Mecânica Quântica — 7600025

Lista 5P — para praticar para a prova do dia 4/12/2018

1. Uma membrana quadrada de lado L tem densidade superficial σ e está sujeita a uma tensão superficial τ. Três de suas extremidades estão presas. Assim, num sistema de referências com origem no centro da membrana e com eixos x e y no plano da membrana e paralelos a suas extremidades, o deslocamento vertical z da membrana satisfaz às condições $z(x, -L/2, t) = z(x, L/2, t) = z(-L/2, y, t) = 0$. A quarta extremidade é livre de se mover, de forma que, ao longo dela, $\partial z/\partial x = 0$. Encontre a frequência do modo normal de menor frequência que pode formar-se na membrana.

2. Encontre a frequência do primeiro harmônico que pode formar-se na membrana do problema anterior.

3. Suponha que uma membrana quadrada, na geometria da questão 1, mas presa nas quatro extremidades, seja formada por duas metades. A primeira metade tem densidade superficial σ_1 se estende de $x = -L/2$ a $x = 0$. A segunda tem densidade σ_2 e se estende de $x = 0$ a $x = L/2$. Encontre a equação que descreve a frequência do modo normal fundamental quando a membrana é sujeita a uma tensão superficial τ. *Sugestão: Na junção entre as duas metades, a deformação z e sua derivada $\partial z/\partial x$ devem ser contínuas.*

4. Considere a membrana do problema anterior no limite $\sigma_1 \to \sigma_2$. Mostre que a equação encontrada pode ser resolvida nesse limite e determine a frequência do modo fundamental.

5. Considere uma membrana de densidade superficial σ sujeita a tensão superficial τ. A membrana tem formato circular, com raio R, e sua borda está presa. Num sistema polar com origem no centro da membrana, a deformação z da membrana obedece à condição $z(r = R, \theta, t) = 0$. Para resolver esse problema, procure uma solução independente do ângulo θ, da forma $z(r, \theta, t) = F(r)T(t)$. Encontre as equações que as funções $F(r)$ e $T(t)$ devem obedecer. *Sugestão: em coordenadas polares, o Laplaciano de uma função $f(r)$ (independente de θ) se escreve na forma $\nabla^2 f = d^2 f/dr^2 + (1/r)df/dr$.*

6. Encontre a solução geral para a equação para $T(t)$.

7. Compare a equação para F com a equação de Bessel, que pode ser encontrada no endereço

   http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html, por exemplo. Uma equação pode ser reduzida, exatamente, à outra?

8. Suponha que r seja tão grande que o termo proporcional a $1/r$ no Laplaciano possa ser desprezado. Encontre a solução geral para a equação resultante.

9. Admitindo que a solução encontrada no item anterior seja válida, aproximadamente, em toda a membrana, encontre a forma $z = F(r)T(t)$ dos modos normais na membrana, e as frequências permitidas.

10. A solução encontrada no problema anterior tem a forma de uma onda (estacionária). A partir dela, encontre a condição que a distância r deveria satisfazer para permitir que o termo proporcional a $1/r$ no Laplaciano seja desconsiderado. *Sugestão: compare r com o comprimento da onda.*