PEF2602

Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

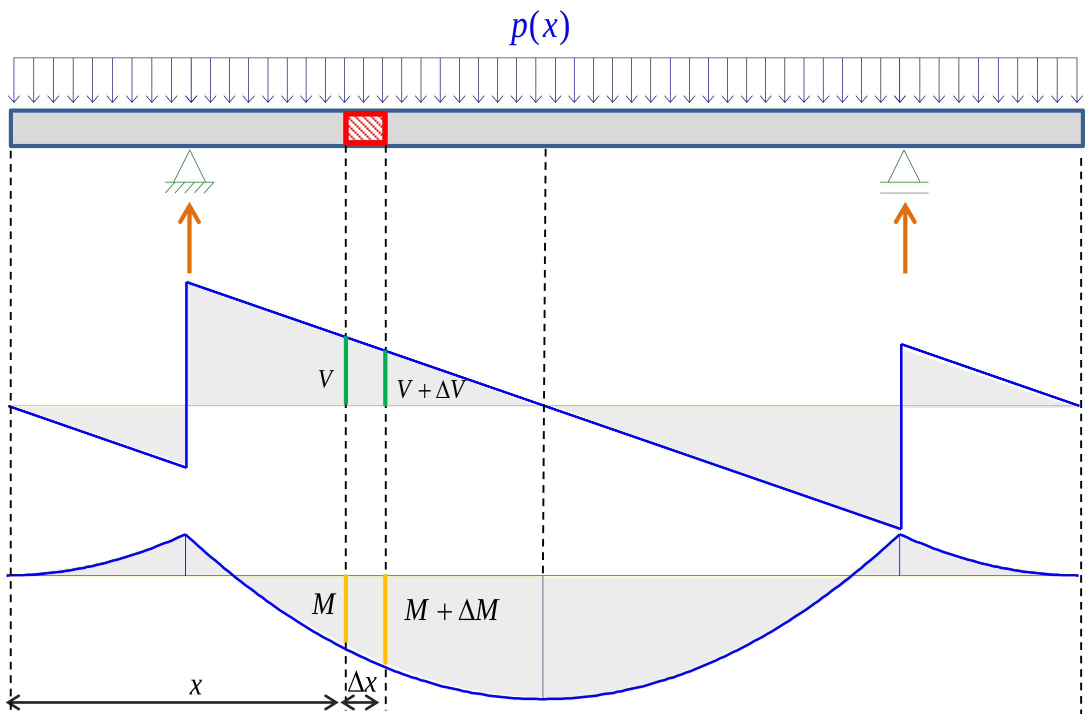
Tensões na Flexão

(Aula 12 – 05/11/2018)

Professores

Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Antônio Bittencourt Jr.

TENSÕES NA FLEXÃO



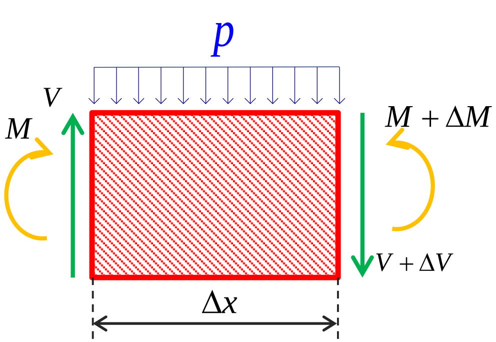
EQUILÍBRIO

⇓

ESFORÇOS SOLICITANTES

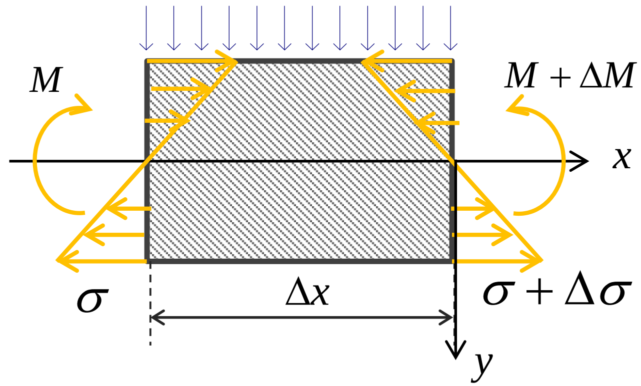
⇓

TENSÕES (?)



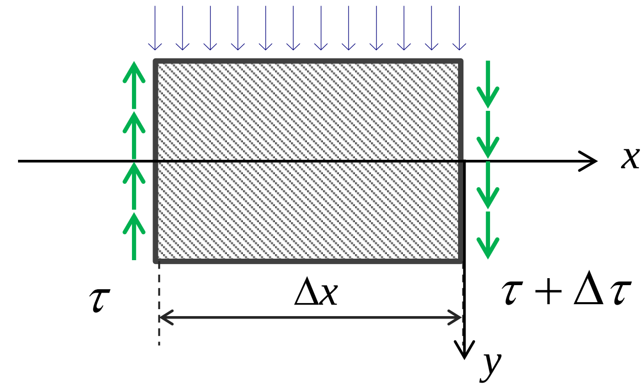
$$\begin{cases} V(x) = -\int p(x)dx \\ M(x) = \int V(x)dx \\ V = \dfrac{dM}{dx} \end{cases}$$

Tensões Normais σ



(visto em PEF2601)

Tensões de Cisalhamento τ

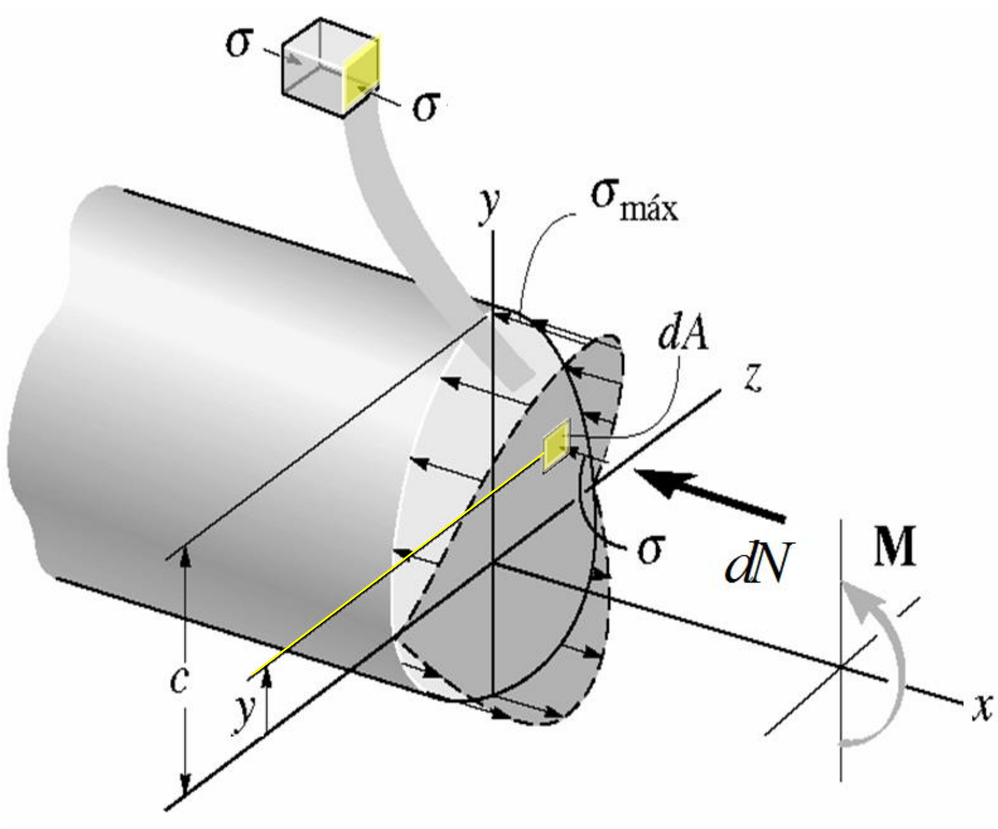


(a ser visto em PEF2602)

- A inspeção do diagrama da esquerda indica que, por si só as tensões normais, não equilibram a variação do momento fletor ΔM.

- De fato, esta variação deve ser equilibrada pelo momento resultante das tensões τ, indicadas no diagrama da direita!

Recordando o estudo das Tensões Normais σ:



$$dN = \sigma dA$$

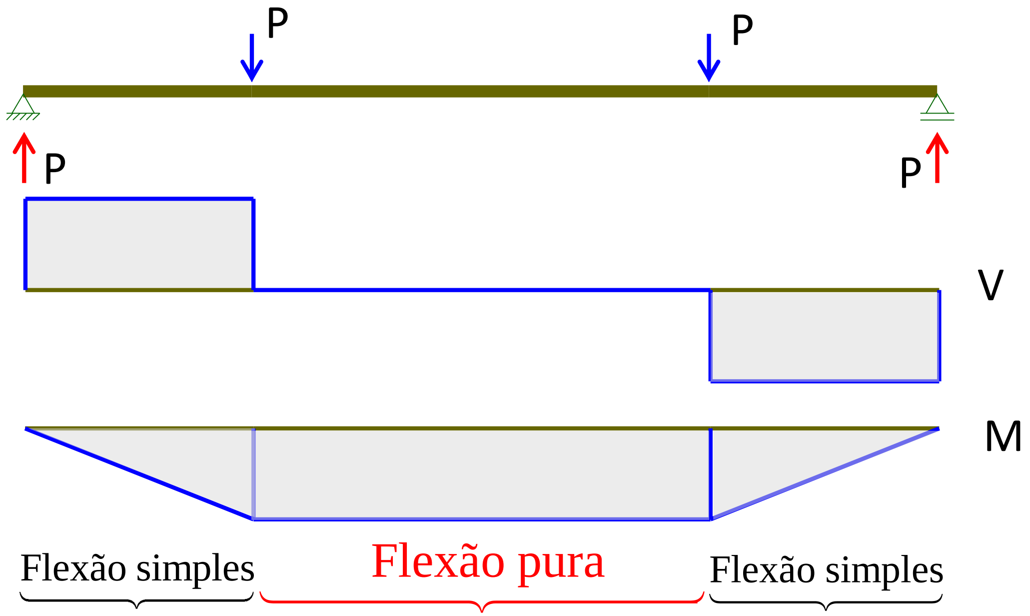
$$\boxed{N = \int_A dN = \int_A \sigma dA}$$

$$dM = dN \cdot y = \sigma \cdot y dA$$

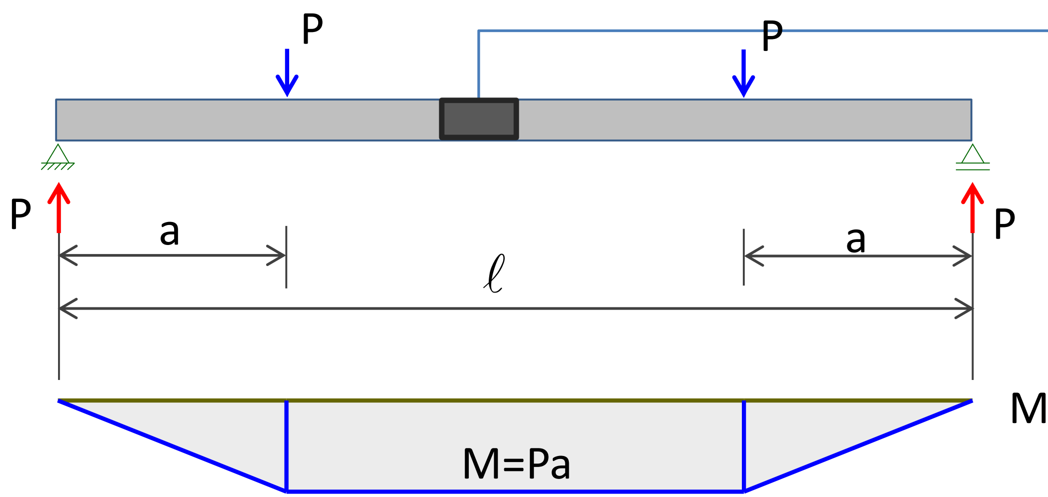
$$\boxed{M = \int_A dM = \int_A \sigma \cdot y dA}$$

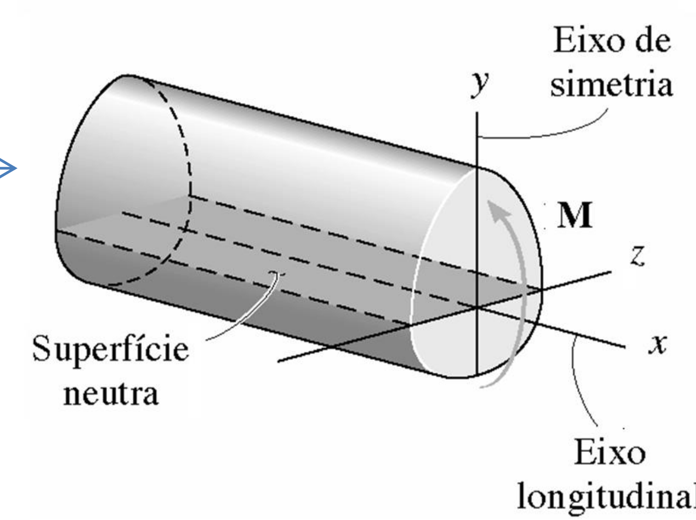
- ***FLEXÃO SIMPLES:*** $$N = \int_A \sigma dA = 0$$

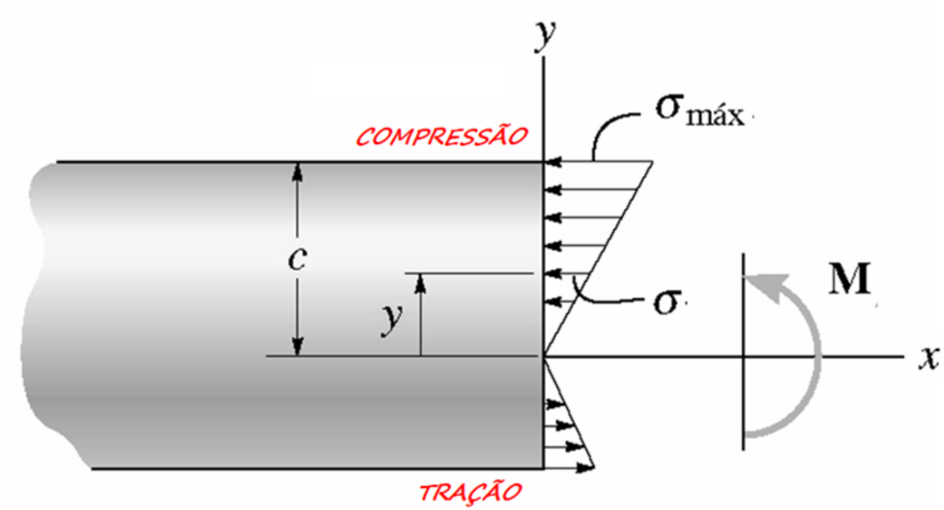
- ***FLEXÃO PURA:*** $$N = 0 \; ; \; V = 0 \quad \Rightarrow \quad M = cte$$



TENSÕES NORMAIS NA FLEXÃO





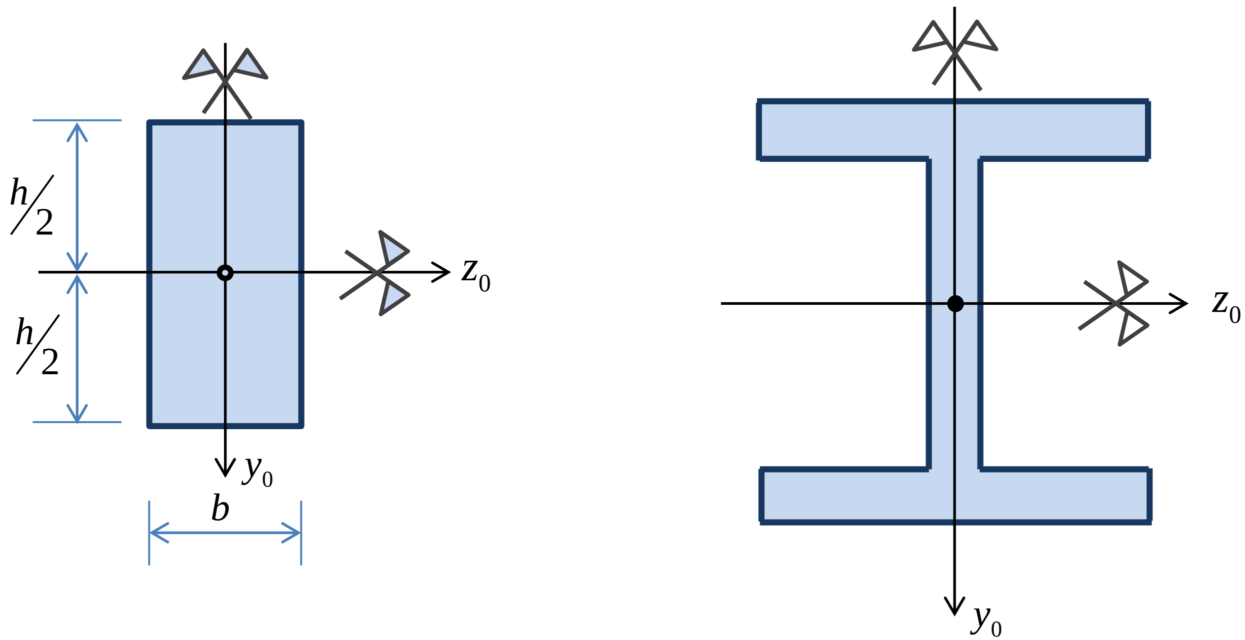


Variação da tensão de flexão
(vista lateral)

$$\sigma = \frac{M}{I_{z0}} y$$

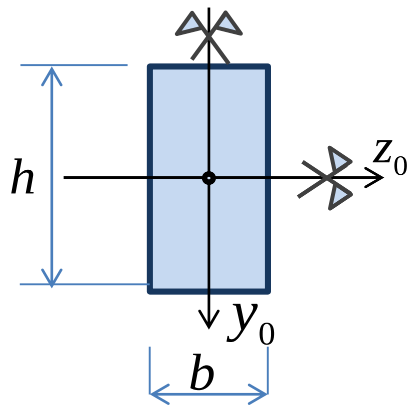
Na flexão normal simples, a linha neutra passa pelo baricentro da seção!

("centro de massa" ; "centro geométrico")



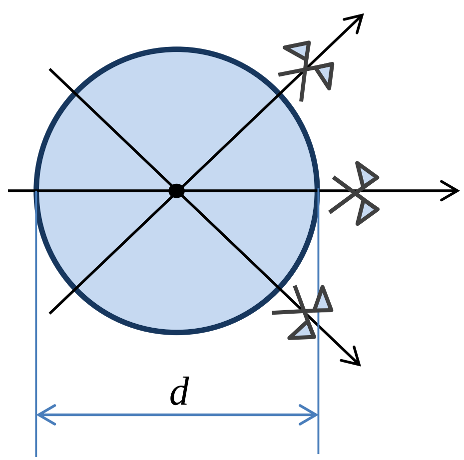
O baricentro fica sobre os eixos de simetria (se estes existirem)!

Momentos de inércia de um retângulo e de uma circunferência, em relação aos eixos baricêntricos:



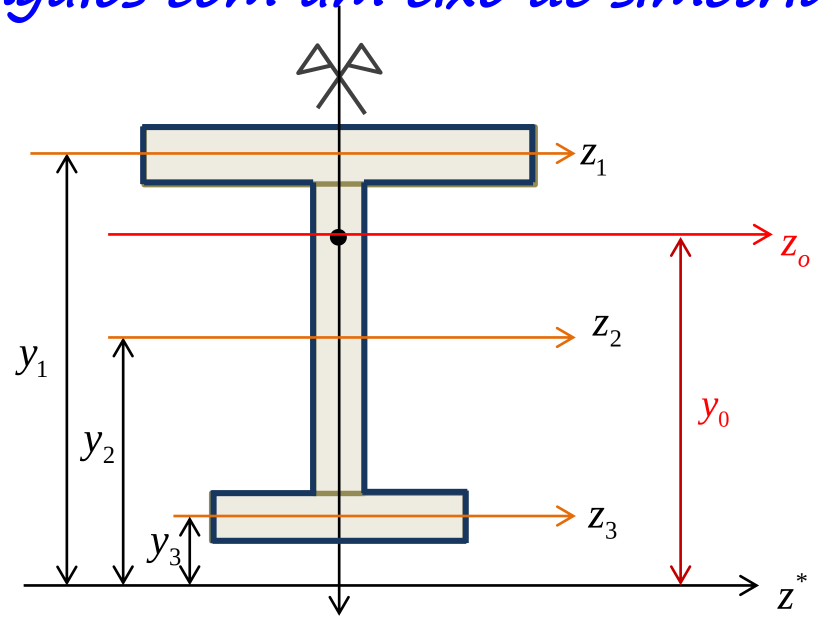
$$I_{zo} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yo} = \frac{hb^3}{12}$$



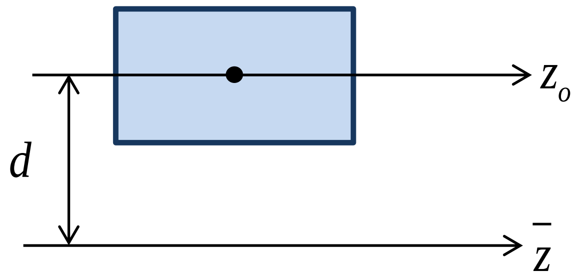
$$I_{zo} = \frac{\pi d^4}{64}$$

- *Determinação do baricentro para uma composição de retângulos com um eixo de simetria*



$$y_o = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

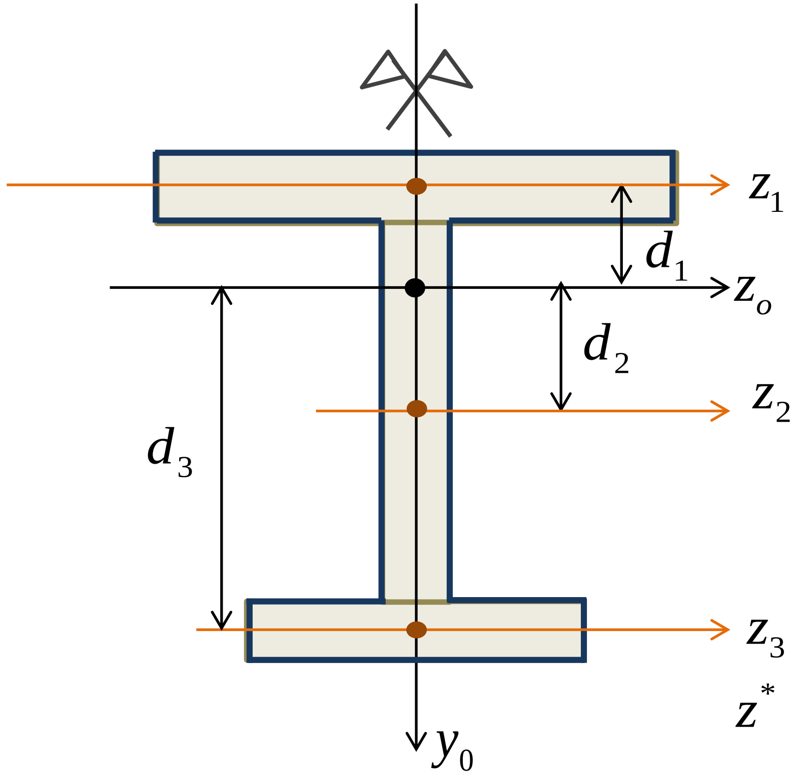
- *Mudança de eixos – Teorema de Steiner (ou dos eixos paralelos)*



$$I_{\bar{z}} = I_{zo} + Ad^2$$

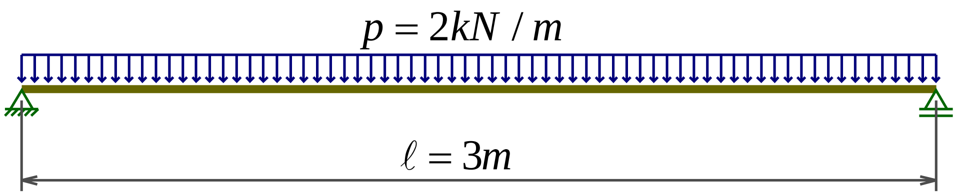
$$I_{zo} < I_{\bar{z}} \quad \forall \ d \quad \therefore \quad I_{zo} \text{ é mínimo!}$$

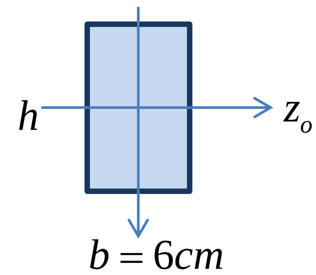
Momento de inércia de uma composição de retângulos

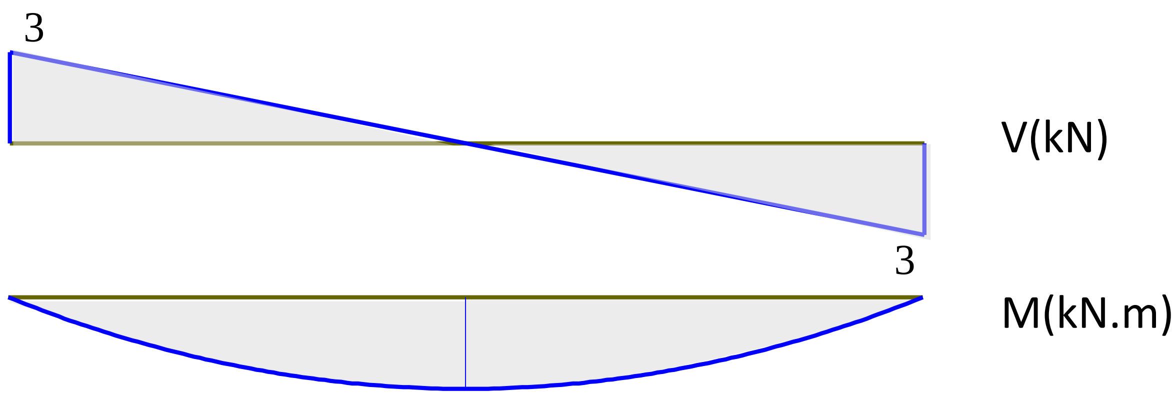


$$I_{zo} = \sum I_{zi} + A_i d_i^{\,2}$$

<u>Exemplo:</u> Encontrar a altura h da viga, sabendo que a tensão de ruptura do material é $\sigma_r = 3\text{kN}/\text{cm}^2$ *com um coeficiente de segurança,* $s = 3$

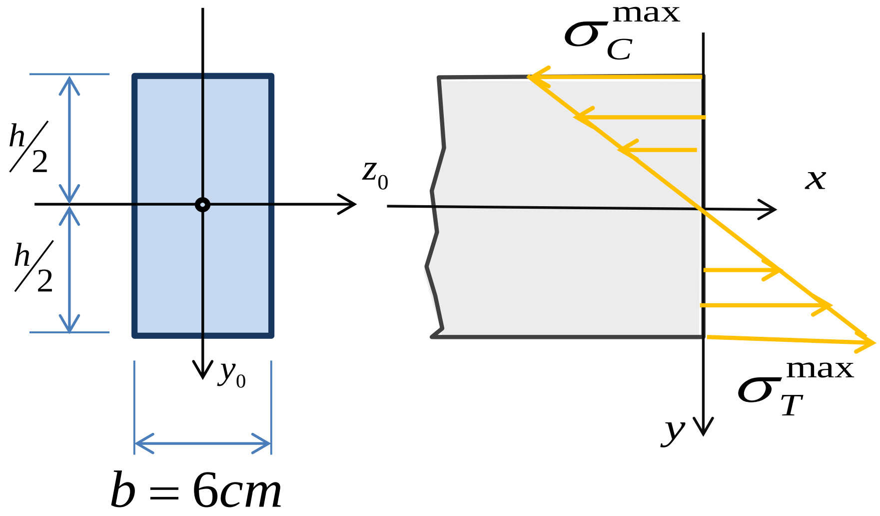






$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2 \times 3^2}{8} = 2{,}25 kN.m$$

O momento de inércia vale: $$I_{zo} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \times h^3}{12} = \frac{h^3}{2}$$



$$\sigma_T^{max} = \sigma_C^{max} = \frac{M}{I_{zo}}\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_T^{max} \leq \overline{\sigma} = \frac{\sigma_r}{s}$$

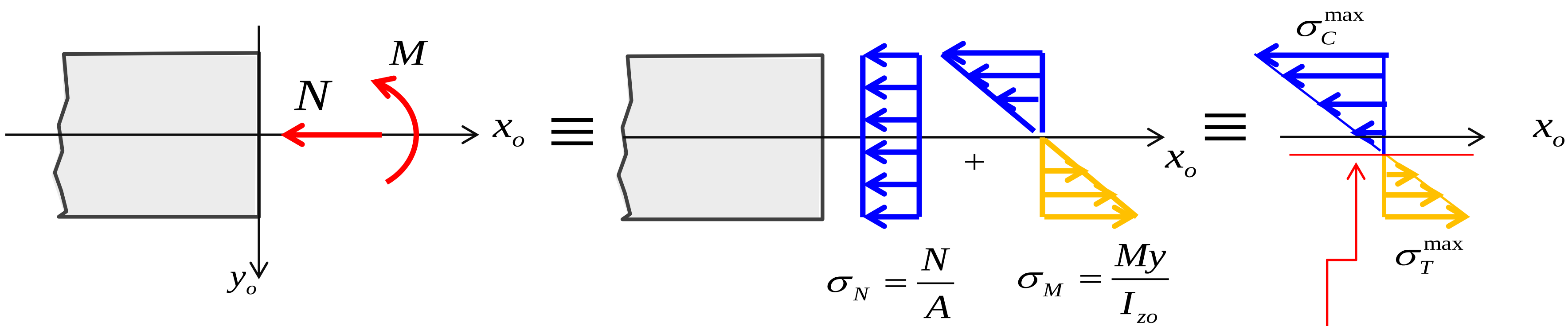
$$\frac{M_{max}}{I_{zo}}\left(\frac{h}{2}\right) \leq \overline{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{max}}{\left(\frac{h^3}{2}\right)}\left(\frac{h}{2}\right) \leq \overline{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{max}}{h^2} \leq \overline{\sigma} \quad \Rightarrow \quad h \geq \sqrt{\frac{M_{max}}{\overline{\sigma}}}$$

$$h \geq \sqrt{\frac{225}{1}} = 15cm$$

(Padrão comercial: 6cm x 16cm)

FLEXÃO COMPOSTA

Ação combinada de esforço normal (N) e momento fletor (M)



Linha Neutra
já não passa pelo
eixo baricêntrico

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

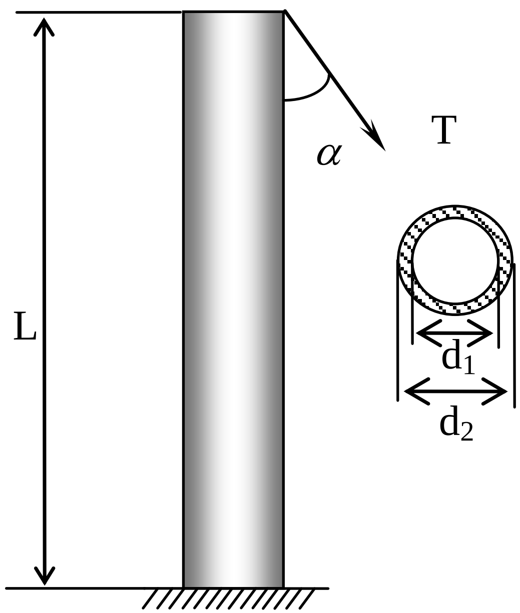
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{zo}} y}$$

$$\sigma_C^{\max} \neq \sigma_T^{\max}$$

Exemplo:

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração T, conforme a figura, fazendo um ângulo α=30º com a vertical . O poste tem comprimento L=2,0m e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo d_2=250mm e interno d_1=200mm.

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de 80MPa.



$$80MPa = 8kN/cm^2$$

$$\begin{cases} \sin 30^0 = 0,5 \\ \cos 30^0 = 0,86603 \end{cases}$$

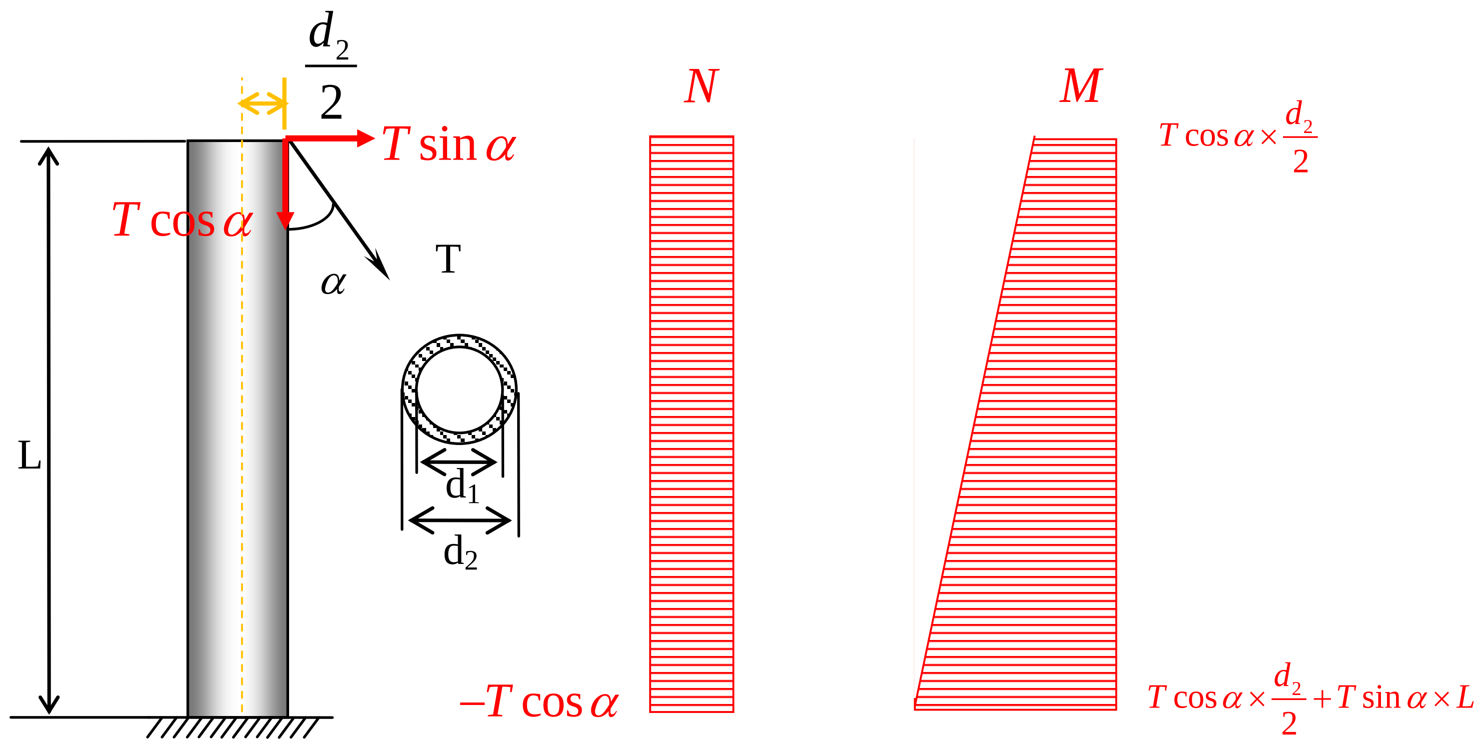
$$A = \frac{\pi \times (d_2^2 - d_1^2)}{4} = 176,71\ \text{cm}^2$$

$$I = \frac{\pi \times (d_2^4 - d_1^4)}{64} = 11320,78\ \text{cm}^4$$

Exemplo:

Um poste de alumínio é fixado na base e puxado no topo por um cabo com uma força de tração T, conforme a figura, fazendo um ângulo α=30º com a vertical . O poste tem comprimento L=2,0m e uma seção transversal circular vazada, de diâmetro externo d_2=250mm e interno d_1=200mm.

Determine a força transversal admissível no cabo, se a tensão admissível no poste for de 80MPa.



Flexão composta:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

Na extremidade livre:

$$N = -T\cos\alpha \quad ; \quad M = T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2}$$

$$\sigma_{\min}^{c} = -\frac{T\cos\alpha}{A} - \frac{(T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2})}{I}\left(\frac{d_2}{2}\right) \geq -8kN/cm^2$$

$$-\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5)}{11320,78} 12,5 = -1,6854 \times 10^{-2} T \geq -8$$

$$1,6854 \times 10^{-2} T \leq 8$$

$$T \leq 476,66kN$$

Na base (extremidade engastada): $N = -T\cos\alpha \quad ; \quad M = T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2} + T\sin\alpha \times L$

$$\sigma_{\min}^{c} = -\frac{T\cos\alpha}{A} - \frac{(T\cos\alpha \times \frac{d_2}{2} + T\sin\alpha \times L)}{I}\frac{d_2}{2} \geq -8$$

$$\sigma_{\min}^{c} = -\frac{T \times 0,86603}{176,71} - \frac{(T \times 0,86603 \times 12,5 + T \times 0,5 \times 200)}{11320,78} 12,5 \geq -8$$

$$-0,12727T \geq -8$$

$$0,12727T \leq 8$$

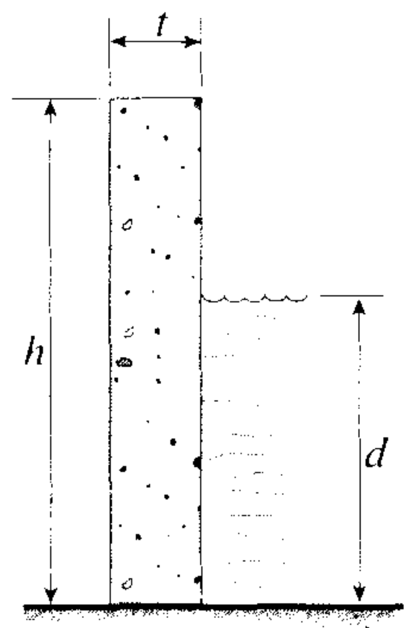
$$\Rightarrow \ \mathrm{T} \leq 62,86\mathrm{kN} \qquad \boxed{\Rightarrow \ \mathrm{T_{max}} = 62,86\mathrm{kN}}$$

Exemplo:

Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico γ_c=23kN/m³. que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale h=2m e a sua espessura é t=0,3m.

(a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo (d=h).

(b) determine a profundidade máxima permissível d_{max} da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.

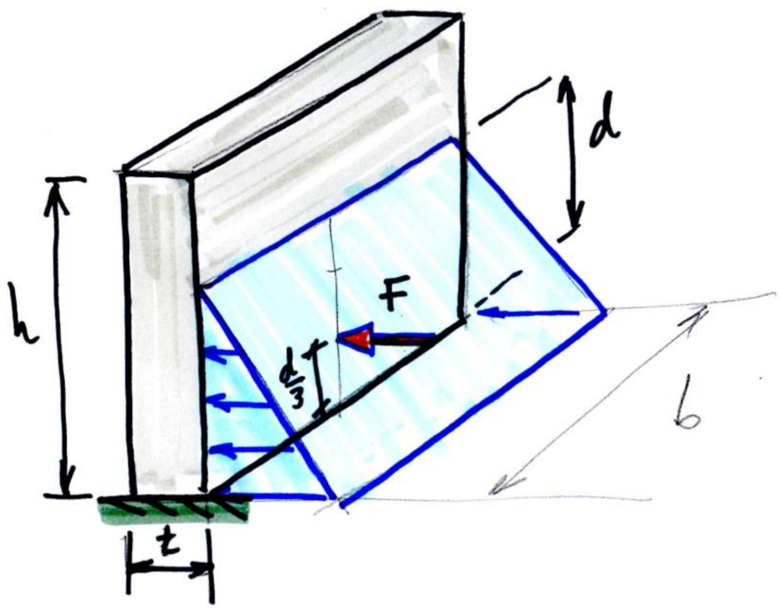


Exemplo:

Uma pequena barragem é constituída de uma parede de concreto-massa, de peso específico $\gamma_c = 23 kN/m^3$. que se apoia sobre uma fundação segura. A altura da parede vale h=2m e a sua espessura é t=0,3m.

(a) determine as tensões de compressão e tração máximas na base da parede, quando a água atinge o topo (d=h).

(b) determine a profundidade máxima permissível d_{max} da água, para que não ocorram tensões de tração no concreto.



Peso da barragem: $$W_{barragem} = \left(b \times t \times h\right) \times \gamma_c$$

Pressão hidrostática, para uma coluna d´água de altura d:

$$p = d \times \gamma_w \qquad (\gamma_w = 10kN / m^3)$$

Força linearmente distribuída, variando linearmente desde zero na superfície até uma valor:

$$q = \left(d \times \gamma_w\right) \times b \qquad \text{(em kN/m)}$$

Resultante da força horizontal aplicada pela água à barragem

$$F = q \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\left(d^2 \times \gamma_w\right) \times b$$

Momento fletor na base da barragem, devido à F:

$$M = F \times \frac{d}{3} = \frac{1}{6}\left(d^3 \times \gamma_w\right) \times b$$

Tensões na base da barragem: $$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

Área e momento de inércia da seção transversal da base:

$$A = b \times t \quad ; \quad I = \frac{bt^3}{12}$$

Tensões normais na flexão composta:

$$\sigma_{\substack{\min,\\ \max}} = -\frac{W}{A} \mp \frac{M}{I} y_{\max}$$

$$\sigma_{\substack{\min,\\ \max}} = -\frac{(b \times t \times h) \times \gamma_c}{bt} \mp \frac{M}{\left(\frac{bt^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2} = -h \times \gamma_c \mp \frac{\frac{1}{6}\left(d^3 \times \gamma_w\right) \times b}{\left(\frac{\mathrm{bt}^3}{12}\right)} \times \frac{t}{2}$$

$$\sigma_{\min,\max} = -h \times \gamma_c \mp \frac{d^3}{t^2} \times \gamma_w$$

$$\sigma_{\min,\max} = -2,0 \times 23 \mp \frac{(2,0)^3}{0,3^2} \times 10 = -46 \mp 888,9 \quad (\text{kN/m}^2 = \text{kPa})$$

$$\begin{cases} \sigma_{\min} = -46 - 888,89 = -934,9 \text{ kPa} & \text{(compressão máxima!)} \\ \sigma_{\max} = -46 + 888,89 = 842,9 \text{ kPa} & \text{(tração máxima!)} \end{cases}$$

(b) Profundidade máxima para não haver tração:

$$\sigma_{\max} = -h \times \gamma_c + \frac{d^3_{\max}}{t^2} \times \gamma_w = 0$$

$$\Rightarrow d^3_{\max} = h \times t^2 \times \frac{\gamma_c}{\gamma_w} = 2 \times 0,3^2 \times 2,3 = 0,414$$

$$\boxed{\Rightarrow d_{\max} = \sqrt[3]{0,414} = 0,745 \text{ m}}$$

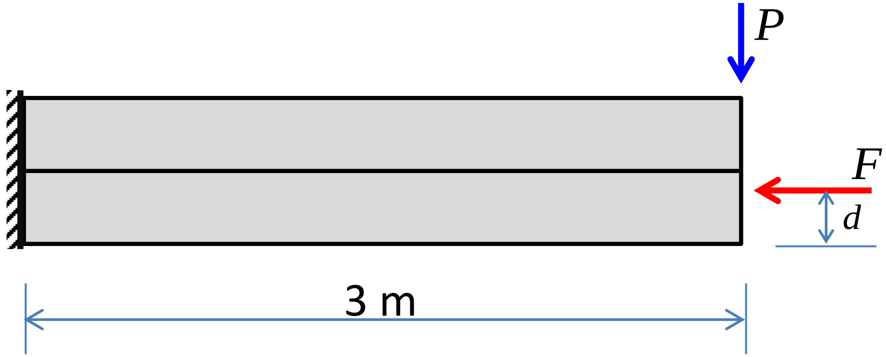
Exemplo viga protendida:

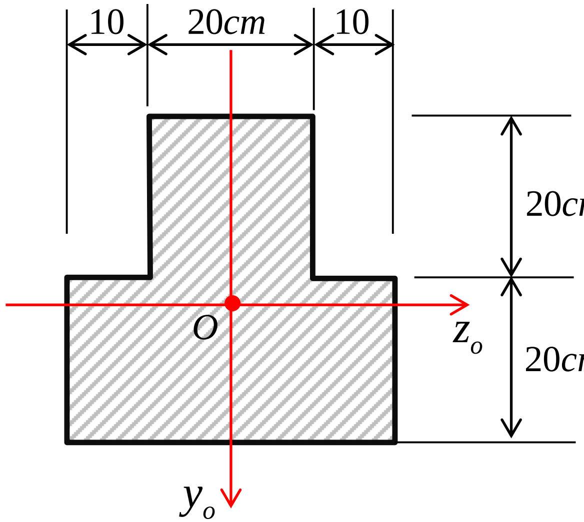
a) Qual máxima distância d (contada a partir da extremidade inferior da peça) que se pode aplicar uma força de protensão F?

b) Qual o valor máximo admissível de F, aplicado na distância d calculada no item anterior?

c) Na situação definida nos itens "a" e "b", qual o valor máximo admissível de P , aplicado na extremidade livre da viga (de cima para baixo)?

Desconsiderar o peso próprio da peça.





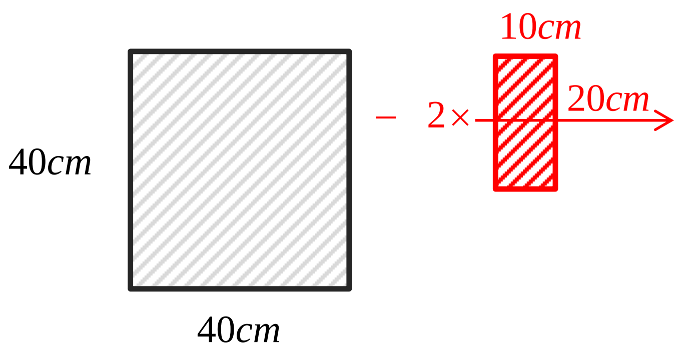
São dados:

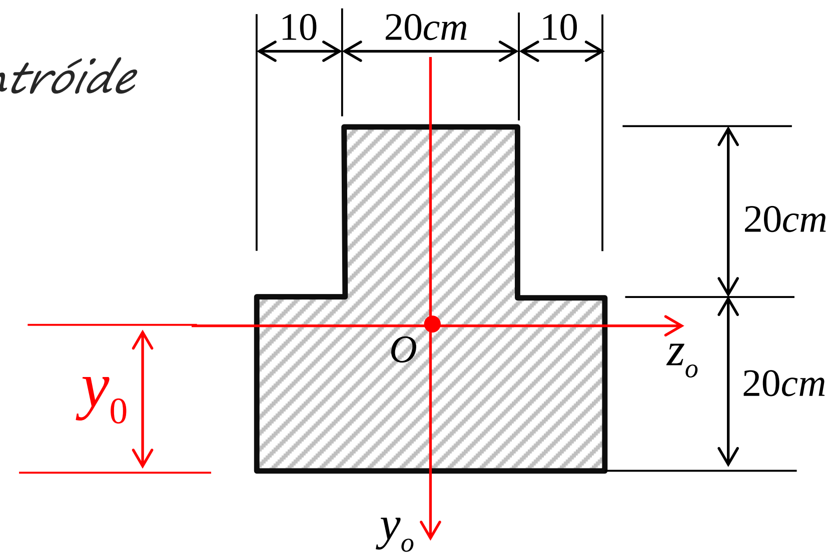
$$\overline{\sigma}_t = 0$$

$$\overline{\sigma}_c = 4kN/cm^2$$

Propriedades da seção

Determinação das coordenadas do centróide





$$y_o = \frac{40\times40\times20-2\times10\times20\times30}{40\times40-2\times10\times20}$$

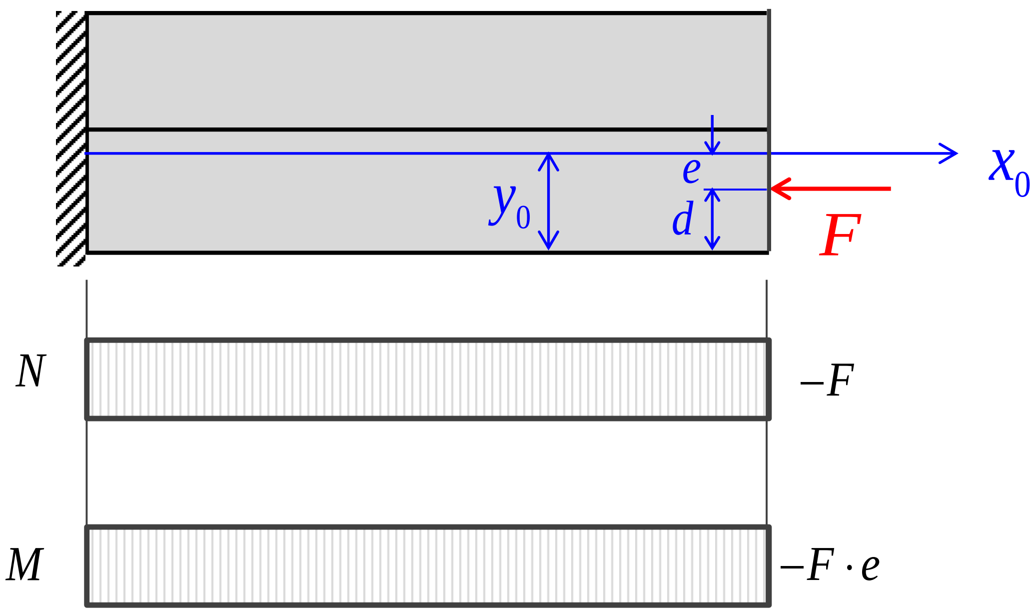
$$\boxed{y_o = \frac{20.000}{1.200} = 16,67cm}$$

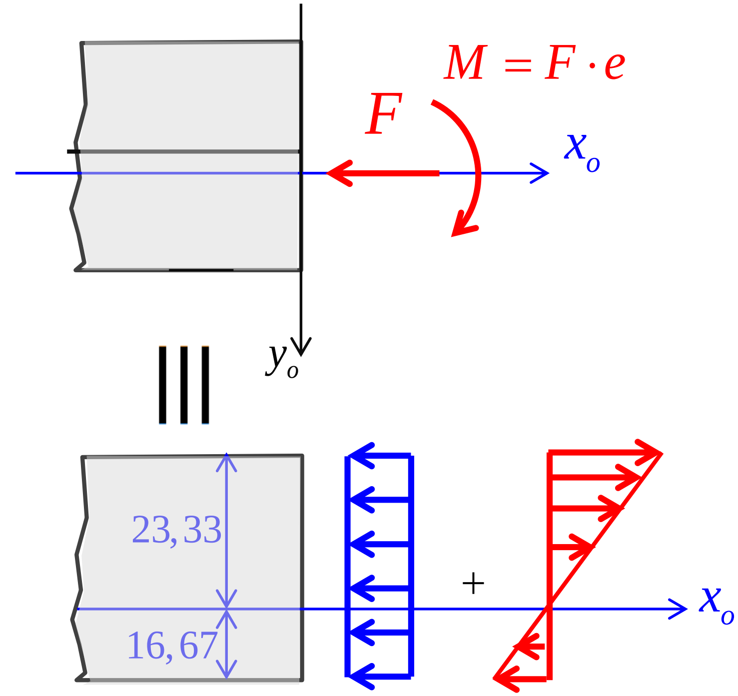
$$\boxed{A = 1.200cm^2}$$

$$I_{zo} = \frac{40\times40^3}{12} + (40\times40)\times(20-16,67)^2 +$$
$$-2\times\left[\frac{10\times20^3}{12} + (10\times20)\times(30-16,67)^2\right]$$

$$\boxed{I_{zo} = 146.666,67cm^4}$$

❖ Situação 1: supondo d< 16,67 cm





$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \qquad \sigma_M = \frac{M}{I_{zo}} y$$

Tensão na fibra superior sendo a tração impossível

$$\sigma_{\max} \leq 0 \Rightarrow \quad -\frac{F}{1200} - \frac{F \times e \times (-23{,}33)}{146.666{,}67} \leq 0$$

$$23{,}33 \times e \leq \frac{146.666{,}67}{1200} \qquad \boxed{e \leq 5{,}23cm}$$

O que leva a:

$$\boxed{d \geq 16{,}67 - 5{,}23 = 11{,}44cm}$$

Tensão na fibra inferior : máxima compressão $\sigma_{\min} \geq -4kN/cm^2$

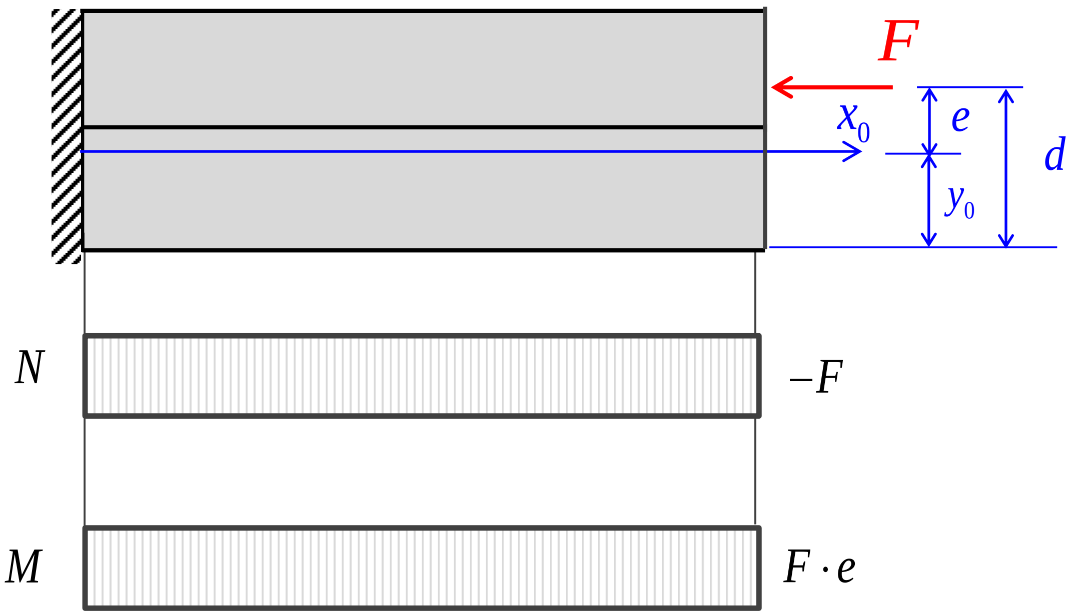
$$-\frac{F}{1200}-\frac{F\times 5,23\times 16,67}{146.666,67}\geq -4$$

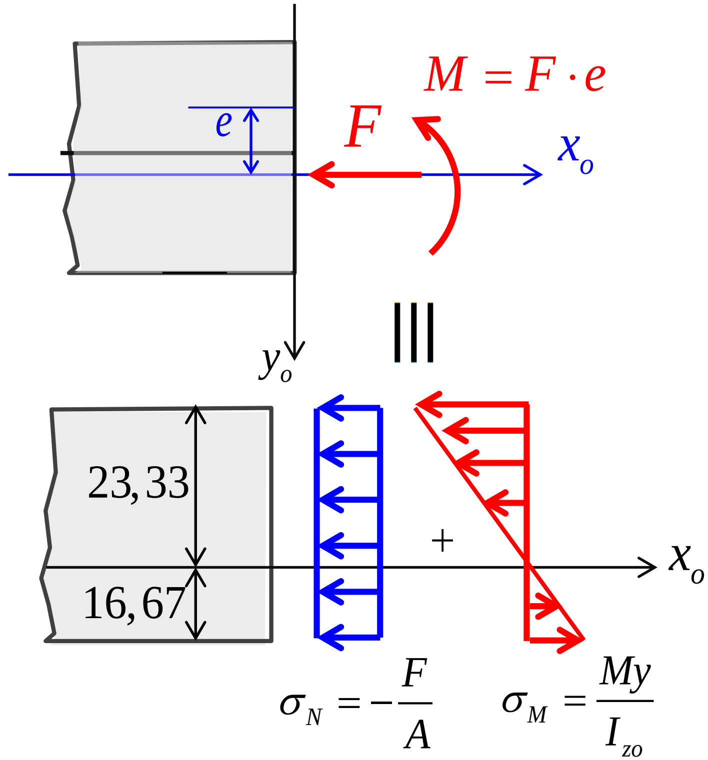
Em módulo:

$$F\left(\frac{1}{1200}+\frac{5,23\times 16,67}{146.666,67}\right)\leq 4$$

$$\boxed{F\leq 2801,6kN}$$

❖ Situação 2: supondo d>16,67 cm





Tensão na fibra inferior
Sendo a tração impossível

$$\sigma_{\max} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{F}{1200} + \frac{F \times e \times 16,67}{146.666,67} \leq 0$$

$$16,67 \times e \leq \frac{146.666,67}{1200} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e \leq 7,33cm}$$

Logo $d \leq 16,67 + 7,23 = 24cm$ O que leva a : $\boxed{11,44cm \leq d \leq 24cm}$

$d_{máx}$=24 cm!

Tensão na fibra superior – máxima compressão $\sigma_{\min} \geq -4kN/cm^2$

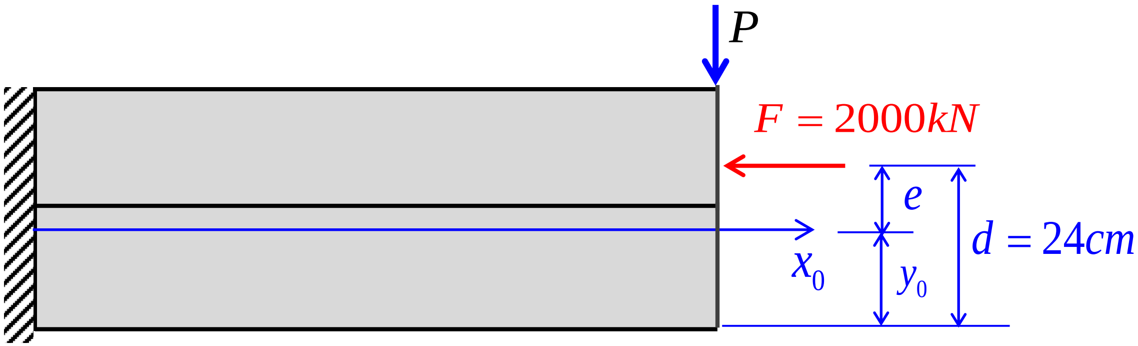
$$-\frac{F}{1200}+\frac{F\times 7,33\times(-23,33)}{146.666,67}\geq -4$$

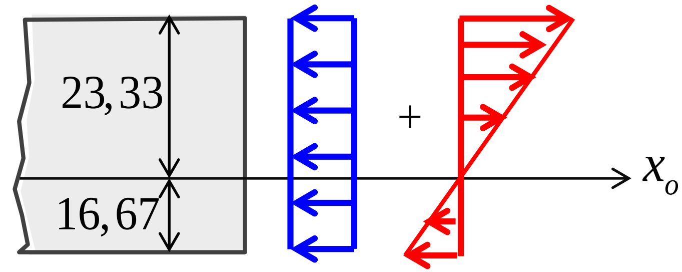
Em módulo:

$$F\left(\frac{1}{1200}+\frac{7,33\times(23,33)}{146.666,67}\right)\leq 4$$

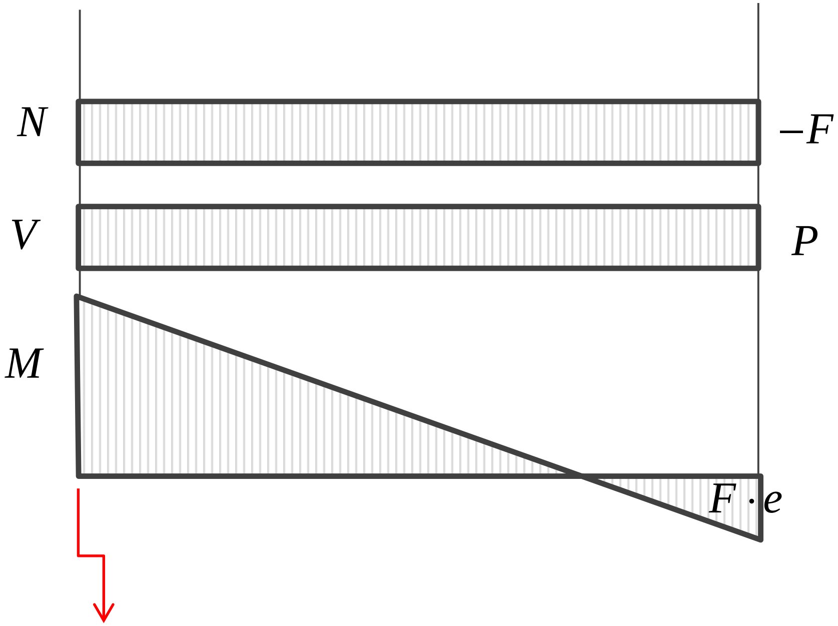
$$\boxed{F\leq 2.000,7kN}$$

Encontrar P para F=2000kN e d=24cm

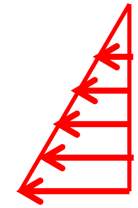




$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \qquad \sigma_M = \frac{M}{I_{zo}} y$$



$$M_{\max} = -P \cdot \ell + F \cdot e$$



$$\sigma_N + \sigma_M$$

Tensão na fibra superior – tração impossível $\sigma_{\max} \leq 0$

$$-\frac{F}{A}+\frac{F \times e \times y_s}{I_{zo}}-\frac{P \times \ell \times y_s}{I_{zo}} \leq 0$$

(note que $y_s < 0$)

$$-\frac{2000,7}{1200}+\frac{2000,7 \times 7,33 \times (-23,33)}{146.666,67}-\frac{P \times 300 \times \left(-23,33\right)}{146.666,67} \leq 0$$

$$-1,6673-2,3328+0,0477P \leq 0$$

$$0,0477P \leq 4,0001$$

$$\boxed{P \leq 83,8kN}$$

Tensão na fibra inferior – máxima compressão $\sigma_{\min} \geq -4$

$$-\frac{F}{A}+\frac{F\times e\times y_i}{I_{zo}}-\frac{P\times \ell\times y_i}{I_{zo}}\geq -4$$ *(note que $y_i > 0$)*

Em módulo:

$$\frac{2000,7}{1200}-\frac{2000,7\times 7,33\times 16,67}{146.666,67}+\frac{P\times 300\times 16,67}{146.666,67}\leq 4$$

$$1,6673-1,6668+\frac{P}{29,3275}\leq 4$$

$\boxed{P\leq 117,3kN}$ *Logo:* $\boxed{P_{\max}=83,8kN}$