Questão 1. (3,5 pontos)

Uma locomotiva (L1) descreve um movimento unidimensional cuja velocidade em função do tempo é dada por $v_1(t) = -4 + 10t + 3t^2$ m/s; sendo que sua posição e aceleração são dadas por $x_1(t = 1s) = -4$ m e por $a_1(t = 1s) = 16$ m/s² respectivamente. Uma outra locomotiva (L2) descreve um movimento unidimensional cuja aceleração é dada por $a_2(t) = 2$ m/s² e sabe-se que posição e velocidade são $x_2(t = 0) = -6$ m e $v_2(t = 0) = 1$ m/s respectivamente. Determine:

a) Determine a posição e aceleração para L1 em função do tempo. (0.75 pontos)
b) Faça um esboço da posição, velocidade e aceleração para L1 em função do tempo. Destaque nos gráficos os pontos de máximo/mínimo e inflexões com seus respectivos valores. (1.0 ponto)
c) Determine a velocidade e posição para L2 em função do tempo. (0.25 pontos)
d) Faça um esboço da velocidade e posição para L2 em função do tempo. Destaque nos gráficos os pontos de máximo/mínimo e inflexões com seus respectivos valores. (0.5 pontos)
e) Determine se as locomotivas se encontram. Se sim, determine o tempo e a posição. (1.0 ponto)

a) Para obter a aceleração de L1 basta derivar. Assim $a_1(t)$ para L1 é

$$a_1(t) = 10 + 6t \ m/s^2$$ 0.25

Integrando a velocidade, obtemos $x_1(t)$

$$x_1(t) - x_0 = \int(-4 + 10t + 3t^2)dt$$

$$x_1(t) = x_0 - 4t + 5t^2 + t^3$$

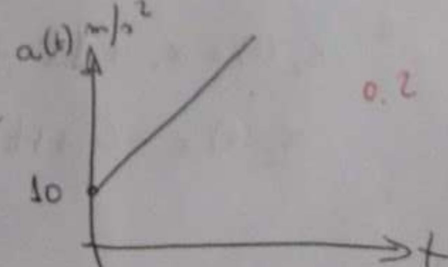
Como $x_1(1) = -4$ m

$$\cancel{-4} = x_0 \cancel{-4} + 5 + 1$$

$$x_0 = -6 \ m$$

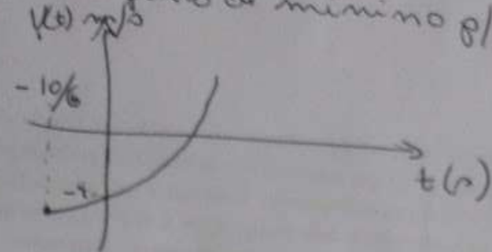
Logo $x_1(t) = -6 - 4t + 5t^2 + t^3$ 0.5

b) A aceleração é dada por



0.2

igualando $a_1(t)=0 \Rightarrow t=-\frac{10}{6}$ s, o que é um ponto de mínimo p/ a velocidade



0.4

Igualando a velocidade a zero, temos

$$3t^2+10t-4=0$$

$$t=\frac{-10\pm\sqrt{100+48}}{6}$$

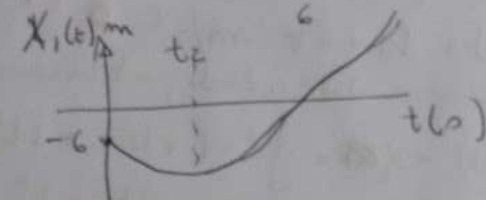
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$t_1=\frac{-10-\sqrt{148}}{6}$$

$$t_2=\frac{-10+\sqrt{148}}{6}$$

0.4

Assim



c) É um movimento uniformemente acelerado c/ $a_2 = 2\ m/s^2$. Logo

$V_2(t) = V_0 + 2t$ mas $V_2(t=0)=1$

$V_2(t) = 1 + 2t$

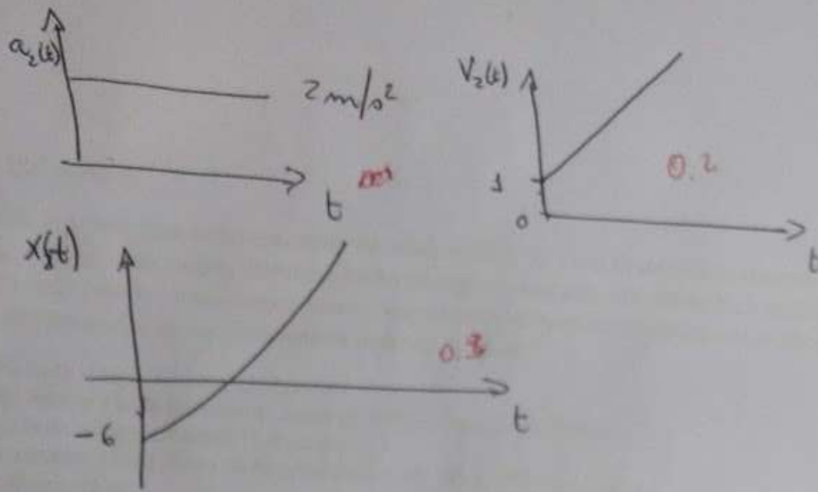
0.10

e $x_2(t) = x_0 + 1t + t^2$, mas $x_2(t=0) = -6$

$x_2(t) = -6 + 1t + t^2$

0.15

d)



e) Se $x_1(t) = x_2(t)$

$$\cancel{-6} - 4t + 5t^2 + t^3 = \cancel{-6} + 1t + t^2$$

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0$$

$$t(t^2 + 4t - 5) = 0$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \quad \begin{cases} \frac{-4+6}{2} = 1s \\ \cancel{\frac{-4-6}{2} = -5s} \end{cases}$$

Tempo de encontro $t = 1s$ e 0.6

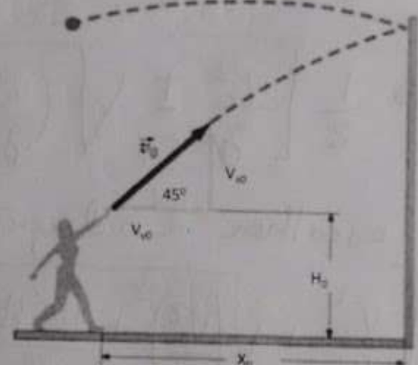
posição $x_1(t) = -6 - 4 + 5 + 1 = -4\,m$ 0.5

Questão 2. (3,5 pontos)

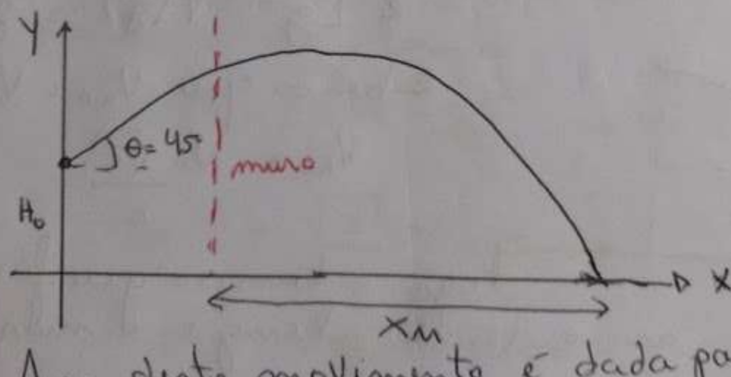
Um jogador de basquete atira uma bola contra um muro vertical X_0 à sua frente (figura abaixo). A bola está H_0 acima do chão quando abandona a mão do jogador com uma velocidade $\mathbf{V_0}$, a qual faz 45° com a normal. Quando a bola atinge o muro, a componente vertical da velocidade não se altera, e a componente horizontal de sua velocidade é revertida. Pede-se:

a) Onde a bola atingiu o chão? (1.0 ponto)
b) Quanto tempo a bola ficou no ar antes de atingir o muro? (1.0 ponto)
c) Onde a bola atingiu o muro? (1.0 ponto)
d) Quanto tempo a bola ficou no ar após abandonar o muro? (0.5 pontos)

Ignore a resistência do ar.



a) O muro pode ser ignorado no processo e podemos redesenhar como:



X_M é a distância entre a bola e o muro

A eq. deste movimento é dada por

$$y = y_0 + \tan\theta\, x - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta}\, x$$

mas $y_0 = H_0$, $\tan\theta = 1$, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ temos

$$y = H_0 + x - \frac{g}{2V_0^2\frac{1}{2}}x^2$$

P/ cair no chão: $y = 0$

$$-\frac{g}{V_0^2}x^2 + x + H_0 = 0 \quad \text{ou}$$

$$x^2 - \frac{V_0^2}{g}x - \frac{V_0^2 H_0}{g} = 0$$

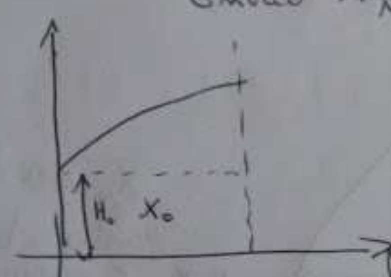
logo $$x = \frac{1}{2}\left[\frac{V_0^2}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 + \frac{4V_0^2H_0}{g}}\right]$$

temos que escolher a solução com sinal (+)

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{V_0^2}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 + \frac{4V_0^2H_0}{g}}\right]$$

Então $$x_M = \frac{1}{2}\left[\frac{V_0^2}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 + \frac{4V_0^2H_0}{g}}\right] - x_0$$

b)



Sabemos que $V_{x0} = V_0 \cos 45°$

$$V_{x0} = V_0\frac{\sqrt{2}}{2}$$

logo o tempo que ficou no ar antes de atingir o muro é

$$X_0 = V_{x0}\, t$$

$$X_0 = V_0\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2X_0}{V_0\sqrt{2}}}$$

c) O y do mov. em termos do tempo é

$$y = y_0 + V_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$$

$$V_{0y} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 \ ; \ y_0 = H_0$$

para obter a posição que atinge o muro temos que usar $t = \frac{2 x_0}{\sqrt{2} V_0}$

$$y = H_0 + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cancel{V_0} \cdot \frac{\cancel{2} x_0}{\cancel{\sqrt{2}} \cancel{V_0}} - \frac{g}{2} \left(\frac{2 x_0}{\sqrt{2} V_0} \right)^2$$

$$y = H_0 + x_0 - \frac{g \, 2 x_0^2}{2 V_0^2}$$

$$y = H_0 + x_0 - \frac{g x_0^2}{V_0^2}$$

d) basta calcularmos o tempo para a bola atingir o chão e subtrair o tempo calculado no item b

$$y = H_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 t - \frac{g t^2}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$-\frac{g}{2} t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 t + H_0 = 0$$

$$t^2 - \sqrt{2} \frac{V_0 t}{g} - \frac{2 H_0}{g} = 0 \quad \Big| \quad t^2 - \frac{\sqrt{2} V_0 t}{g} - \frac{2 H_0}{g} = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{2} V_0/g \pm \sqrt{2 V_0/g + 8 H/g}}{2}$$

$$t = \frac{\sqrt{2} V_0/g + \sqrt{2 V_0^2/g^2 + 8 H_0/g}}{2} \quad \Big| \quad t = \frac{\frac{\sqrt{2} V_0}{g} + \sqrt{\frac{2 V_0^2}{g^2} + \frac{8 H_0}{g}}}{2}$$

O intervalo de tempo entre bater no mastro e cair (T) temos que vale

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{V_0}{g} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V_0^2}{g^2} + \frac{8H_0}{g}} - \frac{2x_0}{\sqrt{2}V_0}$$

Ou seja

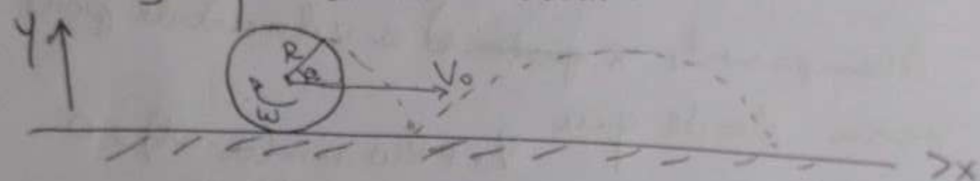
$$T = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{V_0}{g} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V_0^2}{g^2} + \frac{8H_0}{g}} - \frac{2x_0}{\sqrt{2}V_0}$$

Questão 3. (3,0 pontos)

Você está em uma plataforma de trem quando passa uma composição ao longe. Uma das rodas desta composição tem uma marca branca na borda da mesma. Considere que a roda tem um raio R e gira com velocidade angular constante ω, conforme o trem realiza um movimento retilíneo com velocidade constante V_0. Pede-se:

a) Qual é o vetor posição $\vec{r}_{RT}$ do ponto branco na borda da roda em relação ao trem? **(0.5 pontos)**
b) Qual é o vetor posição $\vec{r}_{RP}$ do ponto branco na borda da roda em relação à você na platarfoma? **(0.5 pontos)**
c) Qual é o vetor velocidade $\vec{v}_{RP}$ do ponto branco na borda do disco em relação à você? Alguma componente da velocidade se anula? Se sim para qual tempo? **(1.0 ponto)**
d) Qual é o vetor aceleração $\vec{a}_{RP}$ de um ponto branco na borda do disco em relação à você? **(0.5 pontos)**
e) Esboçe o movimento visto por você. (0.5 pontos)

A situação que temos é assim



a) Em relação ao trem podemos descrever as eq. de mov. como

$x = R\cos\varphi$
$y = R\sin\varphi$
onde $\varphi = \theta_0 - \omega t$

logo

$$\vec{r}_{RT} = R\cos(\theta_0 - \omega t)\,\hat{i} + R\sin(\theta_0 - \omega t)\,\hat{j}$$

b) Em relação a plataforma

$$x = x_0 + V_0 t + R\cos\varphi$$

desta forma

$$\vec{r}_{RP} = \left(x_0 + V_0 t + R\cos(\theta_0 - \omega t)\right)\hat{i} + R\sin(\theta - \omega t)\,\hat{j}$$

p/ calcular a velocidade em relação a plataforma basta derivarmos

$$\vec{V}_{rp} = \frac{d\vec{r}_{RP}}{dt}$$

$$\vec{V}_{rp} = \left(V_0 + R\omega \sin(\theta_0 - \omega t)\right)\hat{i} - \omega R \cos(\theta_0 - \omega t)\hat{j}$$

$$\vec{V}_{rp} = \left(V_0 + R\omega \sin(\theta_0 - \omega t)\right)\hat{i} - \omega R \cos(\theta_0 - \omega t)\hat{j}$$

A componente x ~~pode~~ ed a velocidade pode zerar desde que $V_0 + R\omega \sin(\theta_0 - \omega t) = 0$

na condição de rolar sem deslizar

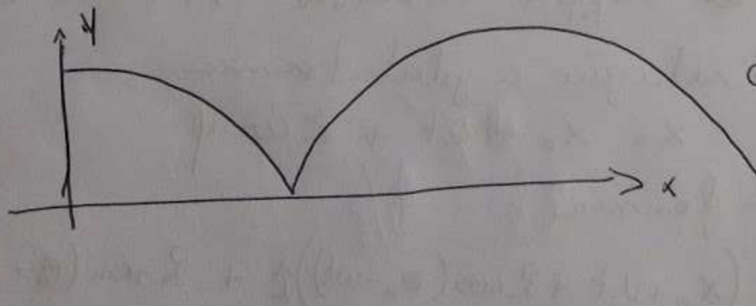
$V_0 = R\omega \Rightarrow 1 + \sin(\theta_0 - \omega t) = 0$

basta t ser tal que $\sin(\theta_0 - \omega t) = -1$

d) p/ calcular a aceleração basta derivar mais 1 vez

$$\vec{a}_{rp} = -R\omega^2 \cos(\theta_0 - \omega t)\hat{i} - R\omega^2 \sin(\theta_0 - \omega t)\hat{j}$$

e)



cicloide!