

## Decomposição em Valores Singulares 1 – Parte teórica

A decomposição em valores singulares (do inglês *singular value decomposition* – SVD) é uma das ferramentas mais importantes da Álgebra Linear. Ela encontra aplicações no fornecimento de informações importantes sobre as matrizes da decomposição, na obtenção de bases para subespaços, na redução da dimensão de uma matriz (útil para compressão de imagens), na melhoria da relação sinal-ruído de sinais de voz, no cálculo da pseudo inversa de Moore-Penrose e outras inversas generalizadas, na resolução de problemas de mínimos quadrados, entre outras.

Como vimos nas Experiências 6 e 7, há aplicações em que é interessante decompor uma matriz quadrada  $\mathbf{A}_{n \times n}$  em autovalores e autovetores, ou seja,  $\mathbf{A} = \mathbf{VDV}^{-1}$ , sendo  $\mathbf{D}$  uma matriz diagonal formada pelos autovalores de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{V}$  uma matriz cujas colunas contêm os autovetores de  $\mathbf{A}$ . Infelizmente, nem todas as matrizes podem ser fatoradas dessa forma. Entretanto, uma fatoração do tipo  $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$  com  $\mathbf{S}$  diagonal é possível para qualquer matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  não necessariamente quadrada. Como veremos nesta experiência, a SVD é uma decomposição especial desse tipo.

## 1 Introdução

Na Experiência 7, estudamos um sistema de equações de diferença do tipo

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{Ax}(n-1) + \mathbf{b}(n),$$

em que  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de dimensão  $n \times n$ . Vimos que em algumas aplicações, a solução desse sistema pode ser aproximada utilizando o autovalor de maior módulo (dominante) da matriz  $\mathbf{A}$  e seu autovetor correspondente.

Considere que  $\lambda_1$  seja o autovalor de maior módulo de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}_{n \times n}$  e que  $\mathbf{v}_1$  seja o autovetor correspondente de norma unitária. Sabemos que  $\mathbf{v}_1$  identifica a direção na qual o esticamento de  $\mathbf{A}$  é maior. Em outras palavras, o comprimento de  $\mathbf{Ax}$  é maximizado quando  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  e  $\|\mathbf{Av}_1\| = |\lambda_1|$ . Veremos no Exemplo 1.1 que a relação entre  $\mathbf{v}_1$  e  $|\lambda_1|$  encontra uma analogia em matrizes retangulares, o que leva à decomposição em valores singulares.

**Exemplo 1.1.** *Seja*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

uma transformação linear que mapeia um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  com norma unitária em  $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^2$  (você pode verificar que  $\mathbf{A}$  mapeia a esfera unitária em uma elipse). Vamos encontrar o vetor  $\mathbf{x}$  que maximiza  $\|\mathbf{Ax}\|$ .

A quantidade  $\|\mathbf{Ax}\|^2$  é maximizada com o mesmo  $\mathbf{x}$  que maximiza  $\|\mathbf{Ax}\|$ . Por isso, vamos encontrar o vetor  $\mathbf{x}$  que maximiza  $\|\mathbf{Ax}\|^2$ , por ser mais simples. Observe que

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{Ax})^T(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}.$$

Note também que  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é uma matriz simétrica pois

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}.$$

Dessa forma, o problema agora é maximizar a forma quadrática  $\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$  sujeita à restrição  $\|\mathbf{x}\| = 1$ . Vamos assumir que  $\lambda_1$  seja o autovalor de maior módulo de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  e que  $\mathbf{v}_1$  seja o autovetor de norma unitária correspondente. O máximo valor de  $\|\mathbf{Ax}\|^2$  é atingido quando  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  e o valor máximo vale  $|\lambda_1|$ .

Para a matriz  $\mathbf{A}$  desse exemplo, temos

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  são  $\lambda_1 = 360$ ,  $\lambda_2 = 90$  e  $\lambda_3 = 0$  e os autovetores de norma unitária correspondentes são

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

O valor máximo de  $\|\mathbf{Ax}\|^2$  é 360, que é atingido quando  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ . Portanto, o valor máximo de  $\|\mathbf{Ax}\|$  é

$$\|\mathbf{Av}_1\| = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}.$$

Esse exemplo sugere que o efeito de  $\mathbf{A}$  na esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$  está relacionado com a forma quadrática  $\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$ . Além disso, cabe fazer as seguintes observações:

1. Note que os autovalores da matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  do Exemplo 1.1 são reais e não negativos. Isso vem da estrutura da matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , como veremos a seguir. Seja  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^n$  que consiste nos autovetores de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores associados aos autovetores dessa base. Então, para  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Av}_i\|^2 &= (\mathbf{Av}_i)^T \mathbf{Av}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{v}_i^T (\lambda_i \mathbf{v}_i), \quad \text{pois } \mathbf{v}_i \text{ é um autovetor de } \mathbf{A}^T \mathbf{A} \\ &= \lambda_i, \quad \text{pois } \mathbf{v}_i \text{ é um vetor de norma unitária.} \end{aligned}$$

Como a norma quadrática  $\|\mathbf{A}\mathbf{v}_i\|^2$  é sempre real e não negativa, conclui-se que os autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  são todos reais e não negativos, isto é,<sup>1</sup>

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

2. Dada uma matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  não quadrada, pode haver uma direção dominante que está relacionada com o autovalor de maior módulo da matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . Veremos a seguir que a decomposição em autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  está relacionada com a decomposição em valores singulares da matriz  $\mathbf{A}$ .

## 2 Definição

A decomposição de  $\mathbf{A}_{m \times n}$  em valores singulares envolve uma matriz diagonal  $\mathbf{S}_{m \times n}$  da forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{D}_{r \times r}$  uma matriz diagonal em que  $r \leq \min\{m, n\}$ . Se  $r$  for igual a  $m$  ou a  $n$  (ou a ambos), alguma (ou todas) as matrizes de zeros não aparecem em  $\mathbf{S}$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $\mathbf{A}_{m \times n}$  uma matriz com posto  $r$ . Então, existe uma matriz  $\mathbf{S}_{m \times n}$  da forma (1), cujos elementos da diagonal em  $\mathbf{D}$  são os primeiros  $r$  valores singulares de  $\mathbf{A}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Além disso, existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{U}_{m \times m}$  e uma matriz ortogonal  $\mathbf{V}_{n \times n}$  tal que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T.$$

Qualquer fatoração  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ , com  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  ortogonais,  $\mathbf{S}$  como em (1) e elementos positivos em  $\mathbf{D}$  é chamada de decomposição em valores singulares de  $\mathbf{A}$ . As matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  não são únicas mas os elementos da diagonal de  $\mathbf{S}$  são necessariamente os valores singulares de  $\mathbf{A}$ . As colunas de  $\mathbf{U}$  são chamadas de **vetores singulares à esquerda** de  $\mathbf{A}$  e as colunas de  $\mathbf{V}$  são chamadas de **vetores singulares à direita** de  $\mathbf{A}$ . Os **valores singulares** da matriz  $\mathbf{A}$ , denotados por  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , são as raízes quadradas dos autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  e correspondem aos comprimentos dos vetores  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n$ , ou seja,  $\sigma_i = \|\mathbf{A}\mathbf{v}_i\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Um diagrama ilustrativo da SVD é mostrado na Figura 1.

*Demonstração.* Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  os autovalores e os correspondentes autovetores de norma unitária da matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , tais que  $\mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+2} = \dots = \mathbf{A}\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$  (No Apêndice A, demonstramos que os vetores  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_r$  formam uma base ortogonal para o espaço formado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ ). Normalizando cada  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i$  para obter uma base ortonormal  $\{\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r\}$  temos

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_i\|} \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{v}_i.$$

<sup>1</sup>Se necessário, podemos rearranjar a ordem dos autovalores.

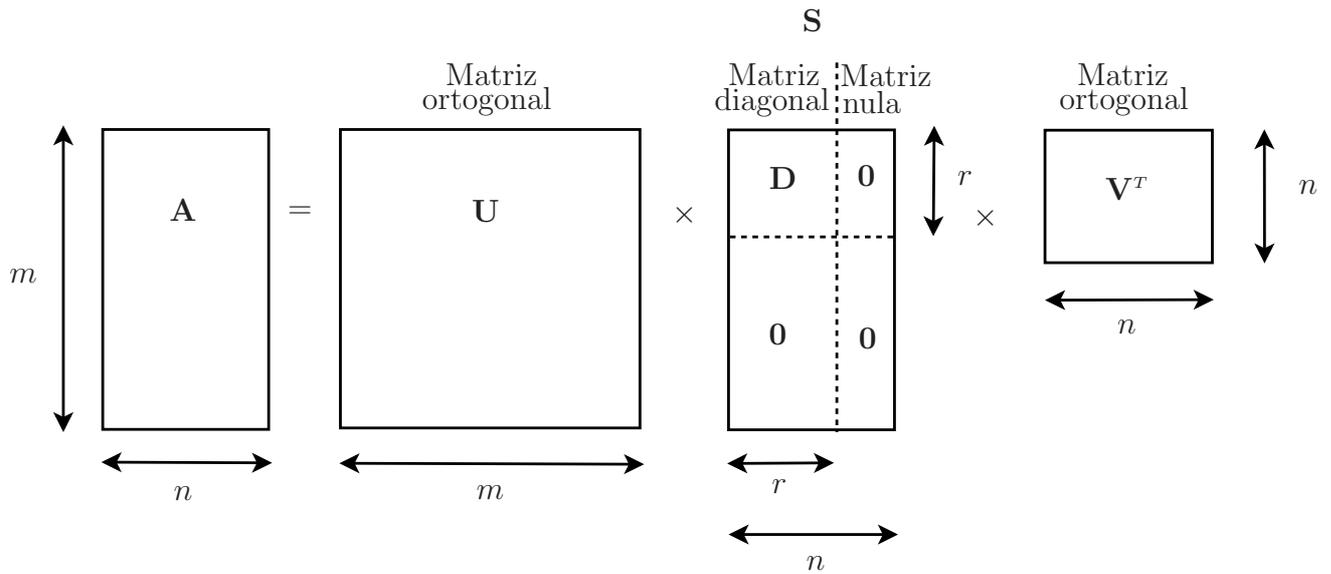


Figura 1: Diagrama para interpretação da SVD.

Assim,

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Agora, estendendo  $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r\}$  para uma base ortonormal  $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$  do  $\mathbb{R}^m$  e definindo as matrizes

$$U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_r \ \cdots \ \mathbf{u}_m] \quad \text{e} \quad V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n],$$

nota-se que por construção,  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais, ou seja,  $UU^T = I_{m \times m}$  e  $VV^T = I_{n \times n}$ . Além disso,

$$AV = [A\mathbf{v}_1 \ \cdots \ A\mathbf{v}_r \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0}] = [\sigma_1\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \sigma_r\mathbf{u}_r \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0}].$$

Seja  $D$  uma matriz diagonal com elementos  $\sigma_1 \cdots \sigma_r$  e seja  $S$  definida como (1). Então

$$US = [\sigma_1\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \sigma_r\mathbf{u}_r \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0}] = AV.$$

Como  $V$  é uma matriz ortogonal,

$$USV^T = AVV^T = A.$$

□

**Exemplo 2.1.** Use os resultados dos Exemplo 1.1 para calcular a SVD de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

O procedimento para o cálculo da SVD pode ser dividido nos três passos, descritos a seguir.

**Passo 1: obtenção de uma diagonalização ortogonal de  $A^T A$ .** *Encontre os autovalores de  $A^T A$  e um correspondente conjunto ortonormal de autovetores.*

*Isso foi feito no Exemplo 1.1.*

**Passo 2: construção de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{S}$ .** Coloque os autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  em ordem decrescente. Os correspondentes autovetores unitários  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são os vetores singulares à direita de  $\mathbf{A}$ . Os valores singulares de  $\mathbf{A}$  são as raízes quadradas dos autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , isto é,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  para  $1 \leq i \leq n$ . Os valores singulares não nulos são os elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$  e a matriz  $\mathbf{S}$  tem a mesma dimensão de  $\mathbf{A}$  com  $\mathbf{D}$  no canto superior esquerdo e zeros nas demais posições.

No Exemplo 1.1, já temos os autovalores em ordem decrescente: 360, 90 e 0 e a matriz da  $\mathbf{V}$  é dada por

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Os valores singulares são

$$\sigma_1 = 6\sqrt{10}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{10}, \quad \sigma_3 = 0$$

e as matrizes  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{S}$  são dadas por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Passo 3: construção de  $\mathbf{U}$ .** Como  $\mathbf{A}$  tem posto  $r$  as primeiras  $r$  colunas de  $\mathbf{U}$  são os vetores normalizados obtidos de  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_r$ . Se necessário, estenda  $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r\}$  para uma base ortonormal  $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$  do  $\mathbb{R}^m$ .

No exemplo,  $\mathbf{A}$  tem dois valores singulares não nulos e portanto o posto de  $\mathbf{A}$  é igual a 2 e os vetores  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, 2$  são iguais a

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Os vetores  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  devem ser calculados como

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Como  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  já é uma base para o  $\mathbb{R}^2$  não é necessário acrescentar mais vetores. A SVD de  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

É importante observar que essa forma de calcular a SVD é útil para fins didáticos e teóricos. Algoritmos práticos evitam o cálculo de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  para reduzir erros numéricos.

### 3 Exercícios

- 1) Encontre a SVD da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e confira o resultado usando a função `svd.m` do Matlab.

- 2) Considere as matrizes  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$  indicadas a seguir. Responda os itens pedidos considerando cada uma dessas matrizes.

1. Determine os valores singulares e os vetores singulares à esquerda e à direita de  $\mathbf{A}_i$ .
2. Com os valores e vetores singulares calculados verifique em cada caso se a igualdade  $\mathbf{A}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{S}_i \mathbf{V}_i^T$  é válida.
3. Na tela de comandos do MatLab digite `eigshow`. O `eigshow` é uma demo em que são consideradas as matrizes desse exercício. Considere somente a opção `svd` do comando `eigshow`. Note que nesta opção aparecem dois vetores perpendiculares de norma unitária denotados por  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Os vetores  $\mathbf{Ax}$  e  $\mathbf{Ay}$  também são mostrados. Quando  $\mathbf{Ax}$  é perpendicular a  $\mathbf{Ay}$ , então  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são vetores singulares à direita e  $\mathbf{Ax}$  e  $\mathbf{Ay}$  são múltiplos dos vetores singulares à esquerda. Os comprimentos de  $\mathbf{Ax}$  e  $\mathbf{Ay}$  são os valores singulares correspondentes. Justifique as projeções observadas na demo usando os valores e vetores singulares calculados para cada matriz  $\mathbf{A}$  desse exercício. Para facilitar as suas justificativas observe se: (i) as matrizes são singulares ou não singulares, (ii) os autovalores são iguais aos valores singulares.

1.  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$

2.  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}$

3.  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.  $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5.  $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

6.  $\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4$

7.  $\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 4$

$$8. \mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4$$

$$9. \mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 4$$

$$10. \mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 4$$

$$11. \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} / 4$$

$$12. \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} / 4$$

3) (opcional) Considere que as fatorações abaixo são as SVD's das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Responda:

a) Qual é o posto de  $\mathbf{A}$ ? Qual o posto de  $\mathbf{B}$ ?

b) Use as decomposições para escrever bases para o espaço formado pelas colunas de  $\mathbf{A}$  e de  $\mathbf{B}$  e para os espaços nulos dessas matrizes.

Dica: Leia os Apêndices A e B.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,40 & -0,78 & 0,47 \\ 0,37 & -0,33 & -0,87 \\ -0,84 & -0,52 & -0,16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,10 & 0 & 0 \\ 0 & 3,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,30 & -0,51 & -0,81 \\ 0,76 & 0,64 & -0,12 \\ 0,58 & -0,58 & 0,58 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,86 & -0,11 & -0,50 \\ 0,31 & 0,68 & -0,67 \\ 0,41 & -0,73 & -0,55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12,48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,66 & -0,03 & -0,35 & 0,66 \\ -0,13 & -0,90 & -0,39 & -0,13 \\ 0,65 & 0,08 & -0,16 & -0,73 \\ -0,34 & 0,42 & -0,84 & -0,08 \end{bmatrix}$$

## Apêndices

### A Base ortonormal para $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$

**Teorema A.1.** *Suponha que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  seja uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^n$  formada pelos autovetores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , arranjados de modo que os autovalores de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  satisfaçam  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  e suponha que  $\mathbf{A}$  tenha  $r$  valores singulares não nulos. Então,  $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_r\}$  é uma base ortonormal para o espaço formado pelas colunas da matriz  $\mathbf{A}$  denotado por  $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$  e  $\text{posto}\{\mathbf{A}\} = r$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathbf{v}_i$  e  $\lambda_j \mathbf{v}_j$  são ortogonais para  $i \neq j$ ,

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}_i)^T(\mathbf{A}\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T (\lambda_j \mathbf{v}_j) = 0.$$

Dessa forma  $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_n\}$  é um conjunto ortogonal. Além disso, como os comprimentos dos vetores  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_n$  são os valores singulares de  $\mathbf{A}$  e como há  $r$  valores singulares não nulos,  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  se e somente se  $1 \leq i \leq r$ . Assim,  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_r$  são vetores linearmente independentes e estão no subespaço formado pelas colunas de  $\mathbf{A}$  ( $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$ ). Finalmente, para qualquer  $\mathbf{y} \in \text{Col}\{\mathbf{A}\}$ , por exemplo,  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , podemos escrever  $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} &= c_1 \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r \mathbf{A}\mathbf{v}_r + c_{r+1} \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + c_n \mathbf{A}\mathbf{v}_n \\ &= c_1 \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r \mathbf{A}\mathbf{v}_r + 0 + \cdots + 0. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $\mathbf{y}$  pertence ao espaço formado pelos vetores  $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_r\}$ , ou seja,  $\mathbf{y} \in \text{Span}\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_r\}$ , o que mostra que  $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_r\}$  é uma base ortogonal para o espaço das colunas de  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$ . Consequentemente,  $\text{posto}\{\mathbf{A}\} = \dim \text{Col}\{\mathbf{A}\} = r$ .  $\square$

## B Bases para espaços fundamentais

Dada uma SVD de uma matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  com posto  $r$ , seja  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  os vetores singulares à esquerda,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  os vetores singulares à direita e  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  os valores singulares. Sabemos que

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$$

é uma base ortonormal para  $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$ . Lembrando que  $(\text{Col}\{\mathbf{A}\})^\perp = \text{Nul}\{\mathbf{A}^T\}$ . Então

$$\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}$$

é uma base ortonormal para  $\text{Nul}\{\mathbf{A}^T\}$ .

Como  $\|\mathbf{A}\mathbf{v}_i\| = \sigma_i$  para  $1 \leq i \leq n$  e  $\sigma_i = 0$  se e somente se  $i > r$ , os vetores  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  formam uma base para  $\text{Nul}\{\mathbf{A}\}$  de dimensão  $n - r$ . O complemento ortogonal de  $\text{Nul}\{\mathbf{A}^T\}$  é  $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$ . Trocando  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{A}^T$ , note que  $(\text{Nul}\{\mathbf{A}\})^\perp = \text{Col}\{\mathbf{A}^T\} = \text{Row}\{\mathbf{A}\}$ . Consequentemente,

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

é uma base ortonormal para  $\text{Row}\{\mathbf{A}\}$ . A Figura 2 ilustra essas bases, que são particularmente importantes em problemas de otimização com restrições.

## Referências

- [1] LAY, D. C. *Linear algebra and its applications*, 4. ed. Pearson Education, Inc., 2012.
- [2] HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory*. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [3] MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

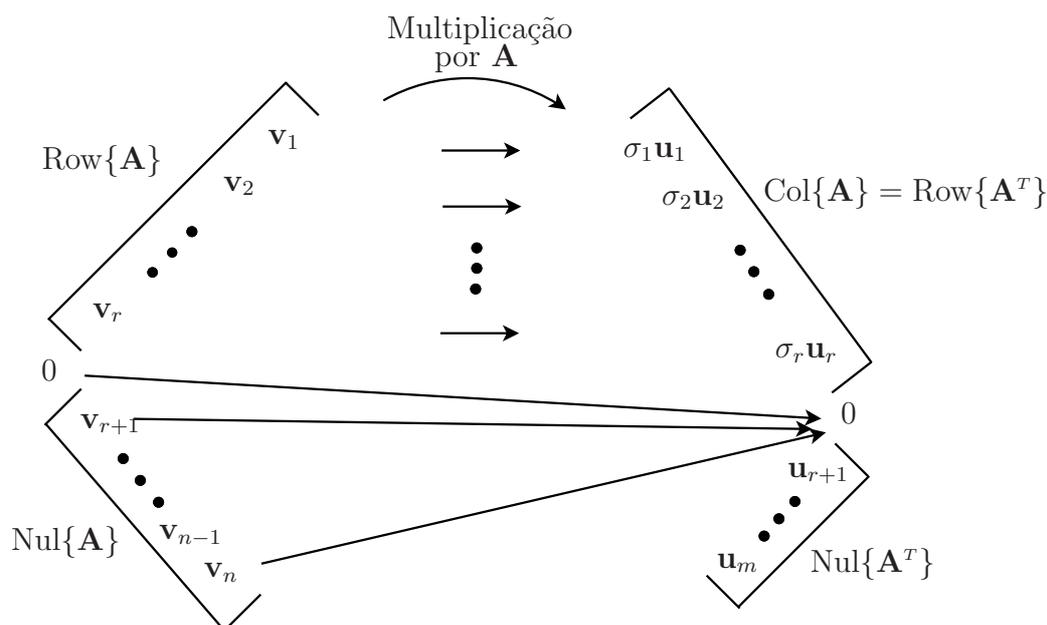


Figura 2: Os quatro subespaços fundamentais e a ação de  $\mathbf{A}$ . Mostramos a base ortogonal  $\{\sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, \sigma_r \mathbf{u}_r\}$  para  $\text{Col}\{\mathbf{A}\}$  em vez da base normalizada para reforçar a ideia de que  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .

- [4] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1987.
- [5] NASCIMENTO, V. H. *Ferramentas de análise matricial para aplicações em Engenharia Elétrica*, PSI-EPSUP, 2012.
- [6] KALMAN, D. *A singularly valuable decomposition: the SVD of a matrix*, The American University, 2002.
- [7] JENSEN, S.H.; HANSEN, P.C.; HANSEN, S.D. ; SORENSEN, J.A.: Reduction of broad-band noise in speech by truncated QSVD, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, v. 3, n. 6, Nov. 1995.
- [8] DE MOOR, B.: The singular value decomposition and long and short spaces of noisy matrices, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 41, n. 9, Sep. 1993.