PEF2602

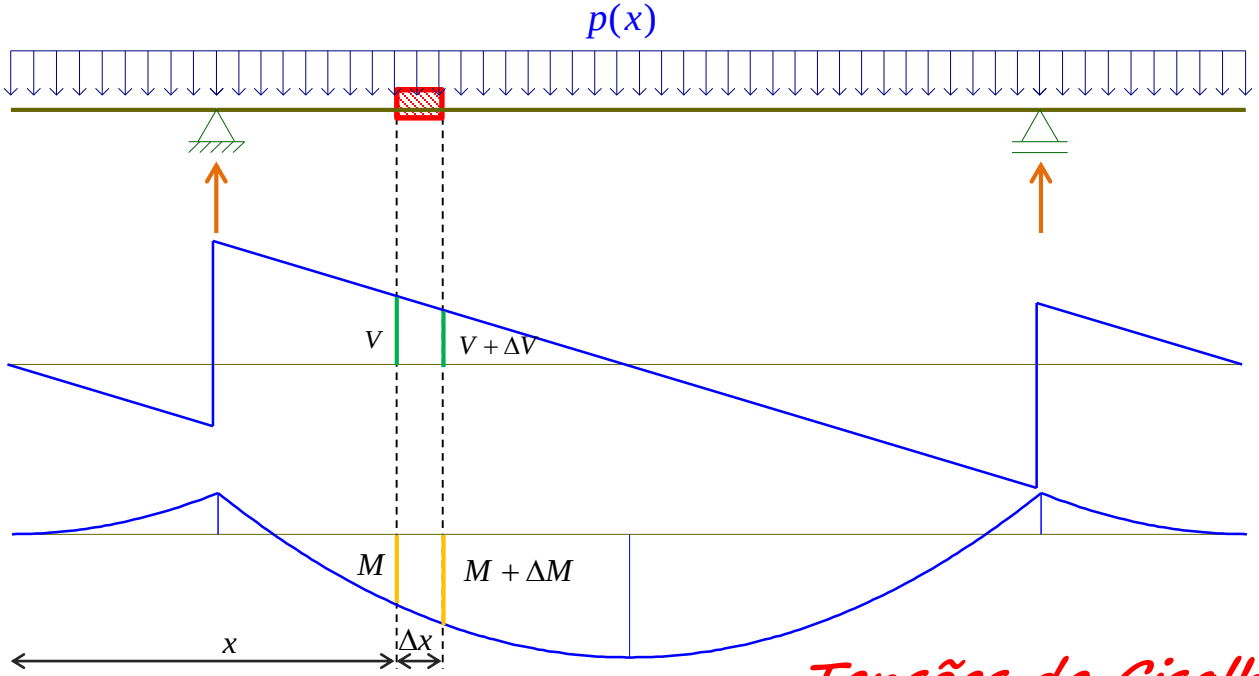
Estruturas na Arquitetura II -
Sistemas Reticulados

Cisalhamento na Flexão

(12/11/2018)

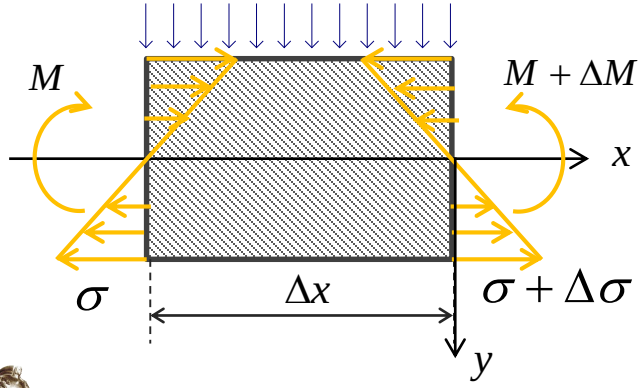
Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Cristina Meneghetti, Luís Bitencourt

TENSÕES de CISALHAMENTO na FLEXÃO



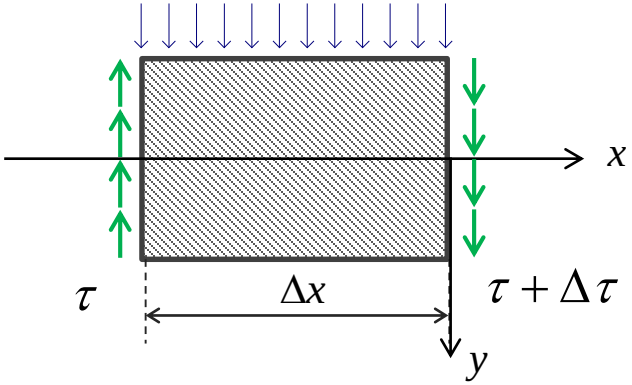
Tensões Normais

σ

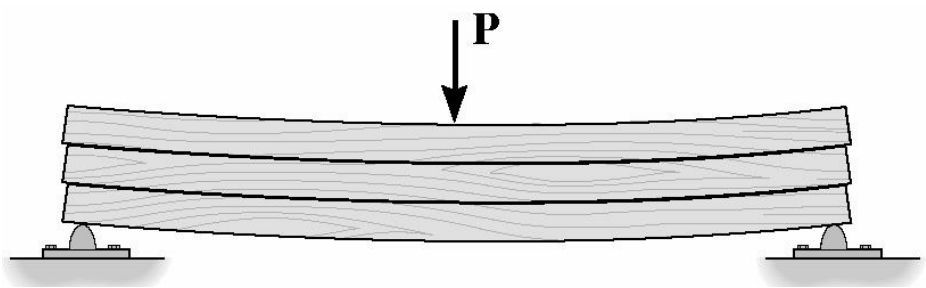


Tensões de Cisalhamento

τ

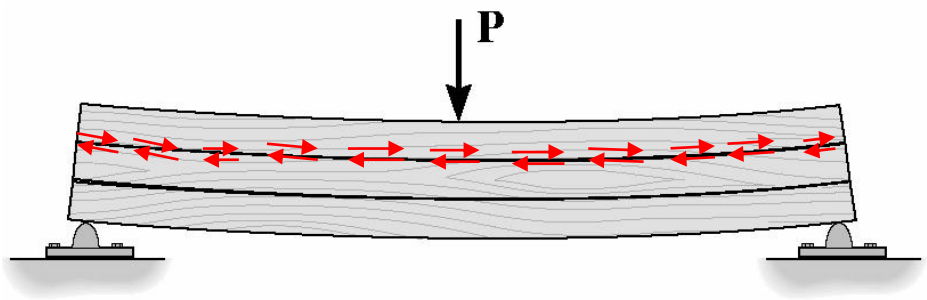


Peças de madeira simplesmente empilhadas



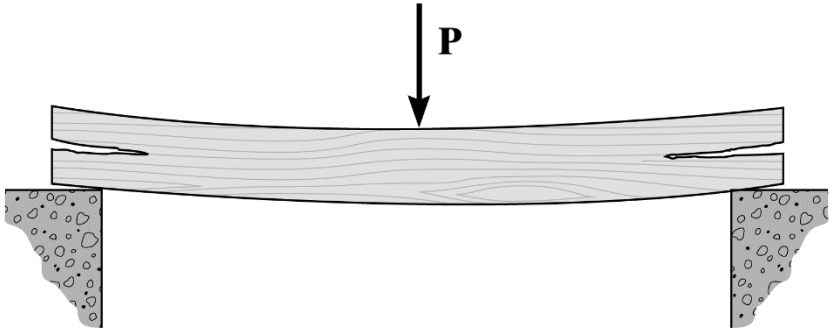
Tendência de deslizamento de uma tábua em relação à outra

Peças de madeira coladas

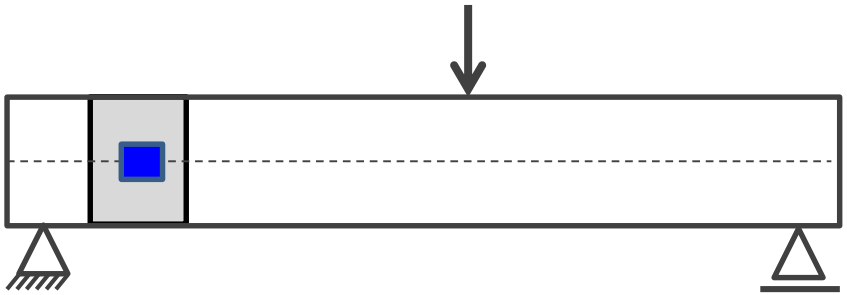


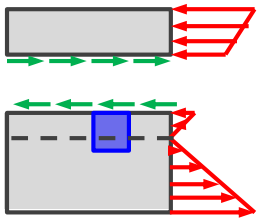
Surgimento de tensões horizontais de cisalhamento como consequência da tendência ao deslizamento

Em uma peça única....

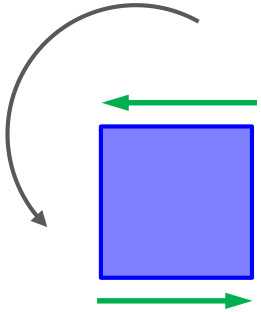


Falha típica por cisalhamento em vigas de madeira

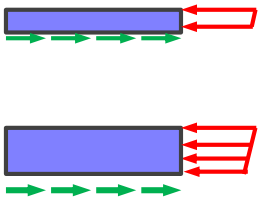




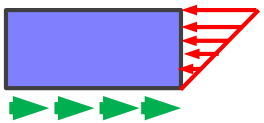
Tensões em uma porção da viga



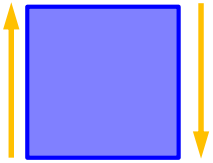
Momento produzido pelas tensões de cisalhamento horizontais



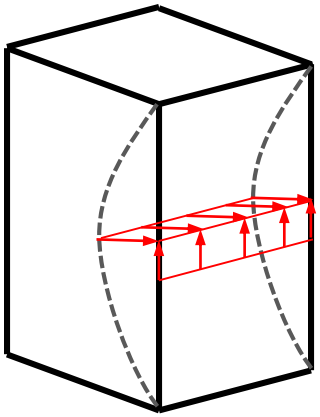
Próximo à superfície as forças horizontais são pequenas, pois se desenvolvem em uma pequena área



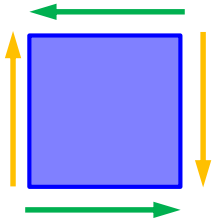
Na linha neutra, se desenvolvem as máximas forças horizontais possíveis



Momento produzido pelas tensões de cisalhamento verticais

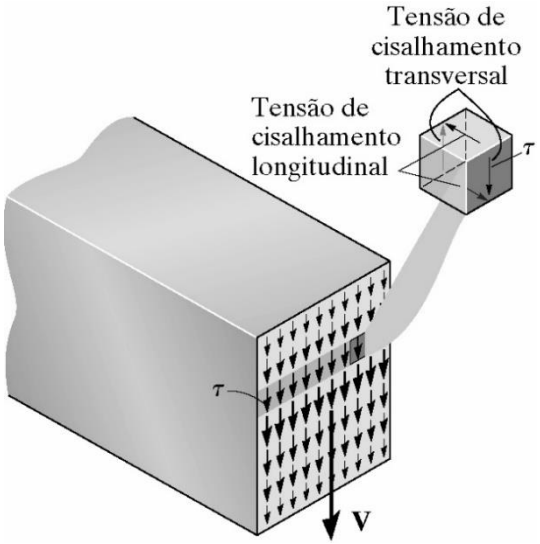


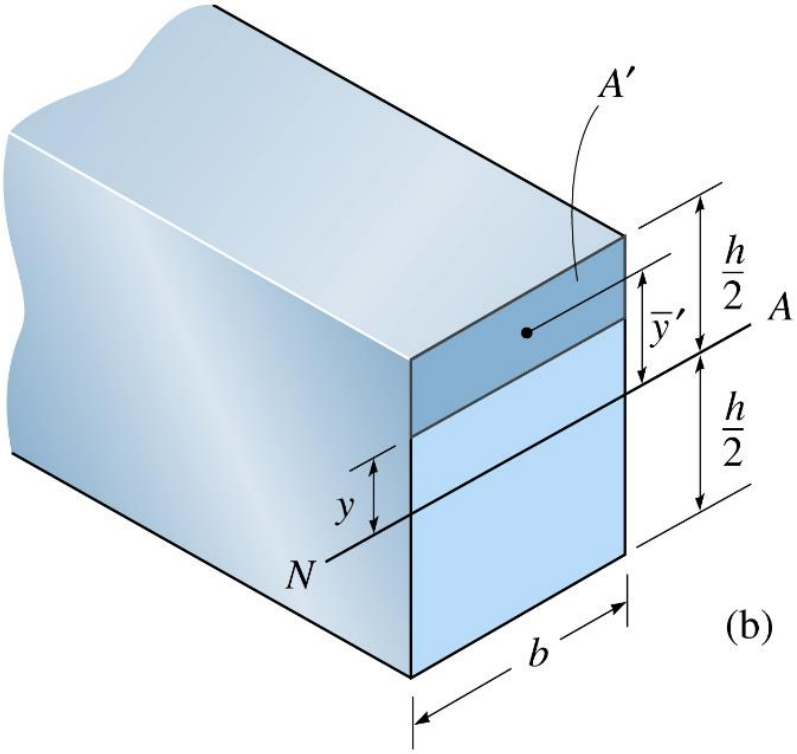
Variação das tensões em uma viga retangular



Equilíbrio de momentos

Fórmula para cálculo da tensão de cisalhamento τ





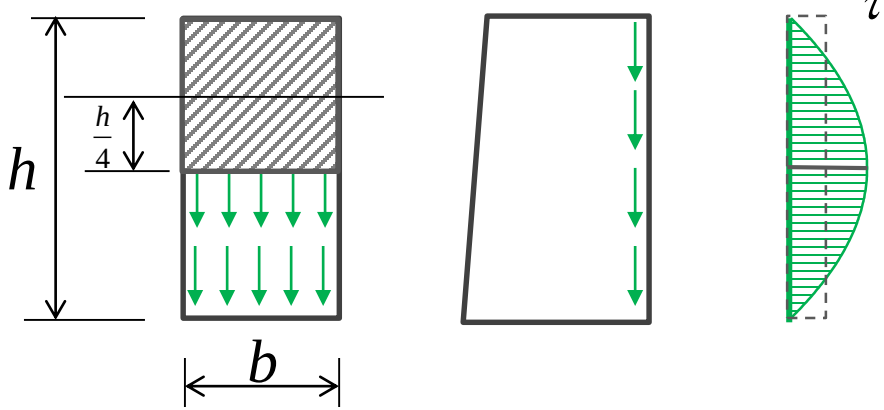
$$V = \int_{ST} \tau \, dA$$

$$\tau(y) = \frac{V\, s(y)^*}{I\, b(y)}$$

onde:
- V = esforço cortante na seção
- s^* = momento estático área A'
- I = momento de inércia
- b = base da área hachurada

$$s^* = A' \cdot \bar{y}'$$

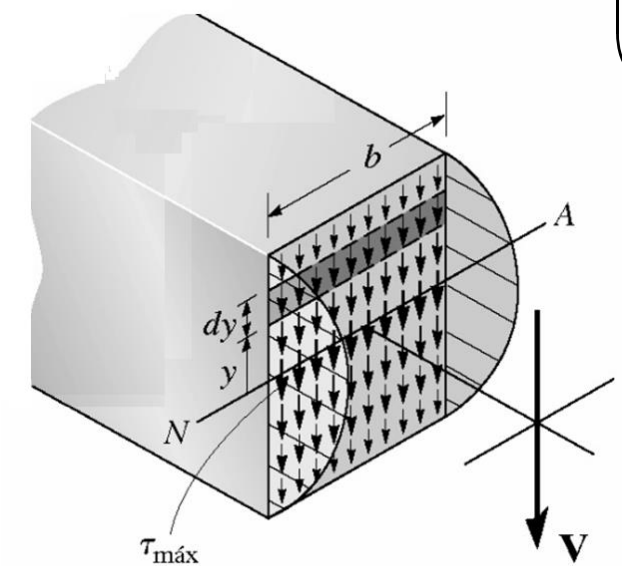
Para uma seção retangular, a distribuição de tensões é parabólica e o seu valor máximo situa-se na linha neutra.



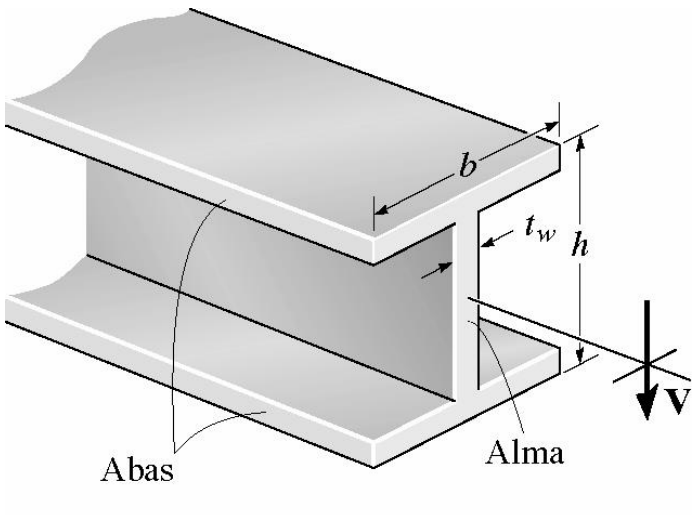
$$\bar{\tau} = \frac{V}{A}$$

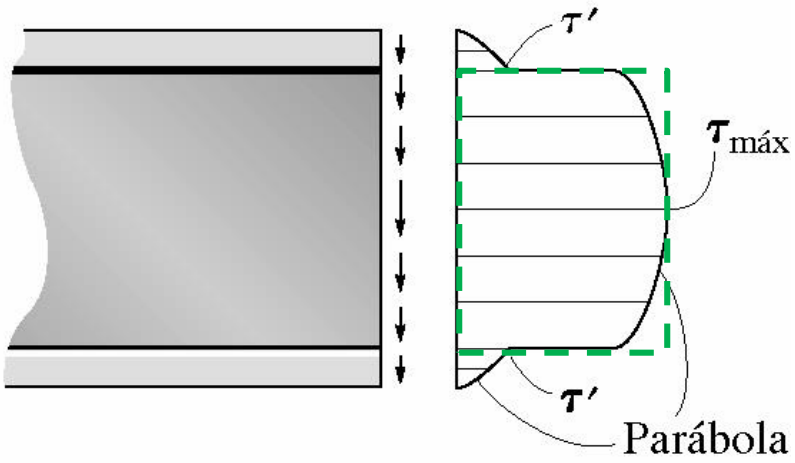
$$\tau_{\max} = 1{,}5 \cdot \bar{\tau}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Vs^*}{Ib} = \frac{V(A \cdot \bar{y})}{Ib} = \frac{V(\frac{bh}{2})(\frac{h}{4})}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)b} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A}$$



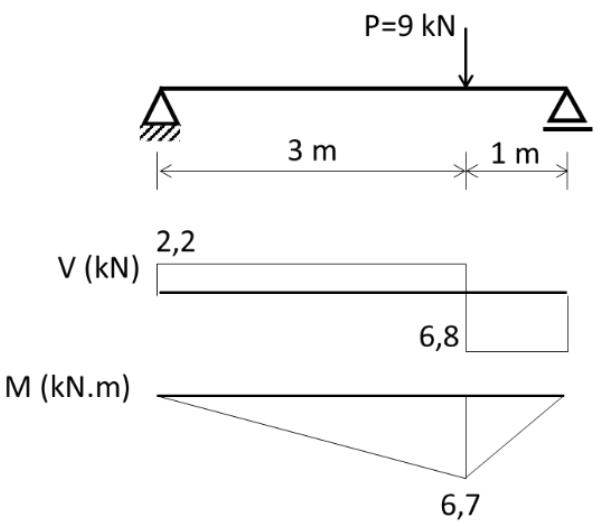
Distribuição de tensões em um perfil metálico I

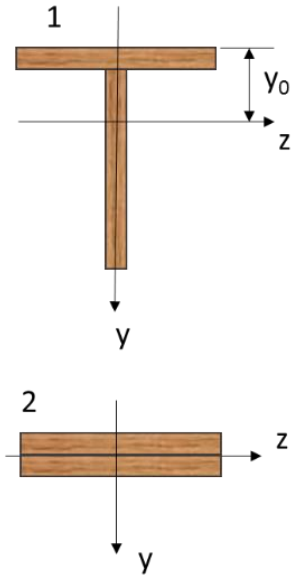




$$\tau_{\max} \cong \overline{\tau}$$

Exemplo: P2/Q3, 2015 (3,0) Uma viga bi-apoiada deve ser construída por meio da colagem de duas placas de madeira (2,5 cm x 15 cm). Os diagramas de esforços solicitantes, devido a atuação de uma carga pontual P=9kN, estão mostrados na figura abaixo. Considerando que a seção transversal da viga possa assumir duas configurações distintas, conforme pode ser visto na figura, determine as máximas tensões normais e de cisalhamento e escolha a seção mais eficiente. Determine qual a menor resistência ao cisalhamento da cola, considerando um coeficiente de segurança 2.





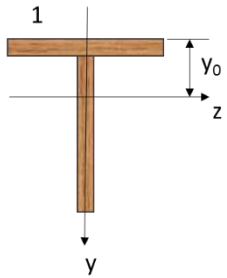
Esforços solicitantes:

$$V = 6{,}8\ kN \quad ; \quad M = 6{,}7 \times 10^2\ kNcm$$

Dimensões das placas:

$$b = 2{,}5\ cm \quad ; \quad h = 15\ cm$$

1. CONFIGURAÇÃO 1:



1.1. altura do baricentro
(desde a face superior da viga):

$$y_0 = \frac{(b \times h) \times \frac{b}{2} + (b \times h) \times \left(b + \frac{h}{2}\right)}{2 \times b \times h} = 5,625\ cm$$

1.2 Momento de Inércia:

$$I_1 = \frac{hb^3}{12} + (b \times h) \times \left(y_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{bh^3}{12} + (b \times h) \times \left(\left(b + \frac{h}{2}\right) - y_0\right)^2$$

$$I_1 = 2158,2 cm^4 = 2,1582 \times 10^{-5} m^4$$

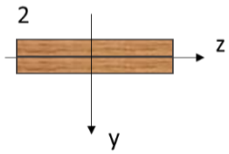
1.3 Momento estático na altura da interface: $S_1 = (b \times h) \times \left(y_0 - \frac{b}{2}\right) = 164,06 cm^3 = 1,6406 \times 10^{-4} m^3$

1.4 Tensão de cisalhamento na interface: $\tau_1 = \frac{VS_1}{bI_1} = 0,20677 kN / cm^2 = 2,0677 MPa$

1.5. Máxima tensão de compressão: $\sigma_{c,1} = -\frac{M}{I_1} y_0 = -1,7462 kN / cm^2 = -17,462 MPa$

1.6. Máxima tensão de tração: $\sigma_{t,1} = \frac{M}{I_1}(h + b - y_0) = 3,6865 kN / cm^2 = 36,42 MPa$

2. CONFIGURAÇÃO 2:



2.1. altura do baricentro
(desde a face superior da viga):

$$y_2 = b = 2,5\ cm$$

2.2 Momento de Inércia: $$I_2 = \frac{h \times (2b)^3}{12} = 156,25 cm^4 = 1,5625 \times 10^{-6} m^4$$

2.3 Momento estático na altura da interface: $$S_2 = (b \times h) \times \left(\frac{b}{2}\right) = 46,875 cm^3 = 4,6875 \times 10^{-5} m^3$$

2.4 Tensão de cisalhamento na interface: $$\tau_2 = \frac{VS_2}{hI_2} = 0,136 kN / cm^2 = 1,36 MPa$$

(Verificando: $\tau_2 = 1,5 \frac{V}{2A} = 1.5 \frac{V}{2(b \times h)} = 0,136 kN / cm^2$, $OK!$)

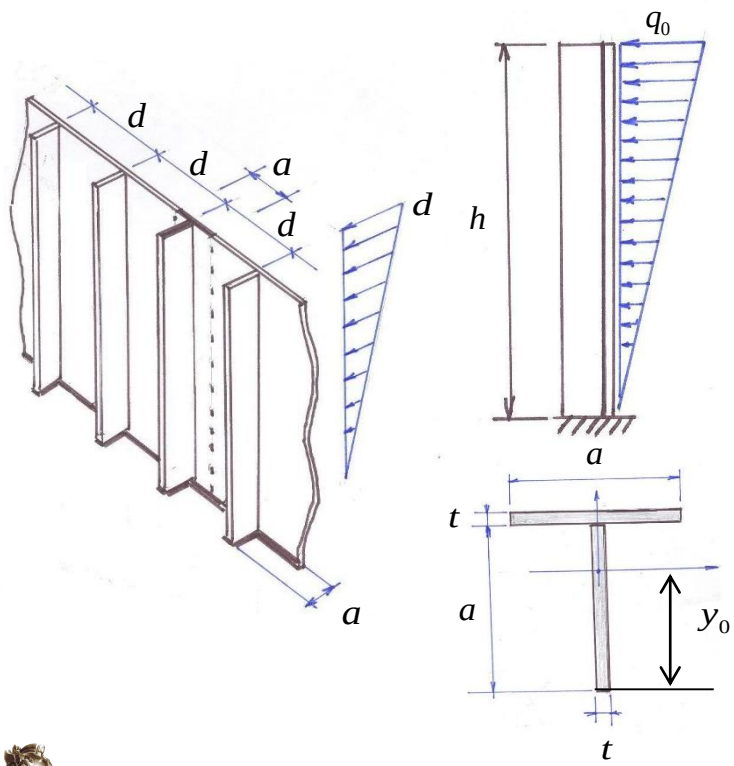
2.5. Máxima tensão de compressão: $$\sigma_{c,2} = -\frac{M}{I_2} y_2 = -10,72 kN / cm^2 = -107,2 MPa$$

1.6. Máxima tensão de tração: $$\sigma_{t,2} = +\frac{M}{I_2}(2b - y_2) = 10,72 kN / cm^2 = 107,72 MPa$$

Respostas	Valor	Unidade
$y_{0,1}$	5,625	cm
$I_{zo,1}$	2158,2	cm^4
$I_{z0,2}$	156,25	cm^4
τ_1	2,1	MPa
$\sigma_{c,1}$	-17,5	MPa
$\sigma_{t,1}$	36,4	MPa
τ_2	1,4	MPa
$\sigma_{c,2}$	-107,2	MPa
$\sigma_{t,2}$	107,2	MPa
Seção escolhida	Configuração 1	

$$\tau_R = s\tau_{cola} = 2 \times 2{,}1 = 4{,}2MPa$$

Exercício: PSub, / Q2, 2008 (3,0) A parede de vidro mostrada na figura está sujeita a um carregamento transversal de intensidade máxima. A parede é reforçada por diafragmas de vidro, colados com PVB. Um estudo simplificado do comportamento estrutural da parede pode ser feito considerando uma viga equivalente, engastada em sua base, conforme mostrado na figura. Considerando $h = 5m$, $a = 20cm$, $t = 16mm$ e admitindo que a largura da mesa da seção transversal equivalente seja igual à largura dos diafragmas, resultam $I = 2940cm^2$; $A = 64cm^2$; $y_0 = 15,4cm$.



(a) determine o valor q_0 (em kN/m) do carregamento transversal a ser aplicado na viga equivalente;

(b) sendo $E_V = 70GPa$ o módulo de elasticidade do vidro, determine o máximo deslocamento lateral da parede;

(c) determine a máxima tensão de cisalhamento na cola de PVB.

Exercício: P2/ Q2 / 2006 (3,0) A figura abaixo esquematiza um degrau típico de uma escada, composto por duas placas de vidro laminado, coladas com uma camada de PVB (polivinil-butiral). A escada deve ser projetada para o carregamento indicado na figura, sendo o carregamento dado por $P = (3 + 0,2m)kN$, onde m é o penúltimo algarismo não-nulo de seu número USP.

(a) determine os diagramas de esforços solicitantes da viga, para esta condição de carregamento;

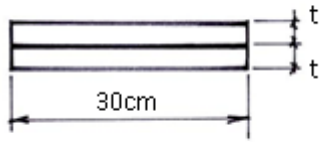
(b) determine as espessuras mínimas das placas de vidro, sabendo que a escada deve trabalhar com um fator de segurança s=3, e que as tensões de ruptura do vidro são

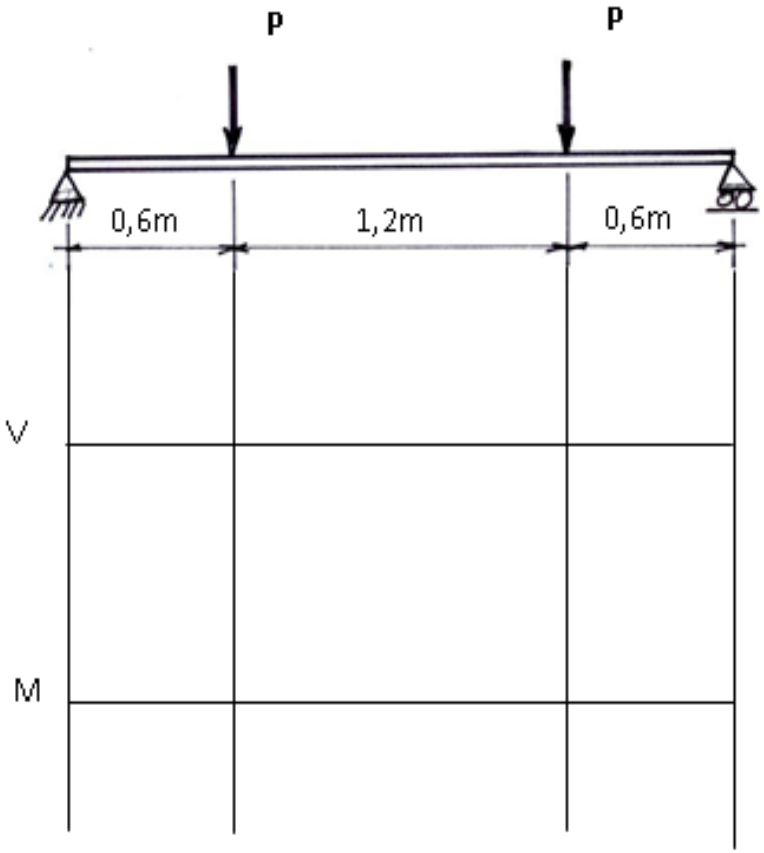
$$\sigma_R^t = 45MPa \quad \text{(à tração)}$$

$$\sigma_R^c = 800MPa \quad \text{(à compressão);}$$

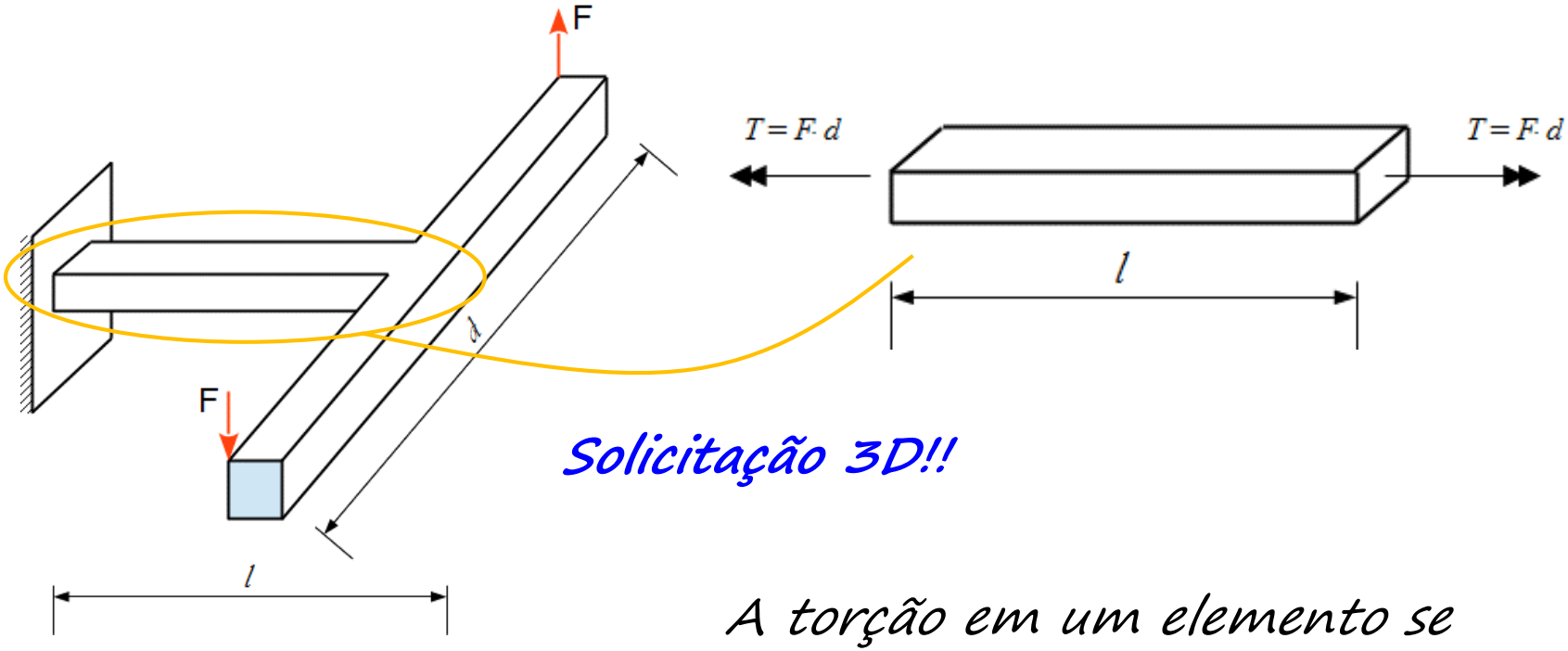
despreze a espessura do filme de PVB;

(c) com essas dimensões, determine a tensão de ruptura ao cisalhamento que deve ser especificada para o filme de PVB.

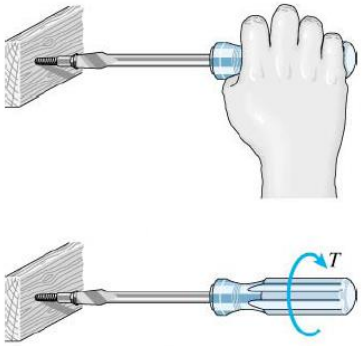




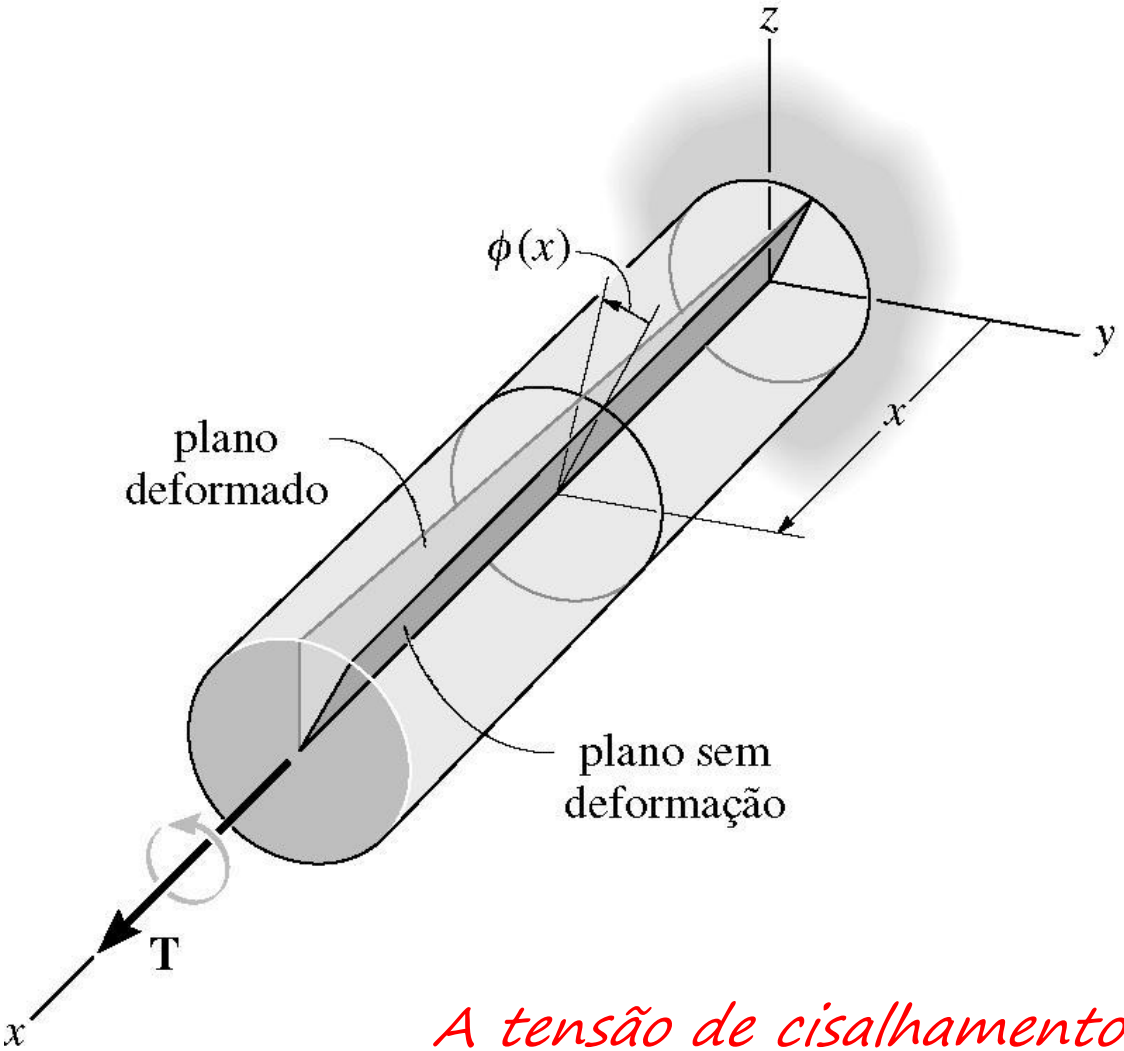
TENSÕES de CISALHAMENTO na TORÇÃO

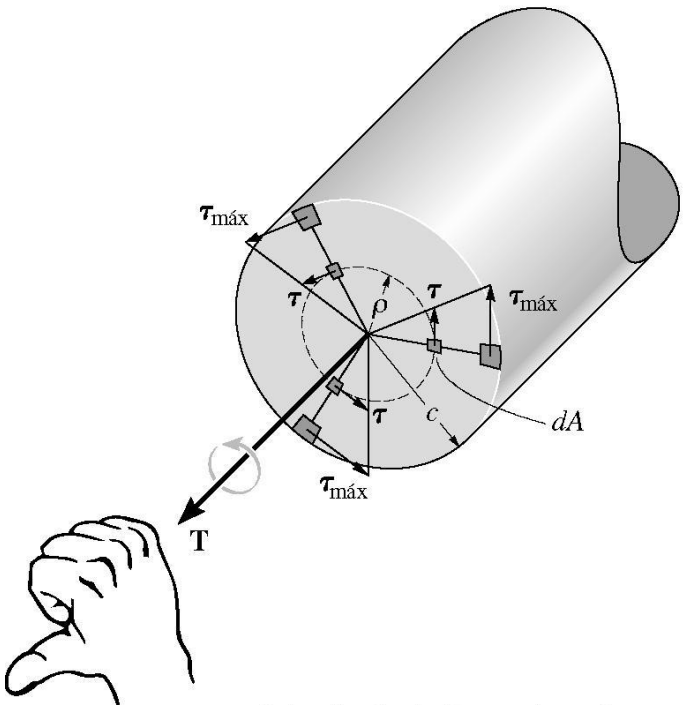


Solicitação 3D!!



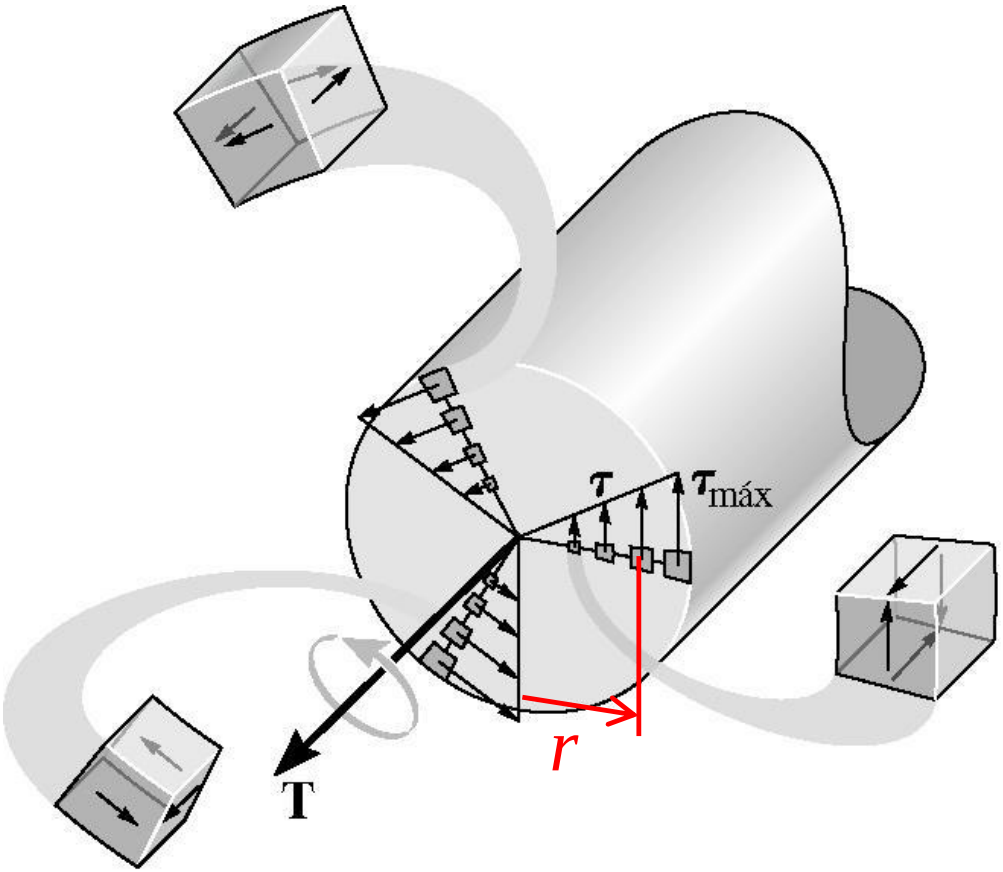
A torção em um elemento se desenvolve pela aplicação direta de um momento torsional ou indiretamente pela aplicação de forças ou momentos em um outro elemento estrutural





A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada reta radial da seção transversal, e é proporcional à distância ao baricentro da seção transversal

Cisalhamento na torção



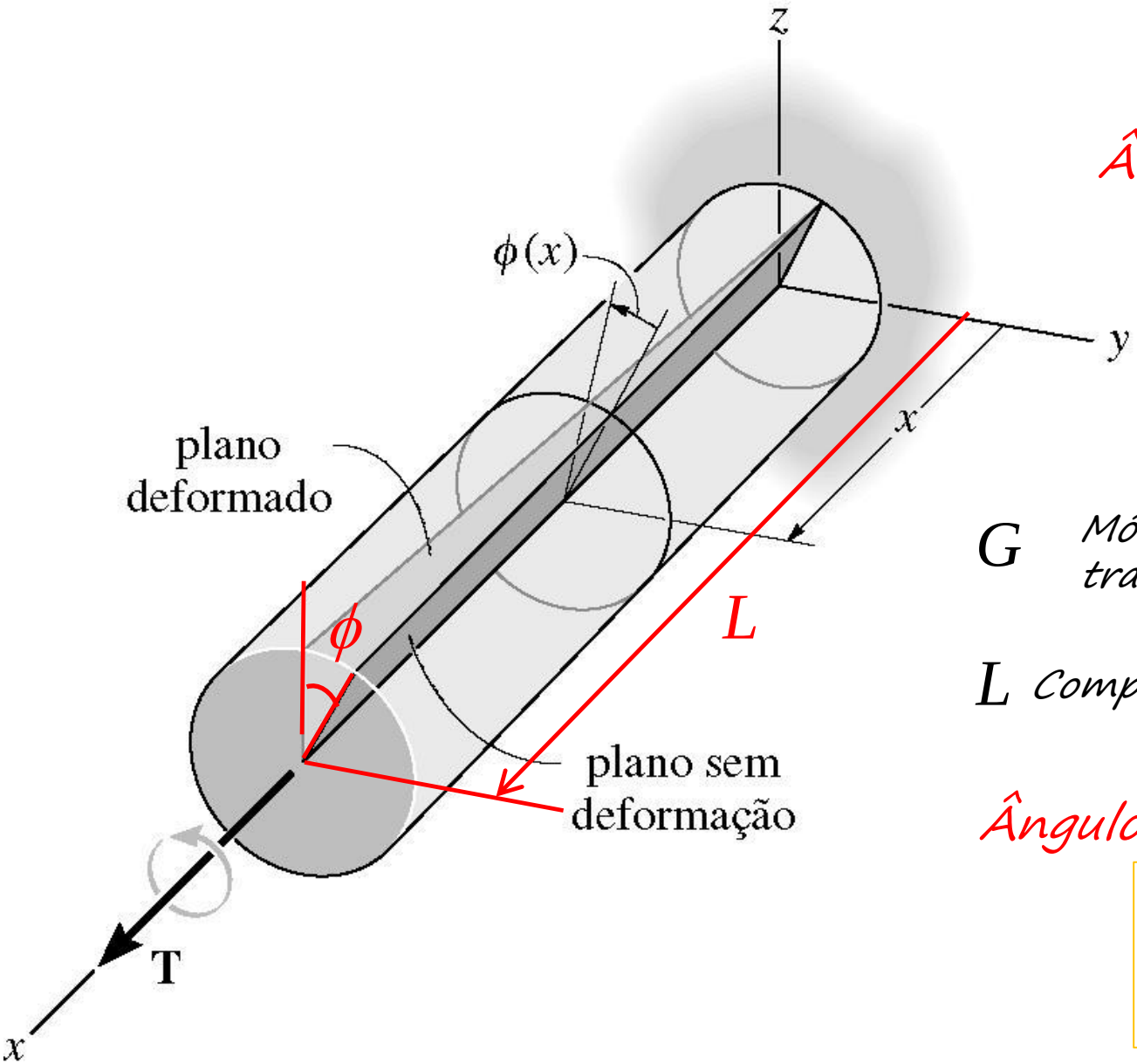
$$\tau_{(r)} = \frac{T}{J_o} r$$

T Momento torsor

r Raio

J_o Momento Polar de inércia

$$J_o = I_{yo} + I_{zo}$$



Ângulo de torção

$$\phi(x) = \frac{Tx}{GJ_o}$$

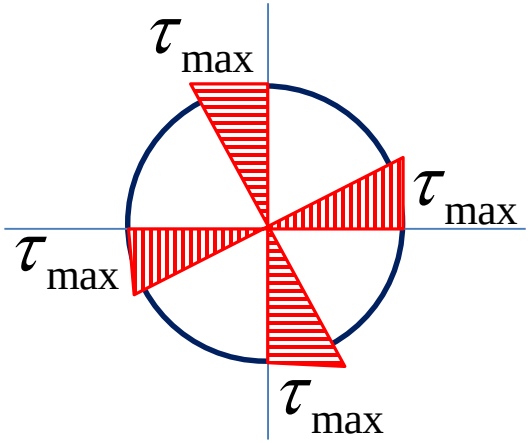
G Módulo de elasticidade transversal

L Comprimento do eixo

Ângulo total de torção

$$\phi = \frac{TL}{GJ_o}$$

Tensões de cisalhamento devidas à torção em uma barra de seção transversal circular:



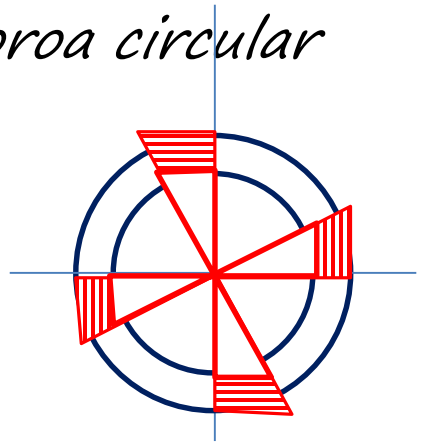
$$J_o = 2I_{zo} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{\pi d^4/32} \cdot d/2 = \frac{T}{\boxed{\pi d^3/16}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}}$$

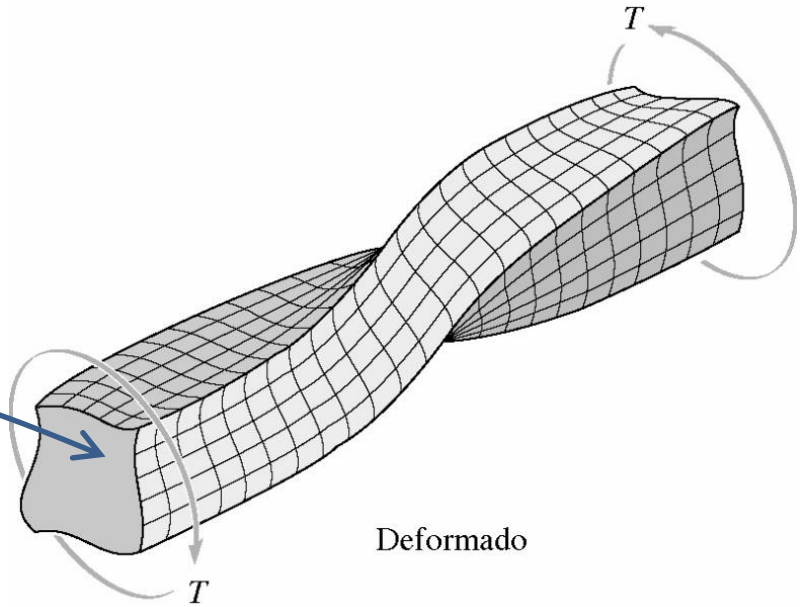
Módulo de resistência à torção

Seção coroa circular



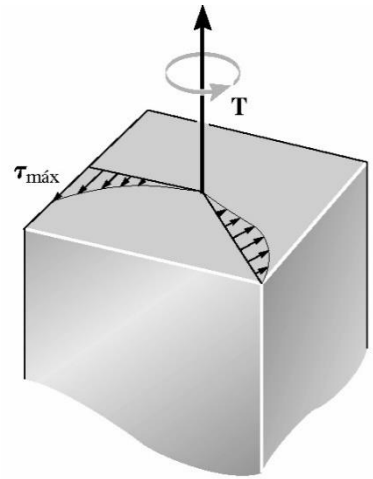
$$J_o = \frac{\pi\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{32}$$

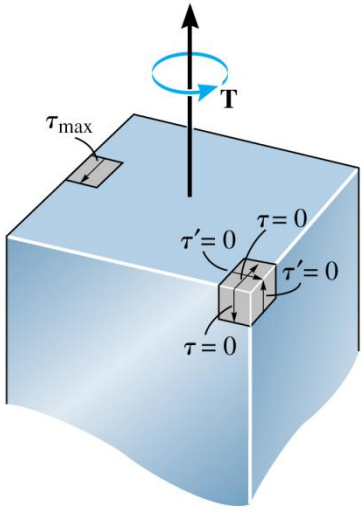
A análise torção em eixos de seção não circular torna-se mais complexa



<u>Empenamento</u>: seção transversal deixa de ser plana!

Distribuição de tensões ao longo de duas retas radiais





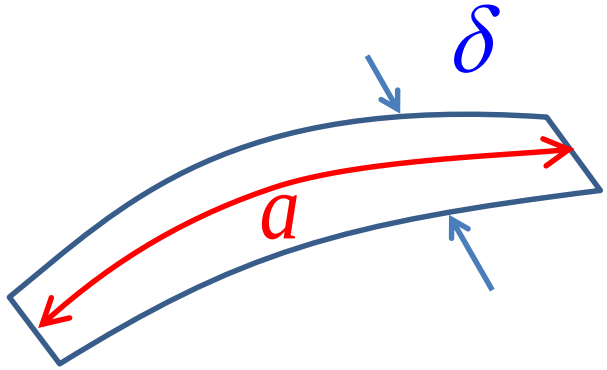
Resolução numérica para uma seção quadrada de lado "a"

$$\tau_{\max} = \frac{T}{0,208 \cdot a^3}$$

Seções retangulares:

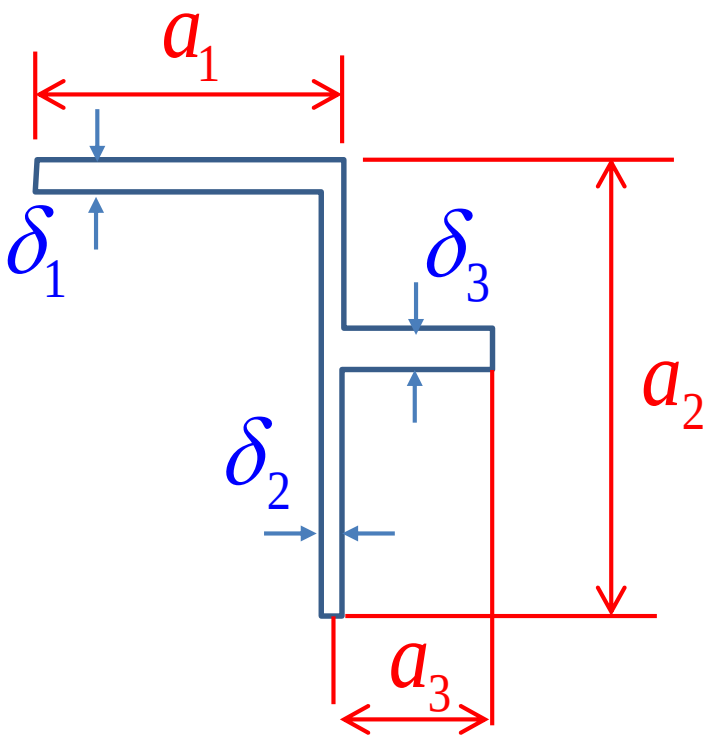
$$\tau = \frac{T}{\alpha h b^2}$$

Seções abertas de parede fina



$$\tau = \frac{T}{W_t} \qquad W_t = \frac{a\delta^2}{3}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_t} \qquad I_t = \frac{a\delta^3}{3}$$



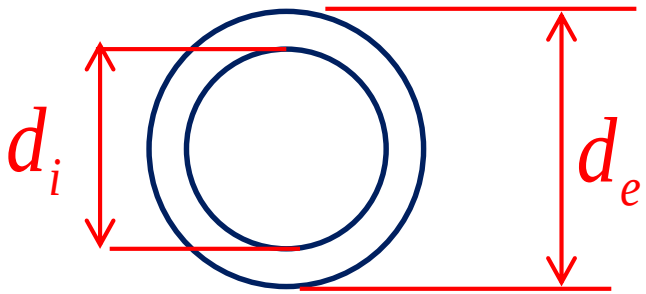
$$I_t = \sum \frac{a_i \delta_i^3}{3} \qquad W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}$$

$\tau_{\max}$ *ocorre na parede de maior espessura!*

Exemplo:

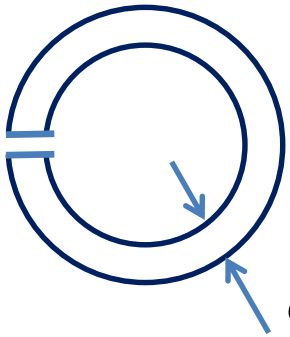
Comparar a rigidez e a resistência de um tubo integro e um tubo cortado longitudinalmente

(1) Tubo íntegro



$$\phi_1 = \frac{TL}{GI_P}$$

(2) Tubo cortado



$$\delta = \frac{d_e - d_i}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{TL}{GI_t}$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{I_P}{I_t}$$

Exemplo:

Rigidez:

$$I_P = \frac{\pi}{32}\left(d_e^4 - d_i^4\right)$$

$$I_t = \frac{a\delta^3}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{d_e + d_i}{2}\right)\left(\frac{d_e - d_i}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{48}\left(d_e + d_i\right)\left(d_e - d_i\right)^3$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{3}{2}\frac{\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{\left(d_e + d_i\right)\left(d_e - d_i\right)^3}$$

Por exemplo: $d_e = 20cm\,;\, d_i = 18cm \quad \therefore \quad \frac{\phi_2}{\phi_1} = 271{,}5$

Exemplo:

Resistência: Tubo íntegro: Tubo cortado

$$\tau_{\max,1} = \frac{T}{I_P} \cdot \frac{d_e}{2}$$

$$\tau_{\max,2} = \frac{T}{I_t} \cdot \delta = \frac{T}{I_t} \cdot \left(\frac{d_e - d_i}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = \frac{I_P}{I_t} \cdot \frac{2\delta}{d_e} = \frac{I_P}{I_t} \cdot \frac{d_e - d}{d_e}$$

$$\frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = \frac{3}{2} \frac{\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{\left(d_e + d_i\right)\left(d_e - d_i\right)^3} \frac{d_e - d}{d_e} = \frac{3}{2} \frac{\left(d_e^4 - d_i^4\right)}{d_e\left(d_e + d_i\right)\left(d_e - d_i\right)^2}$$

Para: $d_e = 20cm\,;\, d_i = 18cm$ $\therefore$ $\frac{\tau_{\max,2}}{\tau_{\max,1}} = 27{,}15$