PSI-3260 Aplicações de Álgebra Linear

Experiência 8

Método dos Mínimos Quadrados 1 – Parte Computacional

Parte 1 - Aproximação polinomial

Nesta parte do exercício, vamos usar o método dos mínimos quadrados para obter o polinômio de grau m que melhor se ajusta a um conjunto de dados. Para isso, faça os itens enumerados a seguir:

1. Considere um conjunto de dados do tipo

$$\{(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)\}.$$

   Faça uma **função genérica** no Matlab que utilize o método dos mínimos quadrados para ajustar a esses dados um polinômio de grau m dado por

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m.$$

   Sua função deve ter como parâmetros de **entrada**:

   - os vetores de dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, cada um com n amostras;
   - o grau m do polinômio que se deseja obter para aproximar os dados;

   e como parâmetros de **saída**:

   - o vetor contendo $m+1$ coeficientes do polinômio da aproximação;
   - o vetor do erro da aproximação.

   Para evitar problemas numéricos, não use a função `inv.m` do Matlab.

2. A Tabela 1 contém dados dos medalhistas de ouro da prova masculina de atletismo na modalidade de 400 metros rasos dos dez últimos jogos olímpicos (de 1976 a 2016). Utilizando os dados dessa tabela, pede-se:

   - Use a função que você fez no item 1) e obtenha aproximações polinomiais para o tempo da prova em função do ano. Considere aproximações de primeira (reta), segunda (parábola) e terceira ordens. Em um mesmo gráfico, plote os dados e as aproximações. Apresente também um gráfico dos erros e compare as normas dos vetores de erro de cada aproximação.
     Obs: Você não precisa digitar os dados. Eles estão no arquivo `400metros.mat` disponível no Moodle.

- Para cada aproximação, estime o tempo que se espera para essa prova nos jogos olímpicos que serão realizados em Tóquio em 2020 e também nos jogos de 2032. Os tempos previstos pelas três aproximações são coerentes? Comente com base nos dados da Tabela 1.

Tabela 1: Medalhistas de ouro da prova masculina atletismo na modalidade de 400 metros rasos dos dez últimos jogos olímpicos. Fonte: http://www.olympic.org/

Ano	Local	Medalhista de ouro	País	Tempo (s)
1976	Montreal	Alberto Juantorena	Cuba	44,26
1980	Moscou	Viktor Martin	URSS	44,60
1984	Los Angeles	Alonzo Babers	EUA	44,27
1988	Seul	Steve Lewis	EUA	43,87
1992	Barcelona	Quincy Watts	EUA	43,50
1996	Atlanta	Michael Johnson	EUA	43.49
2000	Sydney	Michael Johnson	EUA	43,84
2004	Atenas	Jeremy Wariner	EUA	44,00
2008	Pequim	LaShawn Merritt	EUA	43,75
2012	Londres	Kirani James	Granada	43,94
2016	Rio de Janeiro	Wayde Van Niekerk	África do Sul	43,03

Parte 2 - Aproximação com outras funções

Nesta parte do exercício, vamos usar o método dos mínimos quadrados em conjunto com outras funções para aproximar dados. Siga os itens enumerados a seguir:

1. Modifique a função que você fez no item 1) da Parte 1 do Exercício para aproximar os dados da Tabela 1 pela seguinte função

   $f(x) = y = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x + 10)$
   Obs: Note que no Matlab, a função `log.m` é o logaritmo natural enquanto `log10.m` é o logaritmo na base 10.

   Com a aproximação obtida, estime novamente o tempo da prova esperada no jogos olímpicos de 2020 e 2032. Compare com os tempos estimados na Parte 1. A aproximação obtida se aproxima de um dos três polinômios gerados na Parte 1 do Exercício? Se sua resposta for afirmativa, explique porque isso ocorre.

2. A falta de chuva tem trazido preocupação, pois poderá causar problemas no abastecimento de água. Utilize o método dos mínimos quadrados para encontrar uma aproximação para os dados médios de precipitação na cidade de São Paulo. Para isso, utilize os dados da Tabela 2. As médias climatológicas são valores calculados a partir de um série de dados de 30 anos observados. Para simplificar, os dias do ano são

numerados começando em 15 de janeiro. Suponha que os dados de cada mês não estão disponíveis e se deseja obter o valor médio em uma certa data do ano que não está na tabela.

Tabela 2: Precipitação média na cidade de São Paulo.
Fonte: http://www.climatempo.com.br/

Data	Dia/número	Precipitação (mm)
15 de janeiro	0	237
15 de março	59	161
15 de maio	120	71
15 de julho	181	44
15 de setembro	243	71
15 de novembro	304	146

Para essa aproximação, faz sentido usar uma função periódica. Considere a seguinte aproximação

$$f(x) = y = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right) + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right).$$

Em um mesmo gráfico, plote os dados e a aproximação. Apresente também um gráfico dos erros. Estime o valor médio esperado para o dia 15 de agosto que corresponde ao dia número 227 do ano e compare com o valor real médio que é de 40mm.