UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT0341 - História da Matemática

Geometria no Egito

Andressa Bueno Nº USP 9365682
Jefferson Neves Nº USP 9301072
Liana Yoshikawa Nº USP 9299445
Marize Tiyoda Nº USP 9365803
Melissa Tanaka Nº USP 9366119

São Paulo, 2018

Sumário

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo central apresentar ao leitor os principais aspectos da Matemática no Egito e o seu desenvolvimento. Será abordado o contexto histórico no qual surgiu a necessidade em utilizar recursos matemáticos, e seus motivos; o intercâmbio de troca de informações que o Egito teve com outros países como a Grécia e a Babilônia, analisando diferenças geográficas, comportamentais e matemáticas; e o legado dos Papiros e algumas de suas demonstrações matemáticas. Também será mencionado a numeração do Egito, e sua escrita hieroglífica.

2. Contexto Histórico

A civilização egípcia se desenvolveu aos arredores do fértil Rio Nilo, e foi o aumento da população que impulsionou o desenvolvimento da agricultura e a necessidade de dividir as terras, o que foi um estímulo para o desenvolvimento matemático na época.

Os itens mais antigos relacionados à matemática datam de cerca de 3000 a.c.. Fazem parte desta lista um cetro real egípcio, onde estão gravados alguns números da ordem de centenas de milhares e milhões, que seria o resultado superestimado de uma vitoriosa campanha militar; a Grande Pirâmide de Gizé, a maior do Egito, que por sua estrutura grandiosa e suposta logística na construção da mesma, pressupõe-se uma perícia profunda na arte da engenharia; o Papiro de Moscou, onde está o exemplo geométrico mais importante da época, o mais antigo instrumento astronômico existente; o Papiro Rhind, uma fonte primária muito rica sobre a matemática egípcia; o material do maior obelisco existente, o mais antigo relógio de Sol existente, o Papiro Rollin e o Papiro Harris.

As pirâmides, tumbas e templos eram construídas como sinal de veneração pelos mortos. Estes lugares são de extrema importância para a preservação da história da civilização egípcia, pois neles os egípcios gravavam ricas inscrições sobre a história da época, como seus costumes, problemas e histórias de vida. Outro fator importante para a preservação dos documentos era o clima extremamente seco da região, o que conservou os papiros em bom estado.

Com tais descobrimentos históricos, e a motivação para o desenvolvimento matemático, evidenciou-se o caráter procedimental na resolução de problemas. Nos papiros era encontrado exclusivamente um passo a passo de como resolver alguns problemas que envolviam a matemática em situações como a construção das pirâmides, armazenamento, comércio de grão e divisão de terras.

3. Grécia e Egito

Dada a riqueza natural do Egito, como o Rio Nilo, a necessidade dos egípcios em utilizarem recursos matemáticos era centralizada em buscar soluções de problemas corriqueiros, sem muitas preocupações com a teoria matemática. Acontece que na Grécia ocorre o oposto.

Na Grécia, estes destacam a importância em compreender a teoria matemática, mais especificamente a lógica. Um dos motivos por isso acontecer se dá pela região geográfica e em sua divisão entre a população: 80% da Grécia é formada por montanhas, facilitando a divisão do povo em Cidades-Estados. Logo, estas cidades desenvolveram sistemas próprios de Governo, leis, moeda e calendário. Isso favoreceu na competição entre si.

Assim o aparente isolamento geográfico e a competição entre as cidades vizinhas subsidiaram a necessidade em compreender a realidade externa a que conheciam, surgindo questionamentos e o berço da tão conhecida filosofia grega. Os gregos então tornaram a Matemática para si como um dos principais pilares do conhecimento, tendo uma visão de empoderamento do saber pela sobrevivência e valorizando também o intercâmbio de conhecimentos com os povos do exterior por meio do comércio.

4. Babilônia e Egito

Assim como o Egito, a Babilônia contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática e devemos muito a eles por isso. Ambas as civilizações datam do Oriente Antigo, época na qual o desenvolvimento da matemática foi necessário para acompanhar a evolução da sociedade. Essa última, viam a matemática, inicialmente, como uma ciência prática, ou seja, não haviam demonstrações, apenas descrições de um processo, o famoso “faça assim e assim”.

Para escrever, os babilônios usavam tábulas de argila cozida, que consistia de um material duradouro assim como os papiros dos egípcios. Isso foi fundamental para a preservação da matemática dos séculos pré-helênicos e hoje dispomos de muitas informações sobre a época.

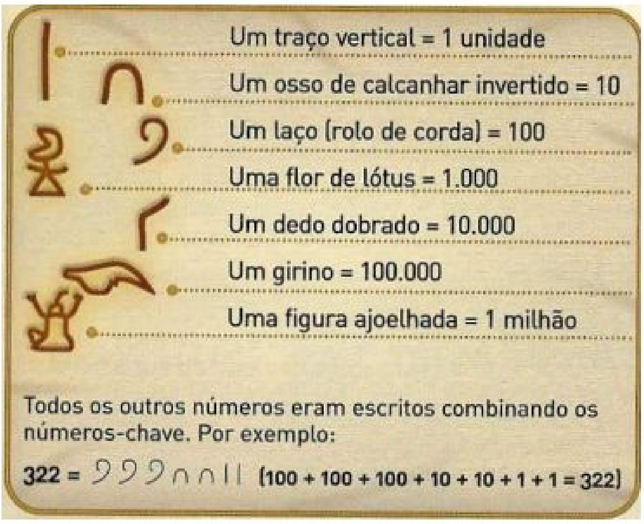
Contudo, a matemática babilônica fora mais desenvolvida do que a matemática no Egito. Isso se deve ao fato de que a Babilônia era aberta a invasões de povos vizinhos e se localizava em uma região que era rota de grandes caravanas, ao contrário do Egito, que se manteve em semi-isolamento. Outro fato relevante se dá pela necessidade de obras de engenharia e esforços de administração nos rios Tigres e Eufrates, ao passo de que o Egito dispunha do sereno rio Nilo.

Porém, por muito tempo, devido o trabalho e a demora para decifrar todas as tábulas matemáticas babilônicas (cerca de 400 tábulas), o Egito foi considerado a civilização com mais campo de pesquisas históricas sobre a Antiguidade. Um motivo bastante pertinente é o fato de muitos documentos estarem dentro de templos, o que foi importante para conservação destes.

5. Números e operações

Os egípcios utilizavam um sistema de numeração não-posicional no qual os representantes numéricos eram o que conhecemos como hieróglifos. Este, por sua vez, são símbolos que representam as 6 primeiras potências de 10 (Figura 1).

Figura 1



A priori, esse povo tinha como principal operação a soma e dela derivou as outras operações (multiplicação e divisão). A multiplicação, por exemplo, de 2*4 era resolvida fazendo 2+2+2+2. Em torno de 3100 a.c. os egípcios já estavam utilizando um método para multiplicação diferente. Estudiosos da época perceberam que todo número pode ser escrito como a soma de potências de 2. Então para fazer uma multiplicação, por exemplo, de 12*27, escreve-se uma coluna com as potências de 2 até que a soma seja 27 (1 + 2 + 8 + 16). Depois escreve-se uma coluna à direita da outra de forma que fique 2a x 12. Segue abaixo como fica a conta armada:

‘1	12
‘2	24
4	48
‘8	96
‘16	192
27	324

Depois, soma-se os elementos da coluna da direita que correspondem a potência de 2 utilizada para chegar no 27. Ou seja, soma-se os números 12 + 24 + 96 + 192 = 324 que é o resultado da multiplicação de 12 por 27.

Por conta das cheias do rio Nilo, os egípcios precisavam medir o terreno perdido pela cheia e nem sempre cabia um inteiro dentro da medição, então passaram a usar o que conhecemos como fração. A fração mais utilizada era a ⅔. Com a utilização desses números, desenvolveram um modo de decomposição de fração em soma de frações unitárias (numerador igual a 1). No Papiro de Rhind, foi encontrado uma tabela de decomposição em frações unitárias das frações ⅖, 2/6, 2/7, …, 2/101. Também foi constatado que frações do tipo 2/3k era representada pela soma (1/2k) + (1/6k) e E frações do tipo 2/5k era representada pela soma (1/3k) + (1/5k), exceto a fração 2/95 que aparece decomposta na forma (1/60) + (1/380) + (1/570). Assim como os números inteiros, as frações também eram escritas com hieróglifos. Eles utilizavam um símbolo semelhante a uma silhueta de um olho para mostrar que é uma fração, como mostra as figuras 2 e 3.

Figura 2 : Símbolo para sinalizar fração

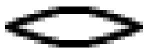
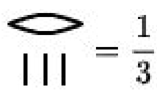
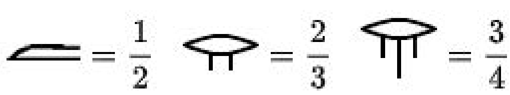


Figura 3: Fração ⅓

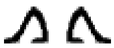


Algumas frações tinham símbolos especiais para ½ e frações não unitárias, como as figuras 4.

Figura 4: Frações não unitárias e ½



Os egípcios também utilizavam símbolos para indicar a operação de soma. Em sua escrita, utilizavam hieróglifos semelhantes a pés, se estivessem apontados no sentido da escrita, é adição, caso contrário, subtração.

Figura 5 

É interessante perceber que nas culturas antigas, a matemática definiu uma parte da cultura em si (modo de comunicação, desenvolvimento...) não só apenas algo para auxiliar ou uma ferramenta, a forma que pensaram a matemática, fez com que se desenvolvessem modos de vida, melhoria na sociedade e no comércio.

6. Como era a geometria no Egito

Como dito no contexto histórico, o desenvolvimento matemático no egito era estimulado por problemas cotidianos, então muitos processos geométricos envolviam cálculo de volume de grãos, necessário para o comércio e a agricultura, cálculo da inclinação da face lateral e do volume do tronco da pirâmide e cálculo das áreas das terras para a divisão de território.

Foi constatado que, dos 110 problemas presentes no Papiro de Rhind, 26 eram de geometria, entre estes está o procedimento de como obter a área de uma circunferência de diâmetro 9, como será mencionado com mais detalhes no tópico sobre o próprio Papiro.

A partir da área da circunferência, os egípcios calcularam o volume de um cilindro reto como o produto da área da base pelo comprimento da altura. Acreditamos que este procedimento era necessário para o comércio e estoque de grãos.

Algumas investigações recentes indicam que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura, e ainda relacionado com essa forma geométrica, eles utilizavam o triângulo 3, 4, 5 para construir ângulos retos. Tal triângulo era construído a partir de uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós. Apesar do conhecimento sobre este triângulo, conhecido popularmente por “Triângulo Pitagórico”, não há indícios de que os egípcios tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras e nem que o utilizavam de alguma forma.

Há problemas no Papiro de Rhind, em que se fala do *seqt* da pirâmide, que era a medida da inclinação da pirâmide. Era utilizada a razão entre o “percurso” e a “elevação” da pirâmide, onde a unidade vertical, que seria a elevação, era chamada “cúbito” e a horizontal, que seria o percurso, era chamada de “mão”, cada cúbito valia 7 mãos. Este cálculo era feito utilizando, de forma implícita, a cotangente do ângulo diedro formado pela base e a face da pirâmide multiplicado por 7.

Dentre todas as descobertas geométricas do Egito, a mais importante e surpreendente, foi encontrada no Papiro Moscou. É o Problema 14 que mostra um exemplo correto da fórmula do volume do tronco da pirâmide de base quadrada.

No tópico sobre o Papiro Moscou está a tradução do exemplo da fórmula do volume do tronco da pirâmide de base quadrada, evidenciando a linguagem procedimental da resolução dos problemas egípcios

Diferente da geometria desenvolvida pelos gregos, os egípcios não se preocupavam em provar a veracidade das fórmulas e nem explicar por que seus procedimentos matemáticos davam certo. Havia um problema para ser resolvido e material matemático para tal e isso bastava.

7. Papiro Rhind

O Papiro Rhind foi um documento egípcio datado em 1650 a.C, copiado com a escrita hieroglífica pelo escriba Ahmes e comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind por volta de 1850 a.C. em Luxor, no Egito. Atualmente esse papiro faz parte do Museu Britânico localizado em Londres.

Foi um dos documentos mais importantes para a matemática egípcia, contendo 85 problemas envolvendo aritmética e geometria como: o uso de frações, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica, medir áreas de triângulos, trapézios e retângulos, calcular volumes de cilindros e prismas, etc e com suas respectivas soluções. Esses problemas surgiram por conta do cotidiano da época, era procurado soluções como alguma fórmula ou método para resolver os assuntos como: o preço do pão, armazenamento dos grãos de trigo, alimentação do gado entre outros problemas ligados a agricultura e comércio.

Imagem com parte dos problemas 41 a 46 expostos no papiro

Iremos apresentar um dos problemas do papiro com algumas soluções.

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?"

Houve várias soluções. Apresentaremos algumas delas:

1º Explicação

Sabendo que o diâmetro é denotado como d.
Remova 1/9 e assim restasse 8, multiplicando o 8 por 8 satisfaz o valor de sua área 64."Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área."

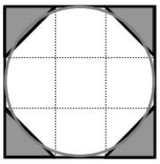
Resumindo:

$A = (d - d/9)^2 = [(8/9)d]^2$, onde **d** é o diâmetro da circunferência.

Isto leva a seguinte aproximação para π, com um erro de apenas 0,0189.

$$\pi(d/2)^2 = [(8/9)d]^2 = 4(8/9)^2 = 3,160493$$

2º Explicação



Essa figura representa um círculo dentro de um quadrado, é possível observar algumas regiões do octógono exteriores. A área do círculo parece com a área exterior do octógono. Então, isso leva a concluir que a área do círculo e a do octógono são semelhantes e o diâmetro do círculo igual ao lado do quadrado. Temos:

$$A = d^2 - 2(d/3)^2 = 7/9d^2 = 63/81d^2 \cong 64/81d^2 = (8/9d)^2$$

3º Explicação

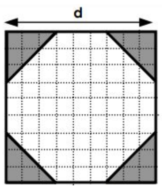


Figura a

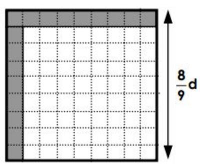


Figura b

Observando a figura a podemos ver que há um octógono inscrito a um quadrado e há quatro triângulos hachurados, isso corresponde que a área do octógono é igual a área do quadrado menos os quadrado triângulos hachurados.

Os triângulos hachurados podem ser recomposto em um quadrado (junção de dois triângulos), com a área do quadrado forma-se em um retângulo de mesma área, e então obtemos a figura b uma quadrado com dois retângulos hachurados. Assim, a área do octógono é igual:

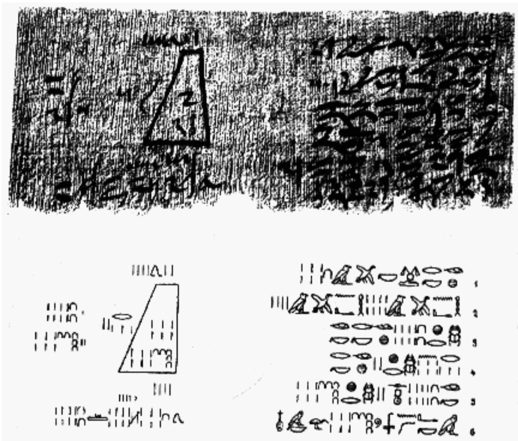
$$A = (8/9d)^2 - (1/9d)^2 = (8/9d)^2 - (1/81d) \cong (8/9d)^2$$

8. Papiro Moscou

O Papiro Moscou é considerado o segundo papiro mais importante da época e ele é um pouco mais antigo que o Papiro de Rhind, foi escrito com menos cuidado comparado a obra de Ahmes por um escriba desconhecido cerca de 1850 a.C.

Esse papiro tem quase o comprimento do Rhind mas só um quarto de largura. Foi comprado por V.S.Golenishchev em 1893. Atualmente se encontra no Museu das Finas Artes em Moscou.

Esse documento contém 25 problemas e contém a fórmula do volume do tronco de uma pirâmide.



14 problema do Papiro Moscou, o problema
do volume de um tronco de pirâmide quadrada

Temos essa imagem acima sobre o 14 problema do Papiro Moscou, e logo abaixo pelo livro do Eves, a citação de uma forma adaptada.

"Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente."

$$V_T = \frac{1}{3}H(A + \sqrt{A \cdot A'} + A')$$

Podemos ver que os problemas escritos sobre geometria nos papiros refere-se a problemas de volumes e áreas de figuras planas. Calculava-se as áreas de retângulos, triângulos e trapézio com precisão pelo método de decomposição e recomposição de figuras; obtiveram valores aproximados para π, englobaram métodos para o cálculo de volume de pirâmide, do cilindro e talvez a área de um hemisfério. Eles utilizavam o método usual de hoje: produto da área da base pela altura para determinar o volume de um bloco retangular ou paralelepípedo. Assim, determinavam a capacidade dos recipientes cilíndricos. E isso é mostrado nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do Papiro Rhind.

9. Outros papiros

Os papiros Rhind e Moscou foram muito importantes para o desenvolvimento da matemática. Além deles, há outros papiros com conteúdos matemáticos do Egito Antigo.

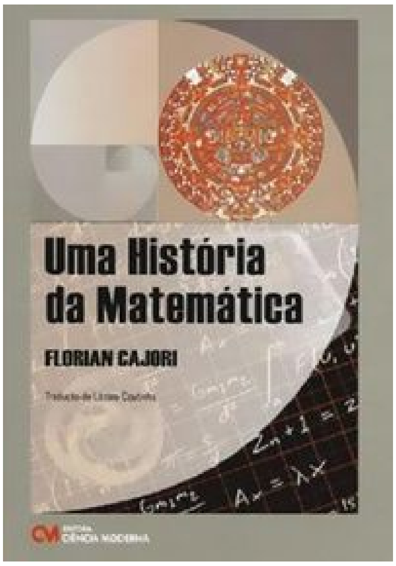
O papiro Rollin, escrita há cerca de 1350 a.C. mostra a utilização prática de números grandes na época, contendo algumas enumerações de alimentos. O documento agora é patrimônio do Museu do Louvre.

Papiro Harris, datada em 1167 a.C. foi elaborada por Ramsés IV quando subiu ao trono. Nele, há relatos de grandes obras de seu pai Ramsés III, além da listagem das riquezas dos templos. Isso fornece um dos melhores exemplos de enumerações práticas na época.

O papiro matemático Cairo que data de 300 a.C., foi desenterrado em 1938. Contém quarenta problemas de matemática, com nove sendo exclusivamente sobre o teorema de Pitágoras. Com isso, mostra que os egípcios não apenas sabiam que o triângulo 3, 4, 5 era retângulo mas que 5, 12, 13 e 20, 21, 29 também eram.

10. Contradições

O livro "Uma história da matemática" de Florian Cajori cita que o primeiro antigo manual de matemática conhecido era o Papiro Rhind no ano 1700 a.C. Além disso, não relata sobre o Papiro Moscou.



11. Conclusão

Para finalizar, com os tópicos relatados neste trabalho pode-se concluir quão rica e ampla é a civilização egípcia, e como seu cotidiano e modo de vida contribuiu para o surgimento e utilização da matemática.

Importante também destacar que, embora utilizassem a matemática procedimentalmente, sem buscar a necessidade de provar ou demonstrar o que foi feito, seu conhecimento e contribuição para a evolução matemática não deve ser menosprezado. Todos os procedimentos por eles desenvolvidos e utilizados, principalmente na área da geometria com o cálculo correto do volume do tronco da pirâmide, foram de muita importância para o impulso matemático em outras civilizações, como a Grega. Há até rumores sobre Pitágora ter aprendido geometria com os egípcios.

O legado deixado pelos egípcios pelos papiros e monumentos é enorme e fascinante. Podemos concluir que em meio a monumentos, jóias e itens preciosos tão almejados por exploradores das pirâmides do Egito, o maior legado que essa civilização deixou para nós foi sua vasta história e conhecimento, o bem mais precioso que poderíamos obter.

12. Bibliografia

http://matematica-na-veia.blogspot.com/2011/06/o-segredo-do-papiro-de-rhind.html

http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/GD5_Juliana_martins.pdf

http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf

https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/9228/6847

http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html

Beck, Vinicius Carvalho. A matemática no Egito Antigo

http://www.matematica.br/historia/multdiveg.html

Howard Eves. Introdução à história da matemática.