Cálculo II, P1 - A - Diurno 2018

1) Resolva o problema de valor inicial incompleto

$y''(x) + y(x) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$

Sol.: $y''(x) + y(x) = 0$ Eq. Dif.

Proposta de Solução do tipo $y(x) = e^{rx}$

Leva a trocar
$y'' \to r^2$
$y' \to r$
$y \to 1$

$r^2 + 1 = 0$ Eq. Caraterística

(Tipo III)

$r^2 = -1$

$r = \pm i = \alpha \pm i\beta$

$\alpha = 0$ e $\beta = 1$

$y_{gh}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$

$= \underbrace{e^{0x}}_{1}\left[C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)\right]$

$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)} \quad \boxed{C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}}$

Para usar a restrição disponível devemos derivar

$y'_{gh}(x) = -C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$

$\underbrace{y'(0) = 0}_{\text{restrição}} = -C_1 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} + C_2 \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$\boxed{0 = C_2}$

Existem infinitas soluções do P.V.I. incompleto da forma

$\boxed{y_{\substack{PVI \\ incompleto}}(x) = C_1 \cos(x) \quad / \quad C_1 \in \mathbb{R}}$

2) Calcule a área limitada pela reta $y = \frac{5}{2}$ (2 e a curva paramétrica $x(t) = t - \frac{1}{t}$, $y(t) = t + \frac{1}{t}$

<u>Sol.:</u> Este mesmo problema está resolvido no vídeo 55 do curso: "Exemplo de Cálculo de Área

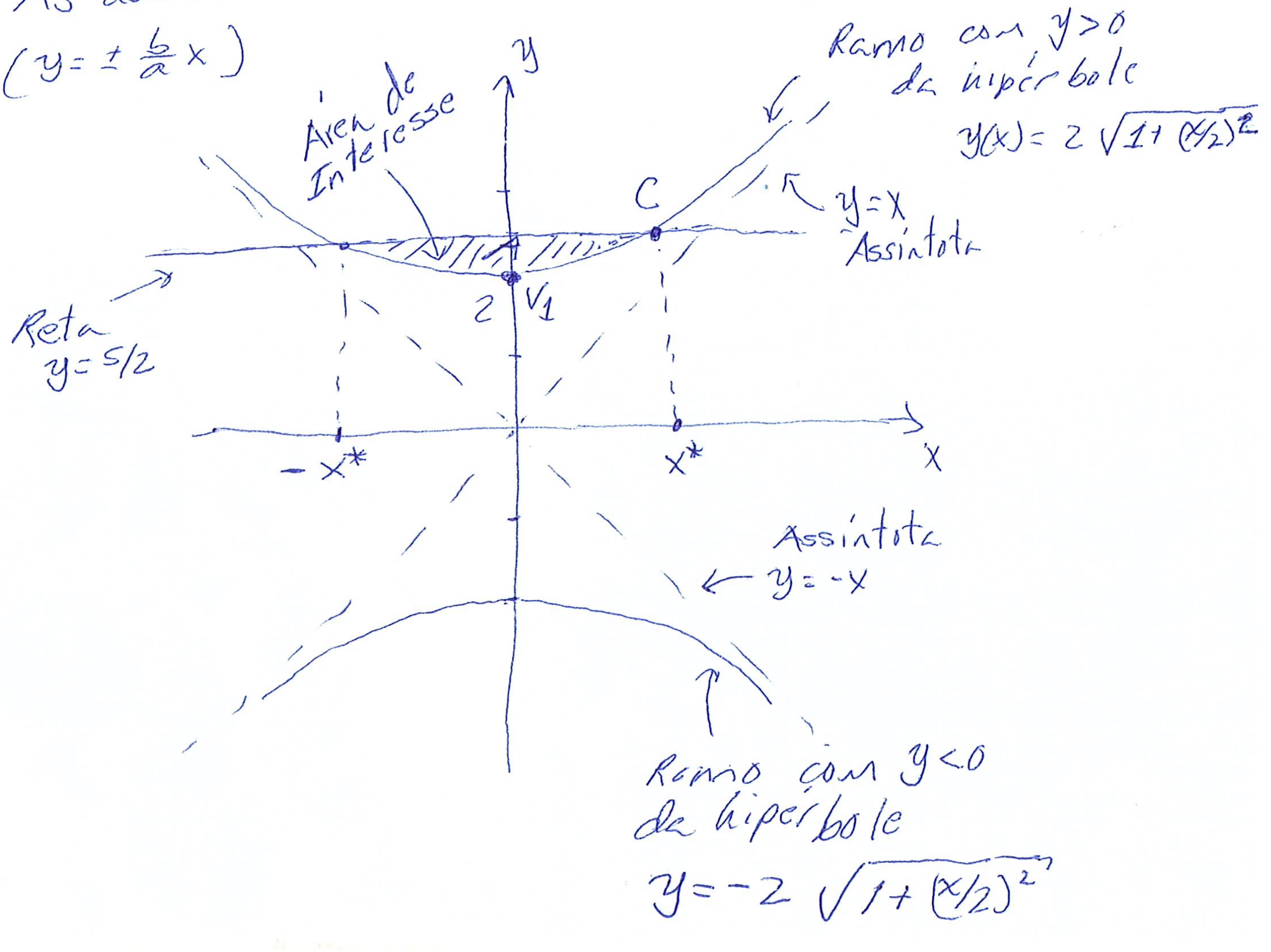
$$\begin{cases} (I)\ x(t) = t - \frac{1}{t} \xRightarrow{\text{elevando ao quadrado}} x^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \\ (II)\ y(t) = t + \frac{1}{t} \Rightarrow y^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Logo, $y^2 - x^2 = 4$ ou

$\boxed{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1}$ Forma Padrão centro em (0,0)

(III) $\boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$ Hipérbole Equilátera ($a = b = 2$) com y como eixo focal. Quando $x = 0$ temos que $y = \pm 2$ (Vértices em $V_1 = (0,2)$ e $V_2 = (0,-2)$)

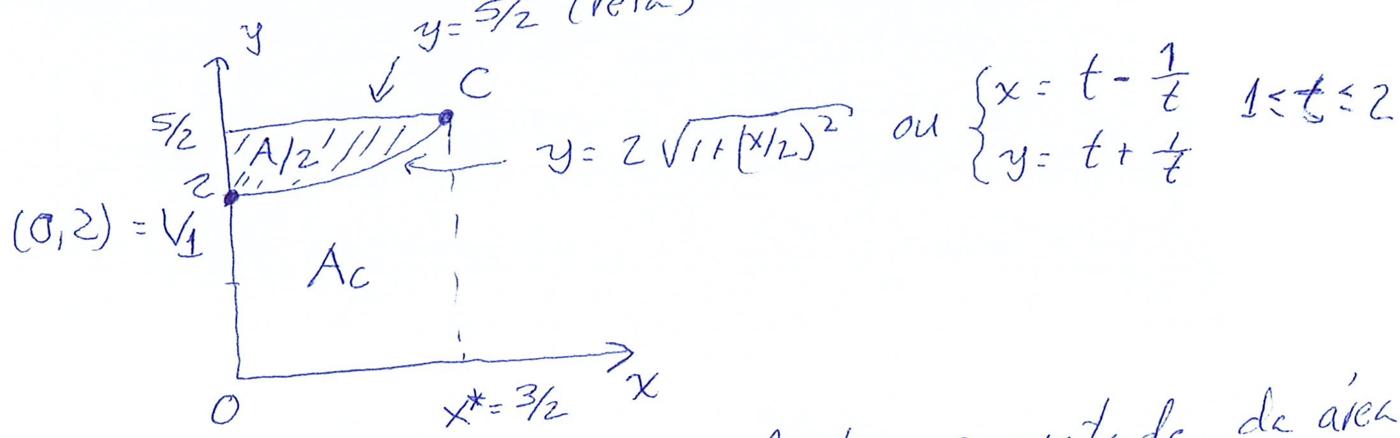
As assintotas inclinadas são as retas $y = x$ e $y = -x$ ($y = \pm \frac{b}{a} x$)



De (III) temos que $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Logo $\boxed{y(x) = \pm 2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$ (IV) Ramos da Hipérbole

Note $y(-x) = y(x)$ tanto usando a eq. da reta $y = 5/2$ como a eq. do ramo superior (e inferior) da hipérbole. Isto é, o problema é simétrico em relação ao eixo y.



- Usando a simetria vamos calcular a metade da área $(A/2)$. Note que no ponto $V_1 = (0,2)$ o valor do parâmetro é $t = 1$ $\left(x(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0,\ y(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2\right)$. No ponto $C = (x^*, 5/2)$ temos que $y = \frac{5}{2} = t + \frac{1}{t}$ logo $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$
$(t-2)(t-\frac{1}{2}) = 0$ ou $t = 2$ e $t = 1/2$. Segue que $x(2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
e $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$. Isto é, $x^* = 3/2$.

- Temos também que $\boxed{\frac{A}{2} + A_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}}$ V

- A área embaixo do ramo com $y > 0$ e $x > 0$ da hipérbole indicada na figura acima (A_c) é calculada de forma paramétrica

$$A_c = \int_1^2 y(t)\, x'(t)\, dt = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$A_c = \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2\ln(t) - \frac{1}{2t^2}\right)\Big|_1^2$$

$$A_c = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}_{0}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$A_c = \frac{3}{2} + 2\ln(2) + \frac{3}{8} = 2\ln(2) + \frac{15}{8}$$

Voltando em (IV)

$$\frac{A}{2} = \frac{15}{4} - A_c$$

$$\frac{A}{2} = \frac{15}{4} - 2\ln(2) - \frac{15}{8} = \frac{15}{8} - 2\ln(2)$$

$$\boxed{A = \frac{15}{4} - 4\ln(2)} \blacksquare$$

3) Determine se a série converge ou diverge. Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Sol.: Vamos usar o teste da razão

$$a_n = \frac{n}{2^n} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n+1}{n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \frac{1}{2} = L < 1$$

Logo, a série dada é convergente.

4) Determine e justifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$$

Sol.: Vamos estudar duas séries

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ (série dada)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

- Começando pela segunda (ii). Seja $b_n = \frac{1}{5+n}$ e $c_n = \frac{1}{n}$

Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica (ou p, com p=1) que é divergente.

Usando o Teste de Comparação no Limite temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{c_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{5+n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5+n}\right) = 1 \quad \boxed{\text{existe e é finito}}$$

Logo, como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge temos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

- Agora estudamos i). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5+n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$

É uma série alternada. Vamos usar o teste da série alternada.

a) $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5+n}\right) = 0$ ✓

b) $b_{n+1} = \frac{1}{6+n}$

$6+n > 5+n \iff \frac{1}{6+n} < \frac{1}{5+n} \implies b_{n+1} < b_n \implies b_n$ é decrescente ✓

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é convergente.

continua...

Adicionalmente, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (6)

é divergente temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é condicionalmente convergente.

5) a) Escreva a função no integrando como uma série de potências. b) Calcule a integral, indefinida deixando o resultado como uma série.

$$\int e^{x^3} dx$$

Sol.: Vamos encontrar primeiro a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$. Isto é, queremos escrever

$$(I)\ \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \quad \text{onde os} \quad \boxed{b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}\ (II)$$

$f^{(n)}(x)$ significa a derivada n-ésima de $f(x)$.

Temos $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$

$f^{(1)}(x) = e^x$

$f^{(2)}(x) = e^x$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x$

Avaliando $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

Usando (II) e voltando em (I) temos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Vamos usar o teste da Razão para encontrar o Raio de Convergência (R)

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{(n+1)n!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\cancel{x^n} \cdot x}{(n+1)\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}}\right| = |x| \left|\frac{1}{n+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\left|\frac{1}{n+1}\right|\right) = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

logo $R=\infty$ e a série é convergente quando $-\infty < x < +\infty$

Resumindo

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R=\infty \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

a) Queremos escrever e^{x^3} como série de potências. Para isto basta trocar x por x^3. Ou seja

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

válido quando
$-\infty < x^3 < \infty$
ou
$-\infty < x < \infty$
Ou seja, $R=\infty$

Concluimos que

$$\boxed{e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}, \quad R=\infty, \quad -\infty < x < \infty}$$

$$\boxed{e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \cdots}$$

b) $$\int e^{x^3}dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\int x^{3n}dx\right]$$

válido $\forall x \in \mathbb{R}$
pois a série é convergente
com $R=\infty$

$$\boxed{\int e^{x^3}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)}\right] + C, \quad R=\infty}$$

$$\boxed{\int e^{x^3}dx = x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{2!\,7} + \frac{x^{10}}{3!\cdot 10} + \cdots}$$