

Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos – Introdução às Equações de Lagrange

PTC 3471 – Práticas de Projeto de Sistemas de Controle
2º semestre de 2018
Bruno Angélico

Laboratório de Automação e Controle
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Introdução

- A modelagem de sistemas mecânicos pode ser obtida pelas equações de Lagrange ao invés das equações de Newton.
- Os mesmos resultados são obtidos.
- Ao invés de se trabalhar com forças e deslocamentos (Newton), as expressões envolvem a energia (cinética e potencial).

Método de Lagrange

- Publicadas inicialmente em 1788 na França, no livro *Méchanique Analytique* (Mecânica Analítica).
- Deve-se definir, inicialmente, um conjunto de variáveis generalizadas, q_1, \dots, q_n , que representam os n graus de liberdade do sistema.
- Os graus de liberdade são tipicamente coordenadas de posição (distâncias ou ângulos)

Método de Lagrange

- Em termos das coordenadas generalizadas, definem-se a Energia Cinética T e a Energia Potencial V .
- Em geral, T é uma função definida positiva em função de q_n e \dot{q}_n .
- Por outro lado, V é tipicamente definida em função de q_n .
- Em sistemas multicorpos, pode-se definir T e V para cada corpo separadamente e, depois, combiná-las.

Método de Lagrange

- O importante é que T e V sejam referidas a um referencial inercial.
- Com T e V , define-se então a Lagrangiana:

$$L = T - V; \quad L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

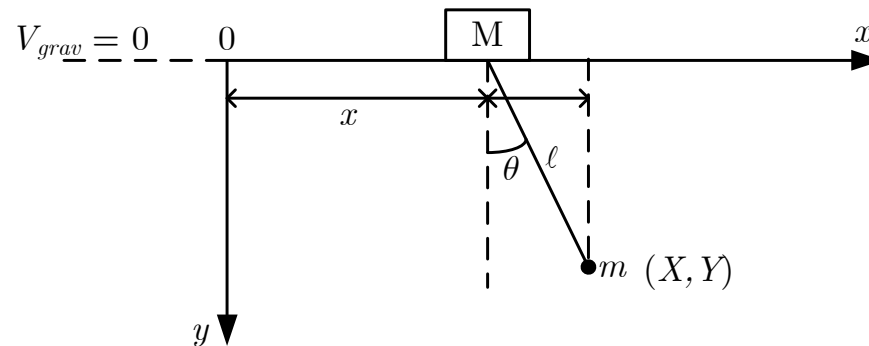
- As equações de Euler-Lagrange são dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- τ_k são as forças generalizadas (força ou torque) na direção de q_k .

Exemplos

- EXEMPLO 1: pêndulo com suporte livre.



Coordenadas generalizadas: distância x e ângulo $\theta \rightarrow 2$ graus de liberdade

Energia Cinética:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)}{2}$$

Exemplos

Precisa ser expressa nas coordenadas generalizadas (x e θ):

$$X = x + \ell \sin(\theta) \Rightarrow \dot{X} = \dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos(\theta)$$

$$Y = \ell \cos(\theta) \Rightarrow \dot{Y} = -\ell \dot{\theta} \sin(\theta)$$

Assim:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta) + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta))}{2} \\ &= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) \end{aligned}$$

Energia Potencial:

$$V = -mgY \Rightarrow V = -mg\ell \cos(\theta)$$

Exemplos

Lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{(M + m)\dot{x}^2}{2} + \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + mgl\cos(\theta)$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\left[M + m\right]\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos(\theta)\right) = 0$$

$$\boxed{\left[M + m\right]\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2\sin(\theta) = 0}$$

Exemplos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\ell^2 \dot{\theta} + m\ell \dot{x} \cos(\theta)) - (-m\ell \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) - mg\ell \sin(\theta)) = 0$$
$$m\ell^2 \ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} \cos(\theta) - m\ell \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + m\ell \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + mg\ell \sin(\theta) = 0$$

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} \cos(\theta) + mg\ell \sin(\theta) = 0$$

Assim, a dinâmica do sistema é regida pelo seguinte conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} [M + m] \ddot{x} + m\ell \ddot{\theta} \cos(\theta) - m\ell \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = 0 \\ m\ell^2 \ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} \cos(\theta) + mg\ell \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

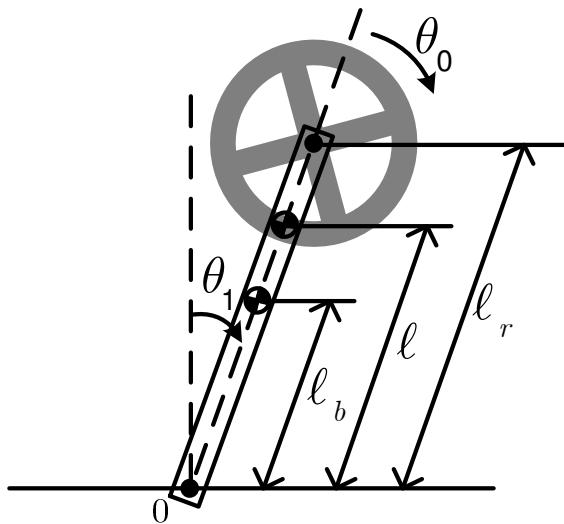
Exemplos

- OBSERVAÇÕES:

1. O método de Lagrange só vale para referenciais inerciais.
2. Por exemplo, a energia cinética do pêndulo em relação ao suporte seria $T = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2}$, o que difere do deduzido anteriormente e, portanto, não deve ser utilizado na formulação de Lagrange.
3. Não se deve usar a energia potencial de um corpo em relação a outro corpo.

Exemplos

- EXEMPLO 2: sistema *pêndulo invertido com roda de reação*.



m_b = massa do braço

m_r = massa do rotor (roda + motor)

$m = m_b + m_r$

J_b = momento de inércia do braço em torno do seu centro de massa

J_r = momento de inércia da roda em torno do seu centro de massa

l_b = distância do eixo de rotação do pêndulo até o centro de massa do braço

l_r = distância do eixo de rotação do pêndulo até o centro de massa da roda

l = distância do eixo de rotação do pêndulo ao centro de massa do pêndulo (braço + roda)

Exemplos

Coordenadas generalizadas: ângulos θ_1 e $\theta_2 \rightarrow 2$ graus de liberdade.

Seja J o momento de inércia do pêndulo (braço + roda) em torno do eixo de rotação do pêndulo:

$$J = J_b + m_b \ell_b^2 + m_r \ell_r^2$$

$J_b + m_b \ell_b^2$: momento de inércia do braço em relação ao eixo de rotação do pêndulo (teorema dos eixos paralelos)

$m_r \ell_r^2$: parcela devido à roda

Exemplos

A energia cinética total é dada por:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_0^2$$

Energia potencial:

$$V = mgl \cos(\theta_1)$$

Lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_0^2 - mgl \cos(\theta_1)$$

Exemplos

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \tau_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\tau_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \tau_r \Rightarrow \frac{d}{dt} (J_r \dot{\theta}_0) = \tau_r \Rightarrow \boxed{J_r \ddot{\theta}_0 = \tau_r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\tau_r \Rightarrow \frac{d}{dt} (J \dot{\theta}_1) - (mgl \sin(\theta_1)) = -\tau_r$$

$$\boxed{J \ddot{\theta}_1 - mgl \sin(\theta_1) = -\tau_r}$$

Exemplos

Assim, a dinâmica do sistema é regida pelo seguinte conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{1}{J_r} \tau_r$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J} (mgl \sin(\theta_1) - \tau_r)$$

Linearizando para pequenos ângulos:

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{1}{J_r} \tau_r$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J} (mgl\theta_1 - \tau_r)$$

Exemplos

Definindo o seguinte vetor de estados:

$$x = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \dot{\theta}_0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mgl / J & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 / J_r \\ -1 / J \end{bmatrix} \tau_r$$

Exemplos

- OBSERVAÇÕES:
 1. Não foi considerado o efeito do atrito. Como considerar?
 2. A entrada do modelo está em torque. Como reescrever o modelo para entrada tensão no motor?

Exemplos

O atrito no eixo do pêndulo pode ser considerado desprezível.

Ao considerar o atrito viscoso no eixo da roda, tem-se:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J} \left(mgl \sin(\theta_1) - (\tau_r - b_0 \dot{\theta}_0) \right)$$

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{1}{J} (\tau_r - b_0 \dot{\theta}_0)$$

Com isso, o modelo linear em espaço de estados fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_0 / J_r & 0 \\ 0 & mgl / J & b_0 / J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 / J_r \\ -1 / J \end{bmatrix} \tau_r$$

Exemplos

Assume-se que o atuador seja um motor DC, com os seguintes parâmetros:

R = resistência da armadura

K_t = constante de torque [Nm/A]

K_e = constante da f.c.e.m [V/(rad/s)]

Equação do motor:

$$RI + K_e \dot{\theta}_0 = V \Rightarrow I = \frac{1}{R} (V - K_e \dot{\theta}_0)$$

Relação entre torque e tensão (assumiu-se aqui que K_t relaciona a corrente no motor com o torque na saída da caixa de redução e que K_e também já considera a redução):

$$\tau_r = K_t I \Rightarrow \tau_r = \frac{K_t}{R} (V - K_e \dot{\theta}_0)$$

Exemplos

Assim:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J} mgl\theta_1 - \frac{1}{J} \frac{K_t}{R} (V - K_e \dot{\theta}_0) + \frac{1}{J} b_0 \dot{\theta}_0$$

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{1}{J_r} \frac{K_t}{R} (V - K_e \dot{\theta}_0) - \frac{1}{J_r} b_0 \dot{\theta}_0$$

Portanto, o modelo linear em espaço de estados fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{K_e K_t}{J_r R} + \frac{b_0}{J_r}\right) & 0 \\ 0 & mgl / J & \frac{K_e K_t}{JR} + \frac{b_0}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_t / (J_r R) \\ -K_t / (JR) \end{bmatrix} V$$

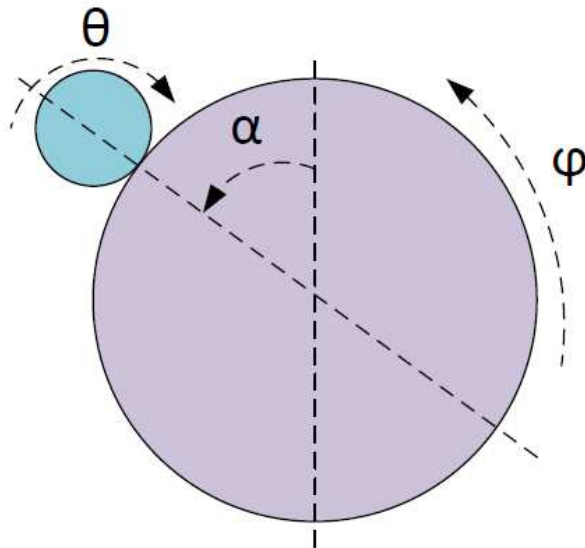
Exemplos

Se o motor for de 12V esse for desejável escrever o modelo em termos do *duty cycle* do PWM (*PWM*), basta fazer a seguinte substituição:

$$V = 12 \cdot PWM$$

Exemplos

- EXEMPLO 3: sistema *ball and wheel*.



m_b = massa da bola

I_b = momento de inércia da bola em torno do seu centro de massa

I_w = momento de inércia da roda em torno do seu centro de massa

r_b = raio da bola

r_w = raio da roda

Energia cinética da roda:

$$T_w = \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}^2$$

Exemplos

Energia cinética da bola:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (r_w + r_b)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}^2$$

As coordenadas generalizadas são α e φ . A seguinte relação é válida:

$$r_b \dot{\theta} + (r_w + r_b) \dot{\alpha} = r_w \dot{\varphi} \Rightarrow r_b \dot{\theta} = r_w \dot{\varphi} - (r_w + r_b) \dot{\alpha}$$

Logo:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (r_w + r_b)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_b \left(\frac{r_w \dot{\varphi} - (r_w + r_b) \dot{\alpha}}{r_b} \right)^2$$

A energia potencial da roda é nula. A da bola é dada por:

$$V = m_b g (r_w + r_b) \cos(\alpha)$$

Exemplos

Lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_b (r_w + r_b)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_b \left(\frac{r_w \dot{\varphi} - (r_w + r_b) \dot{\alpha}}{r_b} \right)^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}^2 - m_b g (r_w + r_b) \cos(\alpha)$$

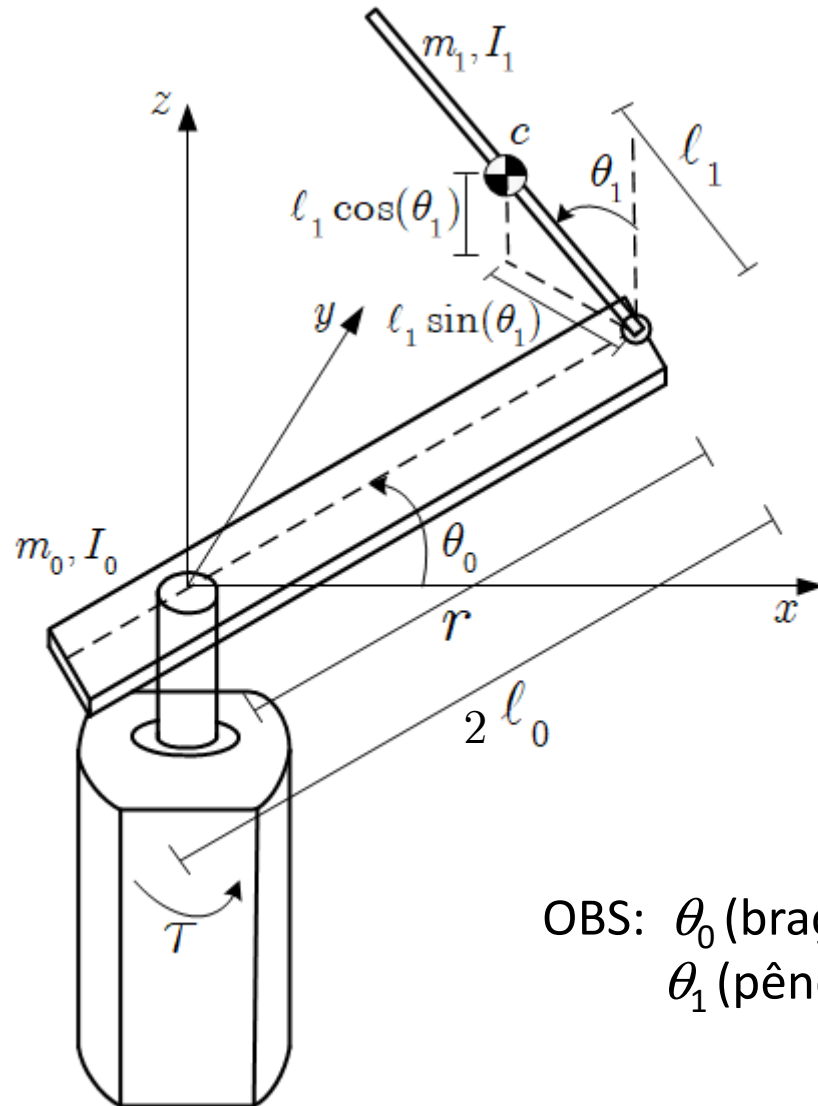
Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \tau_m$$

O exercício será resolvido no Matlab com auxílio do pacote simbólico.

Modelagem do Pêndulo de Furuta

- O Pêndulo de Furuta da disciplina



	Parâmetro
m_0	Massa do braço [Kg]
m_1	Massa do pêndulo [Kg]
$2l_0$	Comprimento do braço [m]
$2l_1$	Comprimento do pêndulo [m]
r	Distância eixo base até pêndulo [m]
d	Distância eixo base até o centro de massa
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]

OBS: θ_0 (braço): sentido anti-horário é positivo
 θ_1 (pêndulo): sentido horário é positivo

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Energia potencial:

$$V = m_1 g \ell_1 \cos(\theta_1)$$

Momento de inércia do braço (barra)

$$I_0 = \frac{m_0 (2\ell_0)^2}{12} + m_0 d^2$$

Barra com
comprimento r com
rotação em torno do
seu centro de massa

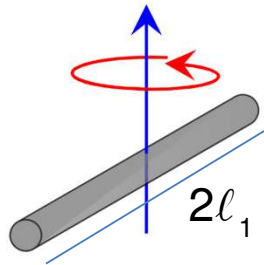
Teorema dos eixos
paralelos: correção
para girar em um
ponto com distância d
do centro de massa

Energia cinética do braço:

$$K_0 = \frac{I_0 \dot{\theta}_0^2}{2}$$

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Momento de inércia do pendulo (barra), com rotação em torno do centro de massa



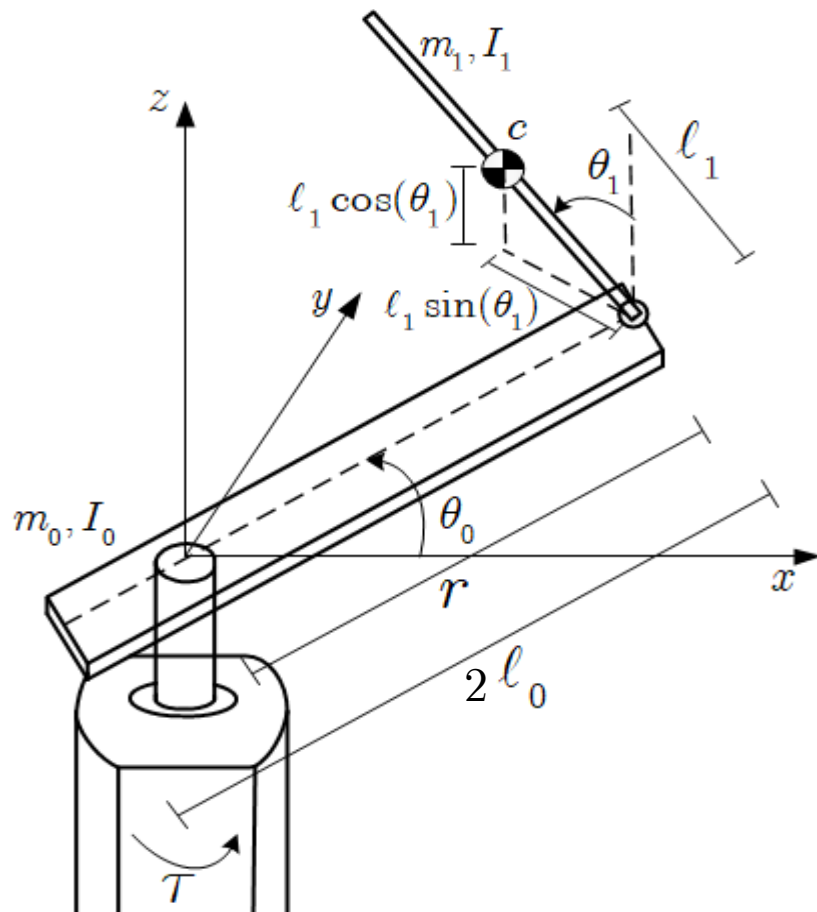
$$I_1 = \frac{m_1 (2l_1)^2}{12}$$

Energia cinética do pêndulo:

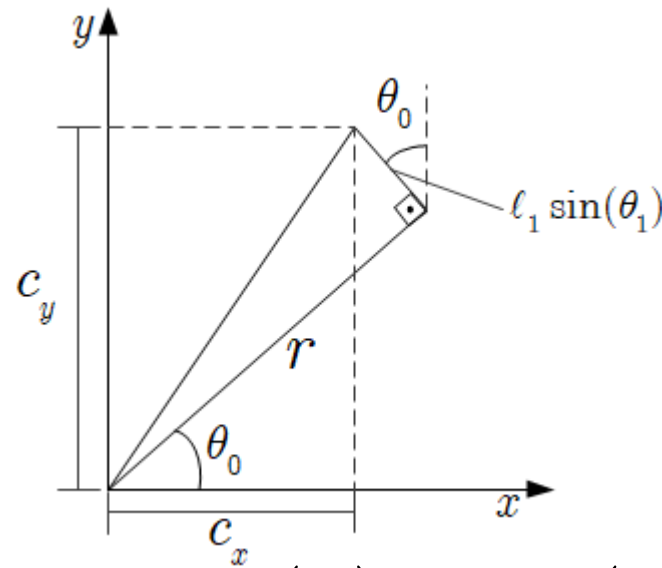
- Rotação do pêndulo: $K_{11} = \frac{I_1 \dot{\theta}_1^2}{2} = \frac{m_1 (2l_1)^2 \dot{\theta}_1^2}{12 \cdot 2} = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{6}$

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Deve-se também considerar a energia de translação:



$$c_z = l_1 \cos(\theta_1)$$



$$c_x = r \cos(\theta_0) - l_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_0)$$

$$c_y = r \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_0)$$

Modelagem do Pêndulo de Furuta

$$v_{c_z} = -\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)$$

$$v_{c_x} = -r \dot{\theta}_0 \sin(\theta_0) + \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_0) + \ell_1 \dot{\theta}_0 \sin(\theta_1) \cos(\theta_0)$$

$$v_{c_y} = r \dot{\theta}_0 \cos(\theta_0) + \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_0) - \ell_1 \dot{\theta}_0 \sin(\theta_1) \sin(\theta_0)$$

Assim, após algumas simplificações:

$$\begin{aligned} K_{12} &= \frac{m_1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &= \frac{m_1}{2} (\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r^2 \dot{\theta}_0^2 + \ell_1^2 \dot{\theta}_0^2 \sin^2(\theta_1) + 2r\ell_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) \end{aligned}$$

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Portanto:

$$K_1 = K_{11} + K_{12} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{4}{3} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r^2 \dot{\theta}_0^2 + \ell_1^2 \dot{\theta}_0^2 \sin^2(\theta_1) + 2r\ell_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \right)$$

e

$$K = K_0 + K_1$$

Com K e V , obtém-se a Lagrangiana. O restante da modelagem será realizado com o pacote simbólico do MATLAB a partir do *template* fornecido do sistema *ball and wheel*.

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Os parâmetros do sistema são os seguintes:

Parâmetro	Valor
d	0,18 [m]
m_0	0,120 [kg]
m_1	0,076 [kg]
l_0	0,13 [m]
l_1	0,125 [m]
r	0,25 [m]
R_m	3,6 Ω
K_t	0,118 [Nm/A] (já considera a redução)
K_e	0,229 0,118 [V/(rad/s)](já considera a redução)
g	9,81 [m/s ²]
b_0	a ser determinado
b_1	a ser determinado

Modelagem do Pêndulo de Furuta

Tarefa:

- 1) Inserir a dinâmica do atuador;
- 2) Inserir o efeito do atrito viscoso nas juntas.
- 3) Obter o modelo não linear (MATLAB);
- 4) Obter o modelo linear (MATLAB);

Linearização

Linearização: considere um sistema não linear descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

em que $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ é o vetor de funções não lineares que descreve a dinâmica do sistema. De forma expandida:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Linearização

Considere a linearização em torno do ponto de equilíbrio do sistema, dado por $(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))$.

Note que a dinâmica do sistema também é satisfeita no ponto de equilíbrio, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))$$

Ao expandir o vetor de funções não lineares em torno do ponto de equilíbrio utilizando a série de Taylor, tem-se cada equação da dinâmica do sistema

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Linearização

Assim:

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_{0i}(t) + \delta\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_n} \right) \delta u_n(t) + T.O.S$$

Simplificando o termo em regime estacionário:

$$\delta\dot{x}_i(t) = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_n} \right) \delta u_n(t) + T.O.S$$

Linearização

Desconsiderando os termos de ordem superior (*T.O.S*) e escrevendo na notação matricial:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_n} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}(t)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t)$$

Linearização

Se o sistema for invariante no tempo e simplificando a notação de $\delta\mathbf{x}(t)$ por $\mathbf{x}(t)$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Com os parâmetros do slide 31, o modelo linear do pêndulo de Furuta tem as seguintes matrizes:

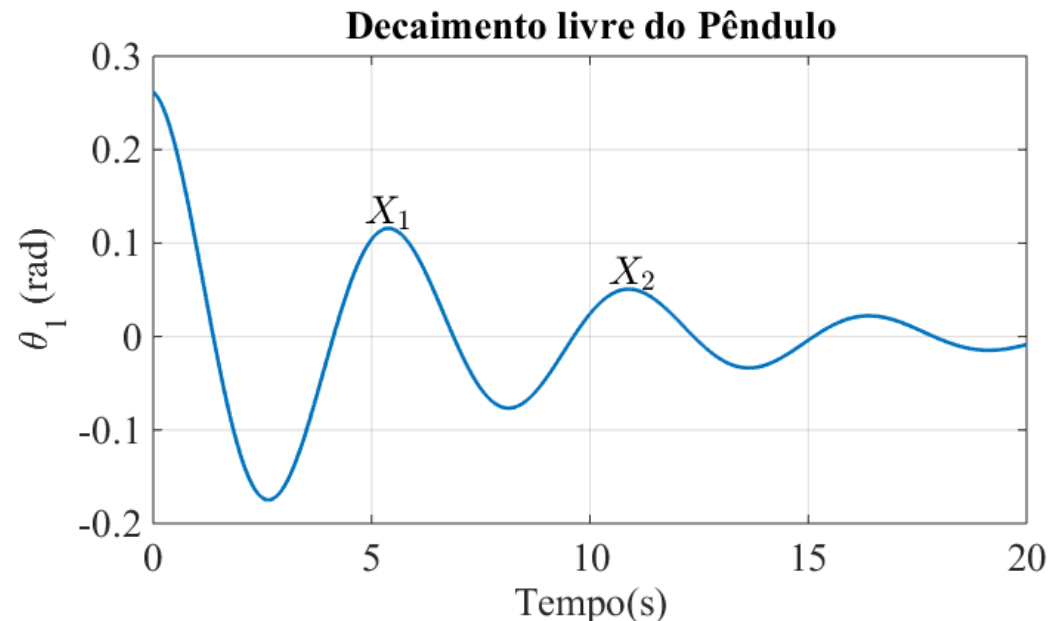
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24,3054 & -0,6725 & 0 \\ 0 & 95,3181 & 1,0087 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 68,3880 \\ -102,5819 \end{bmatrix}$$

Determinação dos coefs. de atrito

Coeficiente de atrito do pêndulo

Com o pêndulo na posição de repouso, leva-se o pêndulo para um ângulo pequeno, por exemplo próximo de 15° .

Ao soltar o pêndulo será verificado um movimento oscilatório amortecido.



Determinação dos coefs. de atrito

X_1 e X_2 representam o decaimento em um período de oscilação. A seguinte equação descreve o movimento:

$$I_1 \ddot{\phi}_1 + b_1 \dot{\phi}_1 + mgl_1 \phi_1 = 0 \Leftrightarrow \ddot{\phi}_1 + 2\xi\omega_n \dot{\phi}_1 + \omega_n^2 \phi_1 = 0$$

onde agora,
$$I_1 = \frac{m_1(2\ell_1)^2}{12} + m_1\ell_1^2 .$$

As seguintes expressões são utilizadas para determinação dos parâmetros:

$$\delta = \ln \left| \frac{X_1}{X_2} \right|; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2}}; \quad \omega_d = \frac{2\pi}{t(X_2) - t(X_1)}; \quad \omega_n = \omega_d \sqrt{1 - \xi^2}$$
$$\frac{b_1}{I_1} = 2\xi\omega_n \Rightarrow \boxed{b_1 = 2\xi\omega_n I_1}$$

Determinação dos coefs. de atrito

Coeficiente de atrito do braço

Ao considerar que o braço se move em velocidade constante, pode-se ter a seguinte simplificação:

$$T_{ss} = b_0 \dot{\theta}_{0ss}; T_{ss} = K_t i_{ss}; i_{ss} = \frac{12PWM - K_e \dot{\theta}_{0ss}}{R}$$

Assim,

$$b_0 = \frac{K_t i_{ss}}{\dot{\theta}_{0ss}}$$

Ao considerar a média de N ensaios de velocidade,

$$b_0 = \frac{K_t}{N} \sum_{i=1}^N \frac{i_{ss}^i}{\dot{\theta}_{0ss}^i}$$

Determinação dos coefs. de atrito

OBS: deve-se desconectar o fio do encoder da placa de controle para realizar o ensaio para obtenção de b_0 .

Atividades:

- 1) Crie no Simulink um bloco com o modelo não linear do sistema (dica: utilize Matlab function).
- 2) Efetue a validação do modelo do sistema sem atrito. Compare resultados de simulação com resultados práticos;
- 3) Obtenha b_0 e b_1 .
- 4) Refaça o item 2), considerando o modelo com atrito.