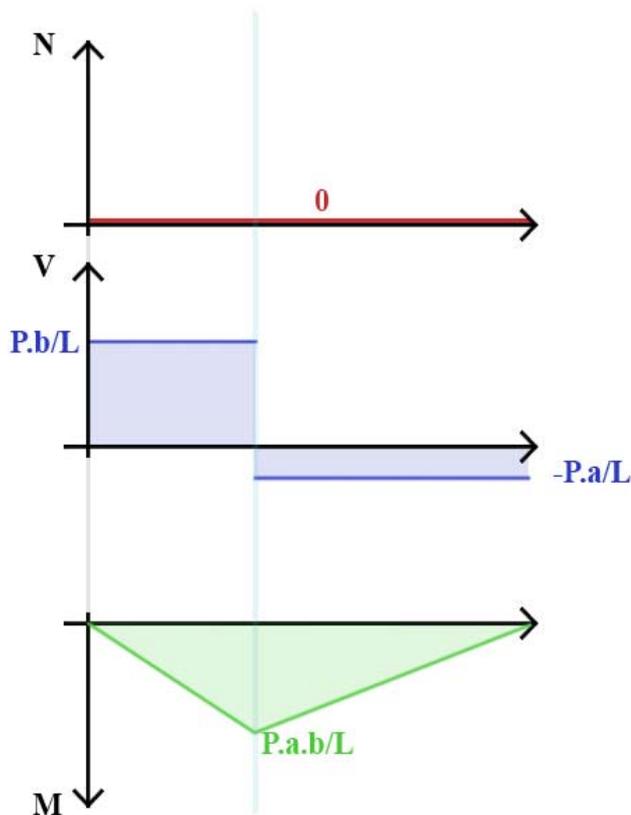
- $\Sigma X = 0 = N \rightarrow N = 0$
- $\Sigma Y = 0 = P.b/L - V \rightarrow V = P.b/L$
- $\Sigma M_{(S1)} = 0 = -P.b.x/L + M \rightarrow M = P.b.x/L$

## 2.2.2. Seção S2



- $\Sigma X = 0 = N \rightarrow N = 0$
- $\Sigma Y = 0 = P.b/L - P - V \rightarrow V = P.(b - L)/L = -P.a/L$
- $\Sigma M_{(S2)} = 0 = -P.b.x/L + P.(x - a) + M \rightarrow M = P.a.(-x/L + 1)$

## 2.3. Diagramas de esforços solicitantes



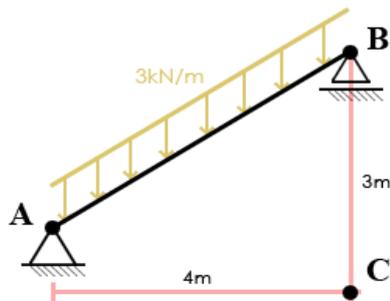
Vale notar que, neste caso, em cada uma das duas seções, há um conjunto de equações.

A força cortante é positiva na seção à esquerda da força  $P$ , pois, nesta seção, a força cortante tende a girar a peça restante no sentido horário. O valor em  $A$  pode ser obtido simplesmente observando que a reação em  $A$  é a própria força cortante.

A força cortante é negativa na seção à direita da força  $P$ , pois, nesta seção, a força cortante tende a girar a peça restante no sentido anti-horário. O valor em  $B$  pode ser obtido simplesmente observando que a reação em  $B$  é a própria força cortante.

O diagrama do momento fletor pode ser traçado com os valores

obtidos nas equações. Os valores em A e em B são zero, pois pelo diagrama do corpo livre não há momento em A e em B. Aplicando-se o teorema do corte junto ao ponto de aplicação da força P e reduzindo os esforços ativos em A ou em B obtêm-se os momentos fletores.



**3. Vigas Inclinadas:** Determinar as reações nos apoios e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes.

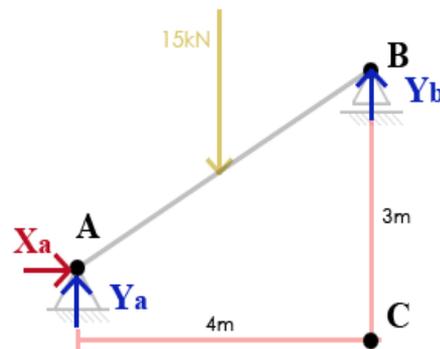
### 3.1. Calcular as reações nos apoios

Antes de qualquer coisa, notar que, devido à inclinação da viga, a força resultante do carregamento de 3kN/m não está sobre 4m, mas sim, sobre o valor do comprimento da viga, que pode ser obtido por Pitágoras. Resulta em

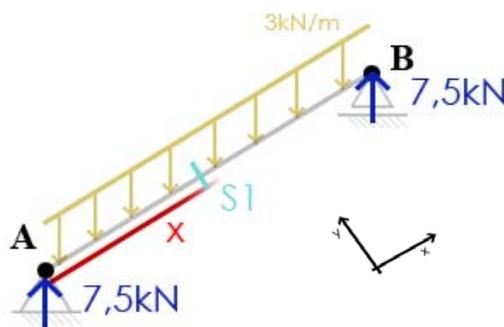
5m. Logo, a força resultante é de  $3\text{kN/m} \cdot 5\text{m} = 15\text{kN}$  no meio da barra.

Impõe-se a condição para que haja equilíbrio: o momento em torno de qualquer ponto deve ser igual a zero. Neste caso, adota-se como pólo o ponto C para eliminar as incógnitas  $Y_b$  e  $X_a$ .

- $\Sigma X = 0 = X_a \rightarrow X_a = 0$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -15 \cdot 2 + Y_b \cdot 4$   
 $\rightarrow Y_b = 7,5\text{kN}$
- $\Sigma M_{(C)} = 0 = -Y_a \cdot 4 + 15 \cdot 2$   
 $\rightarrow Y_a = 7,5\text{kN}$



### 3.2. Diagrama de corpo livre, e aplicação do teorema do corte

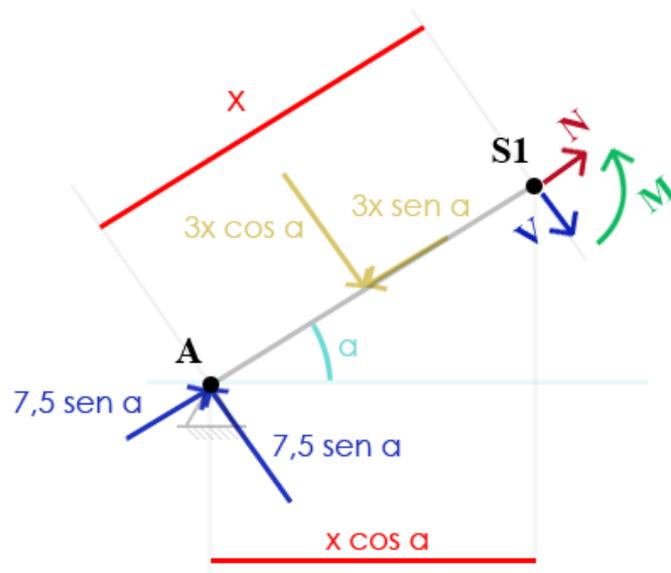


Como eixo dos x para traçar os diagramas dos esforços solicitantes utiliza-se o eixo da própria viga com origem em A e a variável x como sendo a medida desde A.

#### Seção S1:

- $\text{sen } \alpha = 3/5 = 0,6$
- $\text{cos } \alpha = 4/5 = 0,8$

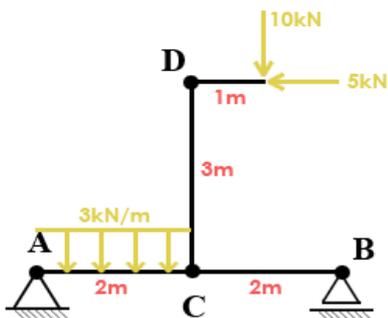
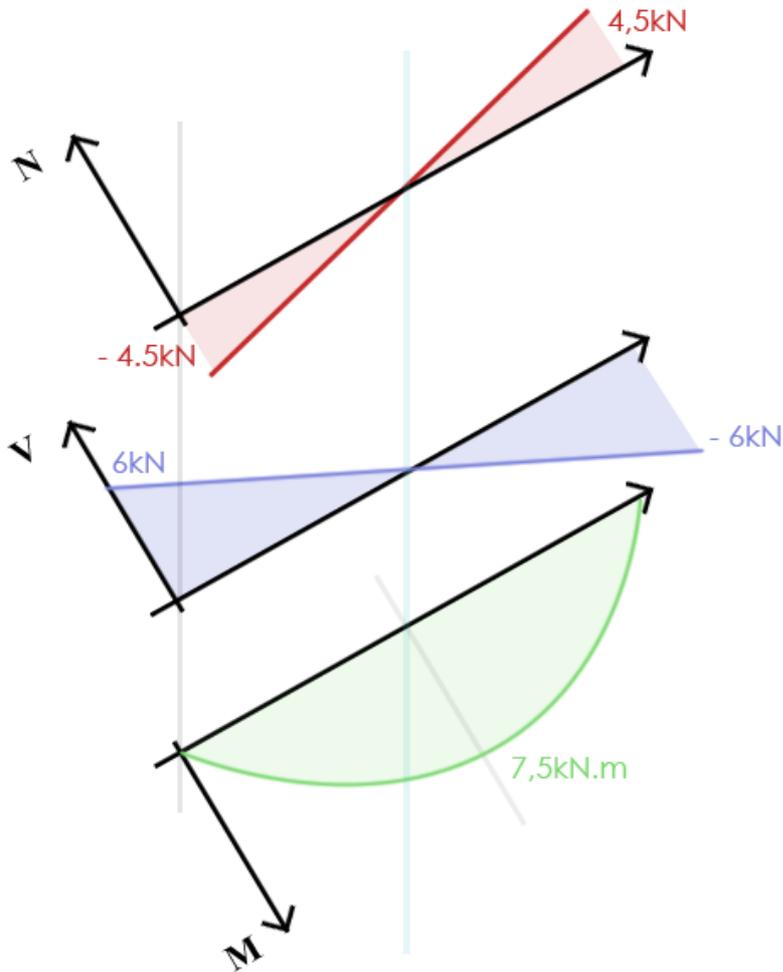
- $\Sigma X = 0 = N + 7,5 \text{sen } \alpha - 3x \cdot \text{sen } \alpha$   
 $\rightarrow N = -4,5 + 1,8x$
- $\Sigma Y = 0 = 7,5 \cdot \cos \alpha - 3x \cdot \cos \alpha - V$   
 $\rightarrow V = 6 - 2,4x$
- $\Sigma M_{(S1)} = 0 = (-7,5 \cdot \cos \alpha) \cdot x + (3x \cdot \cos \alpha) \cdot x/2 + M$   
 $\rightarrow M = 6x - 1,2x^2$



Para  $x$  entre 0 e 5 (lembrar que o eixo  $x$  é o mesmo da barra, que tem 5m):

- $N(x) = -4,5 + 1,8x$ 
  - $N(0) = -4,5 \text{ kN}$
  - $N(5) = 4,5 \text{ kN}$
- $V(x) = 6 - 2,4x$ 
  - $V(0) = 6 \text{ kN}$
  - $V(5) = -6 \text{ kN}$
- $M(x) = 6x - 1,2x^2$ 
  - $M(0) = 0$
  - $M(5/2) = 7,5 \text{ kN.m}$
  - $M(5) = 0$

## 3.3. Diagrama de esforços solicitantes

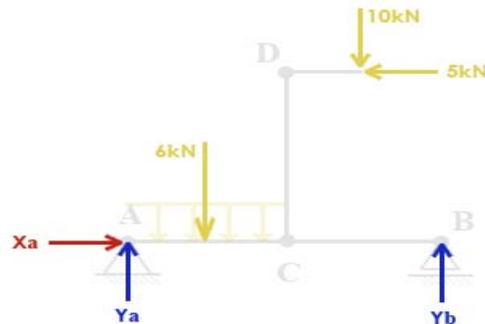


**4. Vigas poligonais:** Determinar as reações nos apoios e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes.

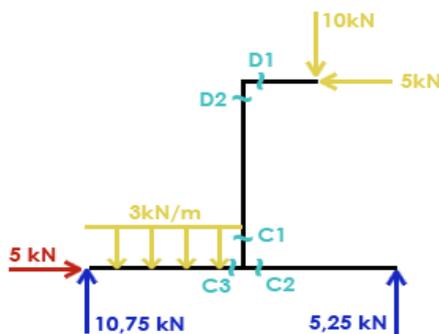
## 4.1. Calcular as reações nos apoios

O carregamento na barra AC gera uma força resultante de  $6\text{kN}$ , a  $1\text{m}$  do ponto A. Impondo-se o equilíbrio na estrutura tem-se:

- $\Sigma X = 0 = X_a - 5$   
 $\rightarrow X_a = 5 \text{ kN}$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -6 \cdot 1 - 10 \cdot 3 + 4Y_b$   
 $\rightarrow Y_b = 5,25 \text{ kN}$
- $\Sigma M_{(B)} = 0 = -4Y_a + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 3$   
 $\rightarrow Y_a = 10,75 \text{ kN}$

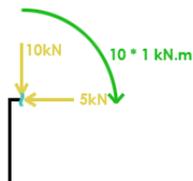


#### 4.2. Diagrama de corpo livre, e aplicação do teorema do corte



Devido às várias vigas (em direções e com carregamentos diferentes), para se obter o diagrama dos esforços solicitantes são necessários vários cortes (com as respectivas seções) para perceber as transferências dos esforços (caminhamento das forças) até os apoios.

##### 4.2.1. Seção D1:



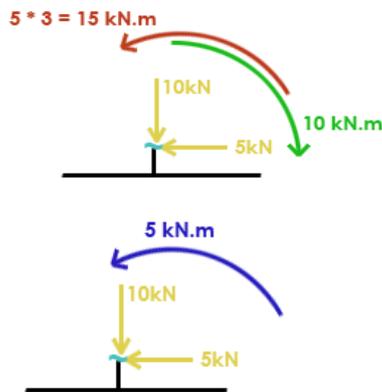
Transferindo as forças da extremidade livre da viga até o ponto D, tem-se, além das forças previamente existentes, os efeitos dessa transferência. Aplicar tais forças na extremidade livre é diferente de aplicá-las em D. A força cortante de 10 kN quando transferida para D é mecanicamente equivalente a uma força de 10 kN e a um momento. Como a distância de D1 à linha de aplicação da força é de 1 m, esse momento é de  $10 \cdot 1 = 10 \text{ kN.m}$ . Além disso, em D1, há a força normal de 5 kN que é transferida da extremidade livre e não gera nenhum efeito (forças normais transferem-se por todas as seções ortogonais a essas forças sem gerar nenhum efeito adicional).

##### 4.2.2. Seção D2:

D2 está a um dx ou dy de D1 e, portanto não produz nenhum efeito além do que se observa na própria transferência. Vale a pena notar que na viga horizontal a força de 10 kN que era cortante na viga vertical transforma-se em uma força normal. A força normal de 5 kN em D1 transforma-se em força cortante em D2. O momento fletor que em D1 tracionava a fibra superior, em D2 traciona a fibra da esquerda.



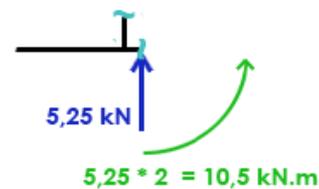
## 4.2.3. Seção C1:



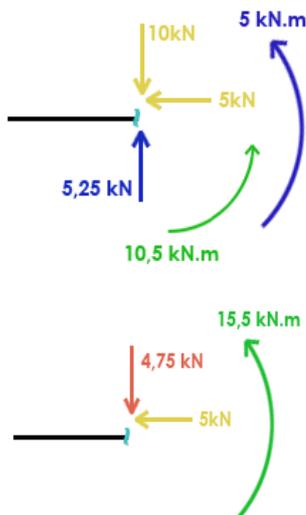
Transferindo as forças do ponto D para o ponto C, para que sejam mecanicamente equivalentes além das forças existentes em D, em C vai surgir o momento de  $5\text{kN} \cdot 3\text{m} = 15\text{ kN.m}$ . Há ainda o momento aplicado em D que é transferido para a seção C. Não surge nenhum efeito além do próprio momento pois cada momento se transfere para cada uma das seções transversais ao eixo, integral e isoladamente. Assim, em C, o momento resultante é de  $5\text{ kN.m}$  em sentido anti-horário.

## 4.2.4. Seção C2:

Aplicando o teorema do corte, para a seção C2 transferem-se as forças que estavam no apoio B. Assim, em C2 além da força de  $5,25\text{kN}$  vai surgir o momento de valor  $5,25\text{kN} \cdot 2\text{m} = 10,5\text{ kN.m}$ .



## 4.2.5. Seção C3:



Aplicando o teorema do corte, para a seção C3 transferem-se todas as forças e momentos obtidos em C1 e C2, e obtêm-se os resultantes.

Apenas para relembrar, quando se aplica o teorema do corte, a estrutura original fica dividada em duas. Os esforços que surgem na seção da metade considerada são os efeitos dos esforços que ficaram na metade desconsiderada. Ou ainda, os esforços que surgem na seção da metade considerada são os esforços que equilibram os esforços que ficaram nessa metade considerada. É por isso que as forças no apoio A não são transferidas para C3 no corte feito.

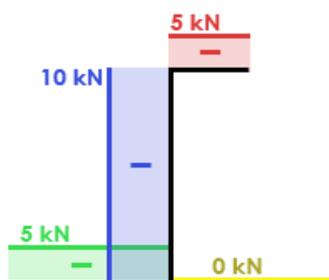
### 4.3. Diagrama dos esforços solicitantes

Por haver várias seções, os gráficos que representam a variação das forças normais e cortantes podem ser desenhadas em qualquer lado da viga, pois não se estabelece um eixo como positivo ou negativo. Porém, o sinal deverá indicar se a força é positiva ou negativa.

De acordo com a convenção adotada, no caso das forças normais, forças de tração (de dentro para fora da seção da viga) possuem sinal positivo e forças de compressão (de fora para dentro da seção da viga) possuem sinal negativo.

Para forças cortantes, o sinal positivo é atribuído para aquela força que tende a girar a estrutura/seção no sentido horário. A força cortante será negativa se essa força tende a girar a estrutura/seção no sentido anti-horário.

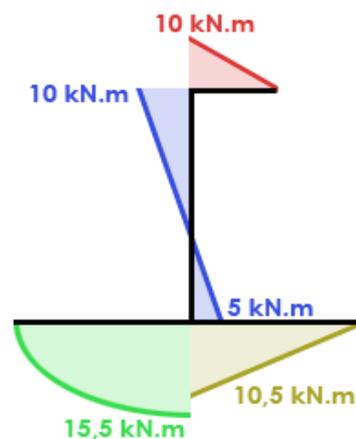
*Normal:*



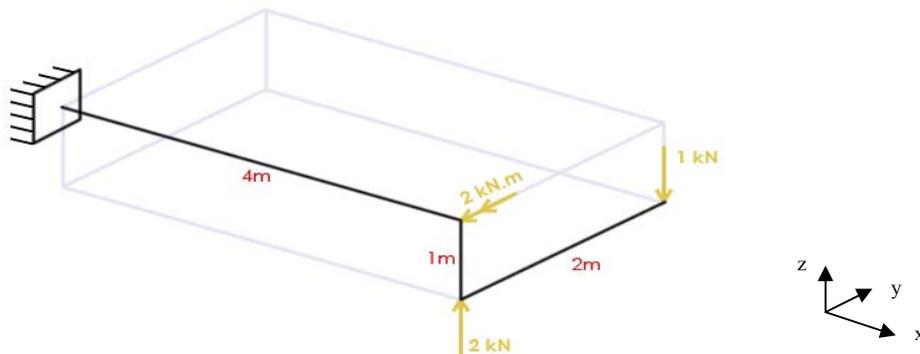
*Cortante:*



Para o momento fletor, a convenção estabelece que os gráficos que mostram a sua variação devem ser desenhados do lado tracionado. Não se colocam os sinais de positivo ou negativo. A linha deve permanecer do lado da viga que é flexionada. O diagrama dos momentos fletores da estrutura analisada mostra claramente quais as fibras tracionadas.

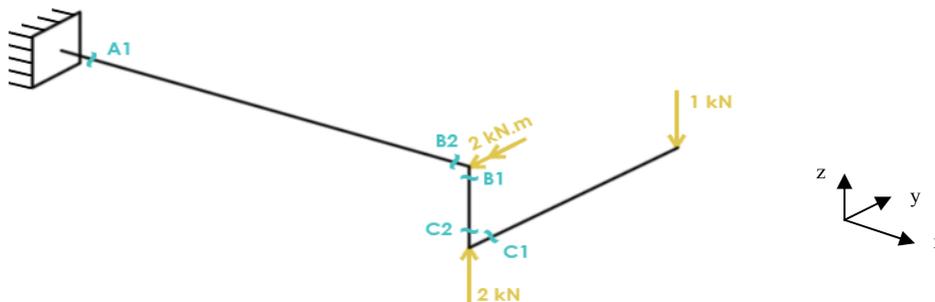


### 5. Estruturas Espaciais: Esboçar os diagramas dos esforços solicitantes.



#### 5.1. Transferência das forças até o engastamento

Diferentemente dos exercícios anteriores, as reações no apoio (engastamento) não precisam ser calculadas inicialmente. Isso porque ao aplicar o teorema do corte não há necessidade de se saber os valores das reações no apoio pois pode-se partir da extremidade livre para o apoio. Os valores serão obtidos automaticamente ao se transferir todos os esforços ao longo da viga. Ao chegar em A1, bastará efetuar o equilíbrio entre os esforços solicitantes em A1 e as reações de apoio em A. Aplicando-se o teorema do corte, vai se estudar as seções C1, C2, B1, B2 e A1.



##### 5.1.1. Seção C1:

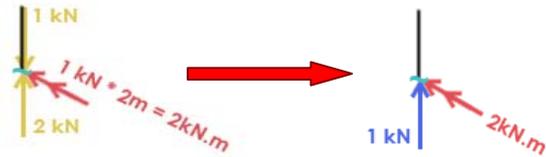


Como já dito anteriormente, aplicar a mesma força cortante em dois pontos diferentes de uma mesma viga não é a mesma coisa. Assim, aparece um momento quando se transfere uma força cortante de uma seção transversal para outra. Ao se transferir a força de 1 kN da extremidade livre para C1, surge o momento de  $1\text{ kN} \cdot 2\text{ m} = 2\text{ kN.m}$ . A direção desse momento é obtida lembrando que a força 1 kN está na direção z, a distância

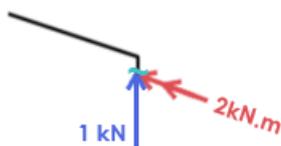
2m está na direção y e portanto o momento está na direção x. O sentido do momento é dado pela “regra da mão direita”.

### 5.1.2. Seção C2:

A força e o momento em C1 são transferidos para C2 sem outros efeitos pois as distâncias  $dy$  e  $dz$  são infinitesimais. Nessa passagem de C1 para C2, surge a força de 2kN, que não estava em C1, mas que deve ser considerada em C2.

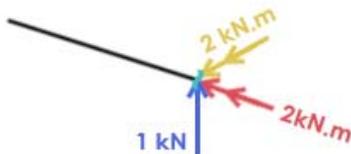


### 5.1.3. Seção B1:



Por não haver nenhuma força cortante a ser transferida, por não haver nenhuma força externa atuando na viga entre C2 e B1, a transferência da força e do momento de C2 para B1, não acrescenta esforço algum ao que já existia em C2.

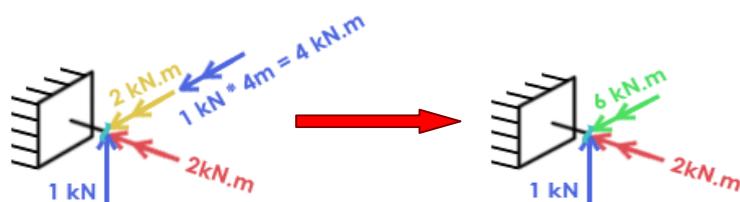
### 5.1.4. Seção B2:



De B1 para B2, acrescenta-se o momento (ativo e externo, em torno do eixo  $y$ ) de 2 kN.m, que agora, deve ser levado em consideração. Portanto, há a força cortante de 1kN (na direção  $z$ ), o momento fletor de 2kN.m (em torno do eixo  $y$ ) e o momento de torção de 2kN.m (em torno do eixo  $x$ ).

### 5.1.5. Seção A1:

Por fim, obtêm-se os esforços solicitantes na seção transversal da viga junto ao apoio. A força cortante de 1kN (na direção  $z$ ) quando transferida de B2 para A1 gera um momento fletor de  $1\text{kN} \cdot 4\text{m} = 4\text{kN.m}$  (em torno do eixo  $y$ ) pois a distância de 4m é na direção  $x$ . Portanto, o momento fletor é de 6kN.m (em torno do eixo  $y$ ), a força cortante é de 1kN (na direção  $z$ ) e o momento de torção é de 2kN.m.

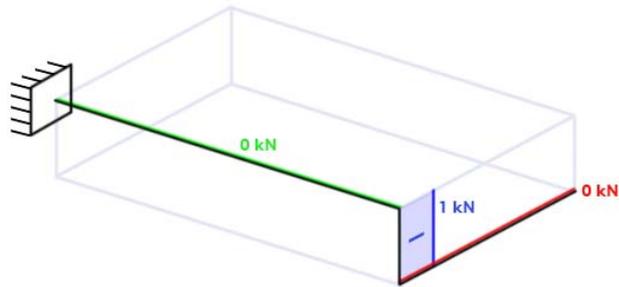


## 5.2. Diagrama dos Esforços Solicitantes

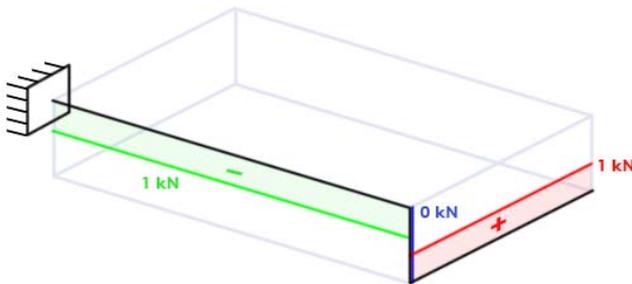
A partir dos esforços solicitantes obtidos nas seções extremas de cada viga e analisando a existência de esforços entre essas seções podem-se esboçar os gráficos dos esforços solicitantes.

### 5.2.1. Força Normal

O sinal negativo é atribuído para forças de compressão (de fora para dentro), enquanto que o positivo é atribuído para forças de tração (de dentro para fora). O gráfico para cada viga pode ser desenhado em qualquer um dos semi-planos que passam pelo seu eixo.



### 5.2.2. Força Cortante

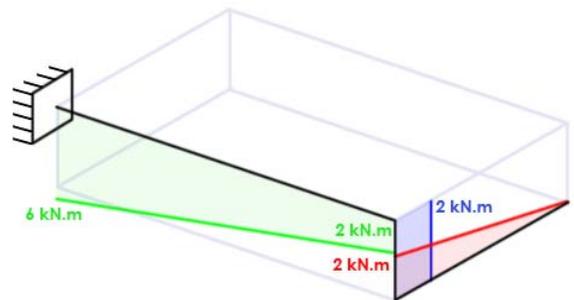


O sinal positivo é atribuído para forças cortantes que tendem a girar a estrutura no sentido horário, enquanto que o negativo é atribuído para forças cortantes que tendem a girar a estrutura no sentido anti-horário. O gráfico deve ser desenhado no plano que contenha a viga e a força. Para permitir uma

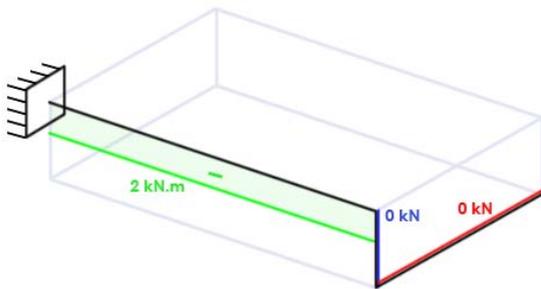
melhor visualização pode-se optar por qualquer dos dois semi-planos pois há o sinal que define o sentido da força. Conhecendo as forças cortantes em B2 e em A1 e observando que não há nenhuma outra força entre B2 e A1 conclui-se que a força cortante de 1kN é constante. Isso é verificado até pelo fato de que não havendo carga distribuída entre B2 e A1 a força cortante é constante, pois  $\frac{dV}{dx} = -p$ .

### 5.2.3. Momento Fletor

Para traçar os diagramas dos momentos fletores deve-se, em cada seção, verificar qual é a fibra que é tracionada, se a fibra de cima ou de baixo, se a da direita ou da esquerda, com o observador posicionado em frente à seção transversal. Não se colocam sinais nos diagramas dos momentos fletores. Por exemplo, em B1, o momento fletor de 2kN.m traciona a fibra da direita. Em B2, esse momento vira momento de torção mas surge outro momento de 2kN.m externo que traciona a fibra de baixo. Em A1, o momento fletor de 6kN.m traciona a fibra de baixo. Como entre B2 e A1, não nenhum outro momento aplicado, ele varia uniformemente de 2kN.m (em B2) a 6kN.m (em A1). Isso pode ser confirmado pelo fato da força cortante entre B2 e A1 ser constante e  $\frac{dM}{dx} = V$



### 5.2.3. Momento de torção (ou Momento Torçor)



O sinal positivo é atribuído para momentos de torção representados por vetores saindo da seção transversal (de dentro para fora), enquanto que o negativo é atribuído para vetores entrando na seção transversal (de fora para dentro). O gráfico para cada viga pode ser desenhado em qualquer um dos semi-planos que passam pelo seu eixo.

## 4. Formulário

Estar em equilíbrio é ter a resultante das forças igual a zero e o momento em torno de qualquer ponto ser zero:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_{(\text{pontoqualquer})} = 0 \end{cases}$$

Relação entre momento e força cortante:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Relação entre força cortante e carregamento (força distribuída por comprimento):

$$\frac{dV}{dx} = -p$$

Momento obtido pela translação de uma força cortante V a uma distância d:

$$\vec{M}_V = \vec{V} \times \vec{d}$$

Resultante de um carregamento retangular (força uniforme distribuída por comprimento, de p):

$$R = p \times l$$

Resultante de um carregamento triangular (força uniformemente variada, distribuída por comprimento, de 0 a p):

$$R = \frac{p \times l}{2}$$

Resultante de um carregamento qualquer (px = equação da curva em questão):

$$R = \int_0^l px \cdot dx$$