

# Vibrações e Ondas — 7600025

Lista 5 — teste no dia 27/11/2018

1. Como vimos em classe, a equação que descreve a deformação de uma membrana esticada é da forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Mostre que qualquer função da forma  $f(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$  é solução, onde  $\hat{k}$  é um versor qualquer no plano  $xy$  e  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ .

2. Qual a interpretação do versor  $\hat{k}$  no problema anterior?
3. Ao analisar a corda, vimos que a solução geral da equação de onda é  $y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ , onde  $f(u)$  e  $g(u)$  são funções (contínuas) arbitrárias da variável  $u$ . Qual é a afirmação análoga para a membrana vibrante? *Sugestão: lembre-se de que  $f(x - vt)$  e  $g(x + vt)$  definem ondas que avançam nos dois sentidos possíveis, em uma dimensão.*
4. Suponha que a solução da equação no problema 1 tem a forma  $z(x, t) = X(x)Y(y)T(t)$ . Encontre as equações diferenciais ordinárias que as funções  $X$ ,  $Y$  e  $T$  devem satisfazer.
5. Encontre a solução geral para  $T(t)$ .
6. A solução das equações para  $X(x)$  e  $Y(y)$  depende das condições de contorno. Suponha que a membrana esteja presa em um retângulo, de modo que  $z(x = 0, y, t) = 0$ ,  $z(x = L_x, y, t) = 0$ ,  $z(x, y = 0, t) = 0$  e  $z(x, y = L_y, t) = 0$ . Encontre  $X(x)$  e  $Y(y)$ .
7. A partir da solução da questão anterior, suponha que  $z(x, y, t = 0)$  seja máxima para encontrar  $z(x, y, t)$ .
8. Que relação existe entre as constantes que determinam  $X$  e  $Y$  e a frequência que aparece em  $T(t)$ ? Interprete fisicamente.
9. Considere agora um quadrado, com  $L_x = L_y = L$  e considere o modo fundamental (com a menor frequência). Empregue as fórmulas da prostaferese

$$2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p + q) + \cos(p - q)$$

$$2 \sin(p) \sin(q) = \cos(p - q) - \cos(p + q)$$

para mostrar que o modo fundamental pode ser visto como a soma de quatro ondas propagantes.

10. Em que direções e sentidos correm as quatro ondas do problema anterior?