A música na história da matemática

Texto referente ao seminário I para os integrantes:

Anderson Nascimento Bertoletti – 9021024
Jéssica Ludiane Andreotti – 8944129
Jaquellyne da Silva Barbosa - 8626635
Letícia Otero Dia Thomaz - 7568563

Música na Escola Pitagórica

Pode-se dizer que a confluência entre a música e a Matemática se deu a partir da necessidade de buscar embasamentos científicos para a harmonia entre sons e resolver problemas entre consonância e dissonância musical. A Pitágoras é atribuído o primeiro estudo científico da música e seus intervalos de frequências.

A história conta que ele, ao passar pela frente de uma oficina, ouviu os sons das batidas de martelo em diferentes materiais de diferentes tamanhos. Isto o fez despertar para uma possível harmonia entre os sons produzidos. Ele então teria iniciado uma pesquisa científica para assim fazer uma associação entre os diferentes sons e os números, pois para a escola Pitagórica tudo na natureza estava ligado aos números inteiros.

O primeiro projeto feito por Pitágoras para entender melhor esta consonância entre as batidas, foi o Metalofone, instrumento feito de metal com duas baquetas que simula as batidas dos martelos nas chapas.

Figura 1.1: Metalofone
Fonte:

Depois de alguns estudos e análise entre as consonâncias e dissonâncias dos diferentes sons, ele pode verificar que essa harmonia acontecia quando as chapas tinham uma relação de 1 para 2, ou seja, se uma nota Dó fosse entonada de uma chapa do metalofone, encontrava-se uma nova nota Dó quando a batida fosse feita numa chapa que tivesse a metade do tamanho da anterior, contudo com um tom mais agudo. Isto ocorre pois o número de vibrações obtida na nova chapa é o dobro em relação à original, fazendo soar assim a mesma nota com uma frequência maior, gerando este som mais agudo.

Pitágoras continuou sua investigação sobre as relações dos sons agradáveis aos ouvidos e os números inteiros. O instrumento usado que ajudou essa pesquisa foi o chamado **Monocórdio** (Mono = uma e Córdio = corda). Uma única corda esticada e presa por dois cavaletes fixos nas extremidades e com um cavalete móvel que o possibilitava alterar os comprimentos desta corda, fazendo vibrá-la em frequências distintas.

Como resultado desta investigação, Pitágoras percebeu que a corda reduzida a 2/3 do seu tamanho original, produzia também um som harmonioso que hoje chamamos de **Quinta Justa**, e que reduzida a 3/4 produz outra chamada atualmente de **Quarta Justa**.

Podemos listar alguns princípios criados por Pitágoras após as suas investigações.

1º - Equivalência: divisão da corda na razão de 1/2 (Oitava).

2º - Limite: deve estar sempre entre a corda toda e sua metade.

3º - Unidade de divisão: progressiva na razão de 2/3 do seu tamanho.

Assim foi criada a escala **Diatônica** com sete notas (cinco com intervalos de tons e duas com intervalos de semitons) Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, ficando a repetição como sendo a primeira só que mais aguda, chamada de Oitava, por ser a oitava nota da sequência. Segue abaixo a tabela entre os comprimentos das cordas a partir da nota Dó.

	Do	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Do1**
Razão a partir de Do	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

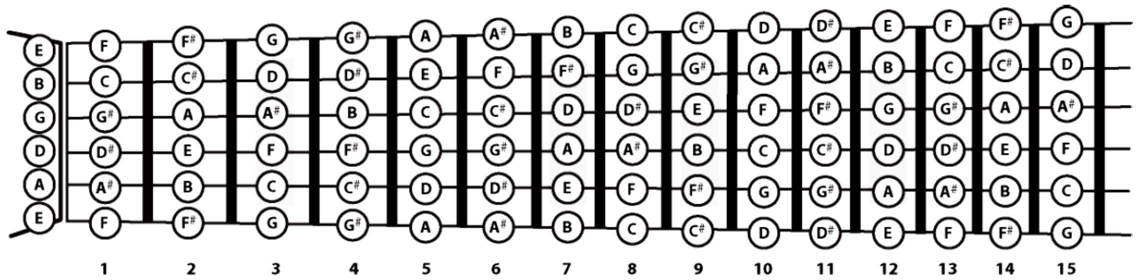
Razão intervalar resultante	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{128}{243}$

A escala Pitagórica deixa uma lacuna, pois usando as quintas justas não encontra uma nota correspondente ao ciclo de oitavas. Observe que analisando as frequências das oitavas chegamos a função $f(n) = 2^n$, enquanto as frequências nas quintas justas determinam uma função do tipo $g(m) = (3/2)^m$, tornando impossível encontrar algum valor inteiro para m e n tal que $f(n) = g(m)$. Após várias tentativas, verificou-se que o valor mais próximo para esta igualdade acontecia quando n = 7 e m = 12, gerando f(7) = 128 e g(12) = 129,74. Apesar dos valores encontrados serem muito próximos, pouco mais de 1% de diferença, isto comprometia a execução musical. Esta diferença ficou conhecida como **Coma Pitagórica**.

Outro problema na escala Pitagórica é a relação entre as frequências de seus tons e semitons, como pode ser observado na tabela acima, assim é possível verificar que a soma entre dois semitons não coincide com a frequência de um tom. Uma maneira de atenuar esse problema foi, ao invés de dividir a escala em sete notas como na escala diatônica, criou-se a **escala Cromática**, que consiste em dividi-la em doze semitons;

Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si, Dó.

Ainda que não conhecessem a “equação de ondas “do cálculo diferencial, os pitagóricos observavam os sons consonantes nas relações entre as frequências na razão de 3/2, quando se tomava a corda em dois terços da inicial, chamando de Ciclo das Quintas. Desta maneira, podemos garantir que a quinta do Dó é o Sol e por sua vez a quinta do Sol é o Ré, e assim por diante, encontrando a sequência, Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si, Fá#, D´o#, Sol#, Ré#, Lá#, Fá, Dó. Abaixo segue uma foto que explica a divisão da escala cromática num braço de violão.



Escalas Temperada

O modelo criado por Pitágoras era o mais aceito pela comunidade musical, contudo existiam erros. Muitos músicos e matemáticos tentaram corrigir as “falhas “do modelo 7 grego. A escala cromática trazia um problema quando se precisava executar uma música em diferentes oitavas, tendo que refinar o instrumento em cada mudança de oitava, pois não havia o encaixe perfeito como citado anteriormente. Com o intuito de encontrar uma solução, o matemático e físico Simon Stevin(1548- 1620) criou o **temperamento.**

O temperamento é um ajuste feito na escala cromática para que as notas tenham a mesma distância e encaixem perfeitamente no ciclo de oitavas. Para tanto ele saiu do universo dos números racionais e passou a trabalhar no universo irracional. Fazendo-se os 12 semitons equidistantes foi possível fechar o ciclo de oitavas com esses 12 intervalos. O processo consiste em uma leve “desafinação” das notas sem que houvesse prejuízo na execução das músicas. A ideia baseia-se em criar um semitom cuja frequência, quando elevado a 12 fosse igual a uma oitava, ou seja,

$$f^{12} = 2$$
$$f = \sqrt[12]{2} \text{ (Irracional)}$$
$$f \cong 1,059463.$$

Comparando a escala Temperada com a Pitagórica encontramos,

Semitom Temperado

$f \cong 1{,}059463$

Semitom Pitagórico

$f = \frac{256}{243} = 1{,}053497$

Quinta Justa Temperada

$f = \sqrt[12]{2^7} \cong 1{,}4983$

Quinta Justa Pitagórica

$f = \frac{3}{2}\, fo = 1{,}5\, fo$

A tabela abaixo faz um comparativo das diferenças entre as escalas, podendo assim perceber uma leve diferença entre as frequências das notas na escala Pitagórica e na escala Temperada.

Notas	Pitagórica	Temperada
DÓ$_1$	1	1
DÓ$_1$#	1,068	1,0594
RÉ$_1$	1,125	1,1224
RÉ$_1$#	1,185	1,1892
MI$_1$	1,265	1,2599
FÁ$_1$	1,333	1,3348
FÁ$_1$#	1,424	1,4142
SOL$_1$	1,5	1,4982
SOL$_1$#	1,601	1,5873
LÁ$_1$	1,687	1,6817
LÁ$_1$#	1,777	1,7817
SI$_1$	1,898	1,8877
DÓ$_2$	2	2

Foi o alemão Johann Sebastian Bach quem de forma brilhante compôs a obra que mudaria na época a cara da música europeia. Com grande influência barroca, em 1722, Bach compilou algumas de suas obras e lançou “O cravo bem temperado”, que utiliza exatamente a escala temperada na sua composição.

Problema da divisão do tom e a solução de Erasmos Horicius

Um problema que confundiu os teóricos musicais da Antigüidade até o Renascimento e que desempenhou um papel importante no processo histórico que levou à emergência do temperamento igual, trata-se da divisão numérica igual e proporcional do intervalo de tom inteiro soando entre cordas com razão de comprimento 9 para 8.

O problema da divisão do tom surgiu da descoberta pitagórica da indivisibilidade numérica de uma razão superparticular ou epimórica, isto é, n: n+1, por meio de sua média geométrica, em particular, aplicável à divisão da razão 9:8. Dado A < x < B, onde A e B são inteiros e a razão A:B é superparticular, x não pode ser ao mesmo tempo inteiro e cumprir a condição A:x=x:B, ou seja, ser a média geométrica de A e B. Matematicamente, a divisão igual do tom 8:9 fornece razões envolvendo surdos ou razões incomensuráveis subjacentes a intervalos musicais. Estes procedimentos eram considerados impossíveis em música teórica, uma vez que tais intervalos poderiam ser determinados somente por razões de números inteiros.

Em seu *Musica*, Erasmus Horicius fez uso de um procedimento numérico abstrato para propor a solução do problema da divisão igual do tom, expressando como número a média geométrica entre os termos da razão 9:8 subjacente ao tom.

No décimo sétimo capítulo do livro VI, Erasmus refere- -se especificamente à divisão da razão 9:8, o que representa o intervalo musical de um tom inteiro. Nos quatro capítulos anteriores do livro VI, Erasmus demonstrou de forma incompleta a divisibilidade em partes iguais de outras razões superparticulares e proporcionais, tais como a oitava (2:1), a quarta (4:3), a quinta (3:2) e terça menor (6:5)

Nesta passagem, Erasmus propôs um procedimento numérico abstrato para encontrar a média geométrica entre os termos da razão 9:8 subjacente ao tom, expressando-a como um número. Ele não utilizou a construção geométrica da média proporcional entre dois segmentos da proposição 13 do Livro VI de Euclides, como fez, por exemplo, Jacques Lefèvre d’ Etaples em 1496, por meio de métodos euclidianos exclusivamente não numéricos realizáveis com régua e compasso. Ao invés disso, Erasmus tentou chegar a uma expressão para a razão subjacente às metades supostamente igualmente proporcionais do intervalo de tom inteiro fazendo uso de números muito grandes. Ele realizou tal procedimento usando primeiramente a proposição 15 do livro V de “Os Elementos”, que afirma que a:b :: am:bm. Seguindo este método, a metade da razão 9:8 do tom poderia ser obtida pela média geométrica da sua expansão nos termos 34828517376:30958682112. Tal razão era derivada diretamente da razão 9:8, multiplicando seu numerador e seu denominador pelo fator 3869835264 , ou seja, ele aplicou a proposição 15 do livro V para a = 9 , b = 8 e m = 3869835264. A proporcionalidade entre 9:8 e 34828517376:30958682112 permite um mapeamento entre qualquer termo intermediário da razão 9:8, incluindo a média e sua expansão em uma razão de números grandes, considerando que o último é muito mais subdivisível. Uma vez que não havia frações decimais neste período, a razão proporcional estendida foi utilizada com a finalidade de extrair a raiz quadrada com um elevado grau de precisão, no caso, associada 126 com grandes números inteiros em vez de casas após o ponto decimal.

É plausível que se Erasmus realmente pensou que poderia dividir a razão sesquioitava em termos de uma operação puramente numérica, ele deve ter concebido pelo menos um conceito rudimentar de número continuo. Tal afirmação é corroborada por uma passagem posterior no capítulo 17, onde ele parece se referir diretamente à ideia de tal continuum, mencionando Boécio como um prisioneiro da doutrina pitagórica de número inteiro discreto não acessando todas as razões de números (ERASMUS HORICIUS, fo. 67v). Logo antes desta passagem, 127 Erasmus afirma que a metade exata do intervalo de tom inteiro seria fornecida pela extração da raiz quadrada do produto de seus termos 8 e 9, que é a raiz quadrada de 72 (ERASMUS HORICIUS, fo. 67v). Mas ele não relaciona explicitamente este resultado com os cálculos por ele apresentados

Relações com a música e o cosmos

No experimento de Pitágoras, que ligava proporções espaciais com harmonias sonoras, a mente grega viu muito mais do que uma mera coincidência. Pensaram que poderiam encontrar base matemática para a religião e moralidade. Então, a descoberta de Pitágoras, validada para todas as coisas se estenderia aos confins dos cosmos.

Complexificando a doutrina do mestre, a Escola Pitagórica sustentou que, assim como os intervalos de som, os movimentos dos astros se reduzem a relações numéricas. É daqui o termo "harmonia das esferas"; ou mais diretamente **"música das esferas".**

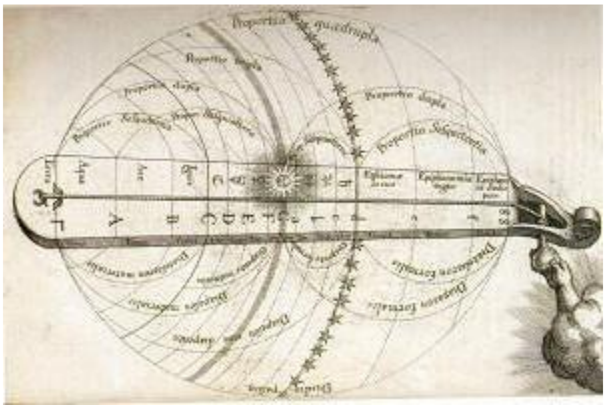
Música das Esferas

A ciência moderna já desvendou o suficiente da sabedoria de Pitágoras e outros mestres para afirmar que toda luz, toda cor, todo som, e cada forma na Natureza é dependente e determinada por diferentes vibrações. O feitio de cada ser vivo, a cristalização de cada floco de neve assim como cada substância física, os veios das folhas, o pincel e a fragrância de cada flor, não menos do que as formas de pensamento e o toque sutil das emoções humanas, são todos dependentes dessas vibrações. Todos eles obedecem às leis da harmonia e pertencem à **Música das Esferas**. Mais que isso, cada átomo da matéria no Universo está estabelecido nesta música. Quer esteja dançando na luz ou imergindo nos profundos e escuros buracos da Terra, cada um deles faz parte do diapasão universal da natureza. Para o Universo não há morte, mas literalmente o respirar e pulsar da vida, e a lei dessa vida é a **harmonia**.

Teoria do divino monocórdio

Robert Fludd (1574 – 1637), filósofo inglês, (um dos maiores expoentes na explanação das harmonias musicais; que juntamente a Pitágoras e Keppler praticamente cunha o termo "Música das Esferas") ilustra um instrumento de uma só corda que faz a ponte entre o céu e a terra, e que dispõe os astros segundo regras da harmonia musical. Em torno do instrumento há inúmeros semi-círculos onde estão inscritas as várias forças da natureza. A nota de cada planeta é associada a uma divisão da corda do monocórdio. De uma nuvem sai uma mão que aperta a cravelha do instrumento elevando as frequências à medida que aperta a corda. O som associado a cada planeta será tão mais agudo quanto mais distante estiver da terra.

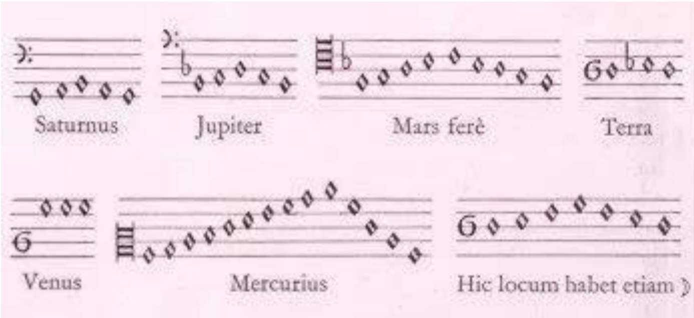
Se existisse um monocórdico cósmico gerador de todas as vibrações possíveis, ouviríamos frequências que se misturavam com microondas, ondas de televisão, rádio, etc.



Kepler e a música das esferas

Kepler foi um grande filósofo que reforçou a teoria das esferas, ele falou sobre a capacidade que os planetas possuem de produzir sons a partir de suas leis. A partir das 1ª e 2ª leis, Kepler concluiu que o movimento dos planetas não tem velocidade constante. A primeira observação a fazer era a de que, tendo o planeta velocidade variável, não emitia uma nota única, sendo a nota mais aguda (quando está em maior velocidade) atingida no periélio e a mais grave no afélio (em velocidade menor).

Kepler deduziu os intervalos musicais produzidos por cada planeta. Para ele, a melodia produzida por cada planeta não era uma sequência de notas distintas, mas sim um único som eterno, a variar continuamente entre o mais grave e o mais agudo.



A partir da 3ª lei, podia relacionar os sons produzidos pelos diversos planetas. Concluindo que os planetas mais longínquos eram mais lentos, ele entendeu que os sons produzidos seriam mais graves à medida que a distância ao Sol aumentava.

Kepler efetuou cálculos com o objetivo de calcular, para cada planeta, o comprimento de arco percorrido num período de 24 horas no afélio e no periélio. Ele deduziu que Saturno percorre um arco de 135 segundos por dia quando está mais perto do Sol e um arco de 106 segundos por dia quando está mais afastado do Sol. A razão 135/106 está muito próxima de 5/4, a razão entre as frequências associadas ao intervalo de terceira maior em música.

Usando este método para todos os planetas, ele descobriu que as razões periélio-afélio relacionadas com quaisquer dos seis planetas são todas muito semelhantes às razões associadas a intervalos musicais consonantes. Assim, para Júpiter a razão periélio-afélio seria aproximadamente 6/5 (uma terceira menor); para Marte seria 3/2, uma quinta perfeita; para a Terra, 16/15, um meio–tom; para Vénus, 25/24, um intervalo muito próximo da coma pitagórica; para Mercúrio, 12/5, uma décima menor.

O fim da música das esferas

O Século XVII representa uma transição crítica na história do pensamento do homem, pois marca o momento da separação entre fé e dogma religioso por um lado, e a visão mecanicista da natureza por outro.

Fludd (1574-1637) e Kepler (1571-1630) parecem ter sido os últimos a propor uma relação real entre movimentos dos planetas e notas musicais específicas. Por outro lado, o mesmo Kepler que parecia estar a perder o seu tempo em busca da quimera da música das esferas, deve ter sido o primeiro a respeitar rigorosamente dados de observações, apesar de contradizerem uma sua primeira teoria. Afinal foi em busca dessa quimera que ele deduziu as suas três leis.

Algum tempo depois, Newton (1642-1727) mostrava ao mundo que leis matemáticas universais relativamente simples presidem a natureza, podendo mesmo deduzir a partir delas as leis que Kepler tinha encontrado empiricamente. Era o nascimento do pensamento científico, tal como hoje o conhecemos.

Confirmação da música das esferas

Um satélite da Nasa confirmou a antiga tradição sobre a música das esferas, os corpos celestes emitem sons harmônicos, conceito de harmonia universal e da sua simetria. Foi descoberto que a atmosfera do Sol, emite ultra-sons e interpreta uma partitura composta de ondas aproximadamente 300 vezes maior do que o ouvido humano pode captar. O cosmos, é portanto, um sistema que integra as sete notas musicais com os sete então conhecidos corpos celestes (Sol Lua, e cinco planetas visíveis).