EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

ARC Lab
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

SEM0501
Dinâmica Aplicada às Máquinas

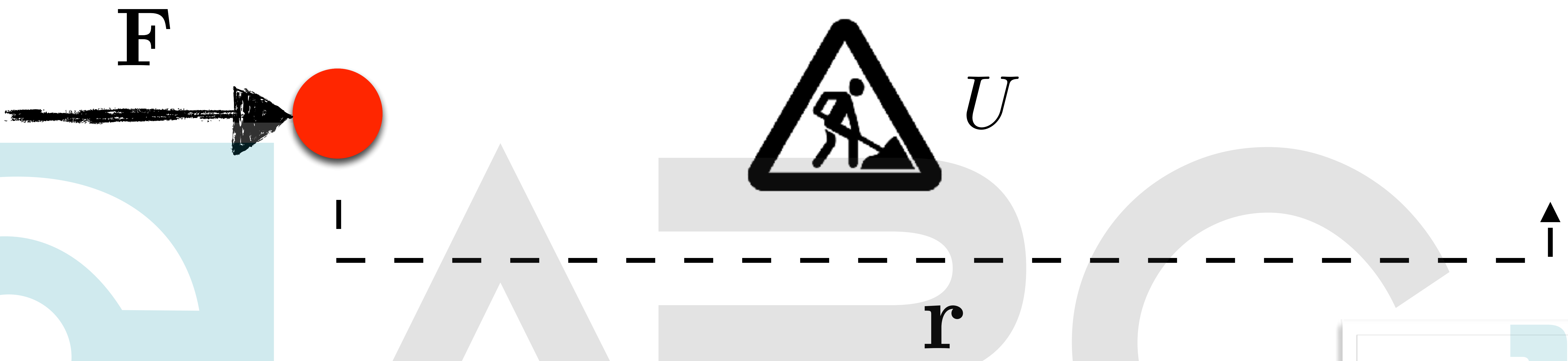
Aula #16 — Forças conservativas e conservação da energia; princípio do trabalho para corpos rígidos

Prof. Dr. Thiago Boaventura
tboaventura@usp.br

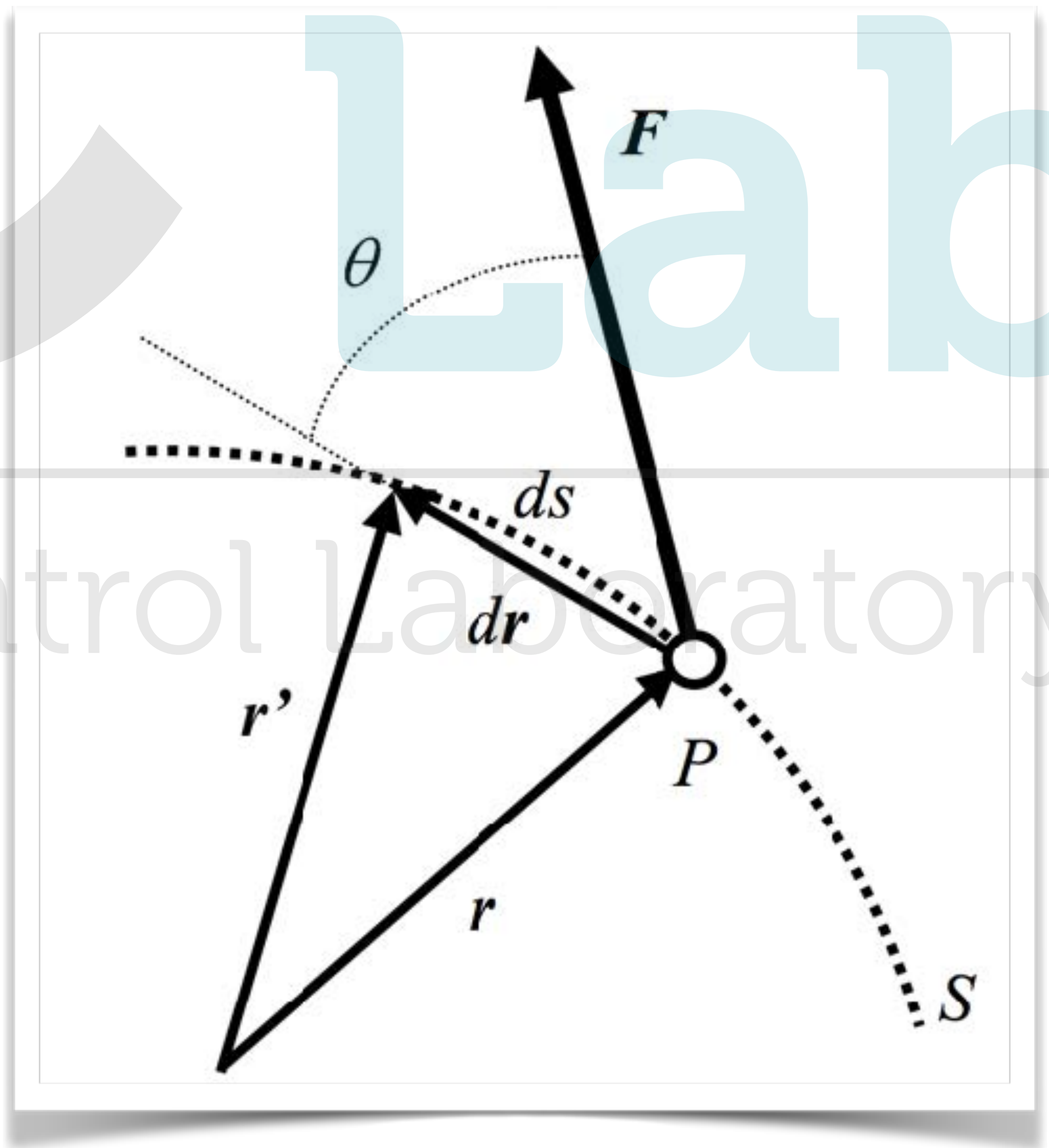
São Carlos, 19/10/18

Revisão aula passada...

Trabalho de uma força



$$U = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \ cos\theta \ ds$$



Mucheroni, 2011

escalar

Joule

(1 J = 1 N x 1 m)

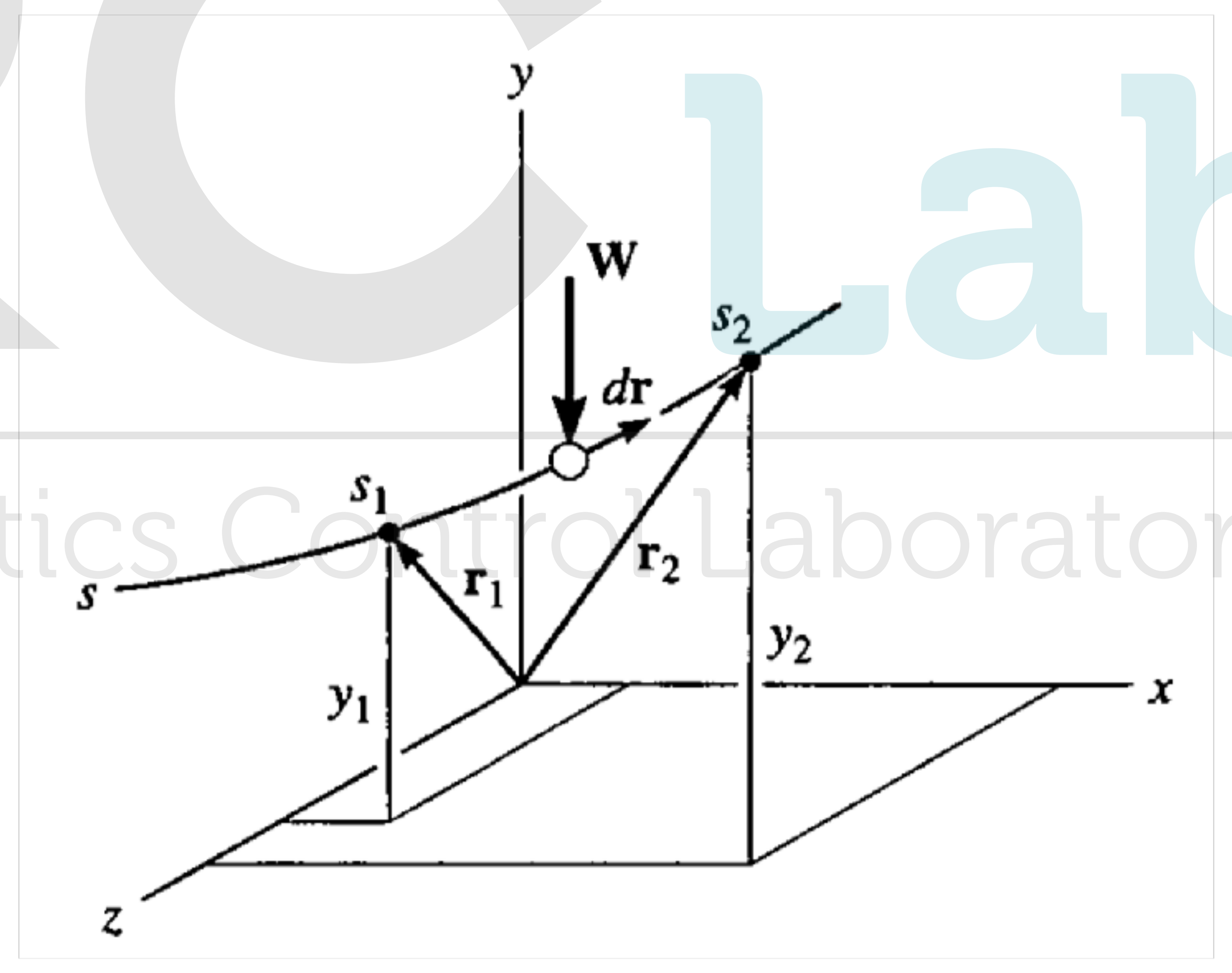
Casos particulares

Revisão aula passada...

força peso: trabalho só na direção vertical:

$$U = F_c \cos\theta \, \Delta s$$

$$U = -W \, \Delta y$$

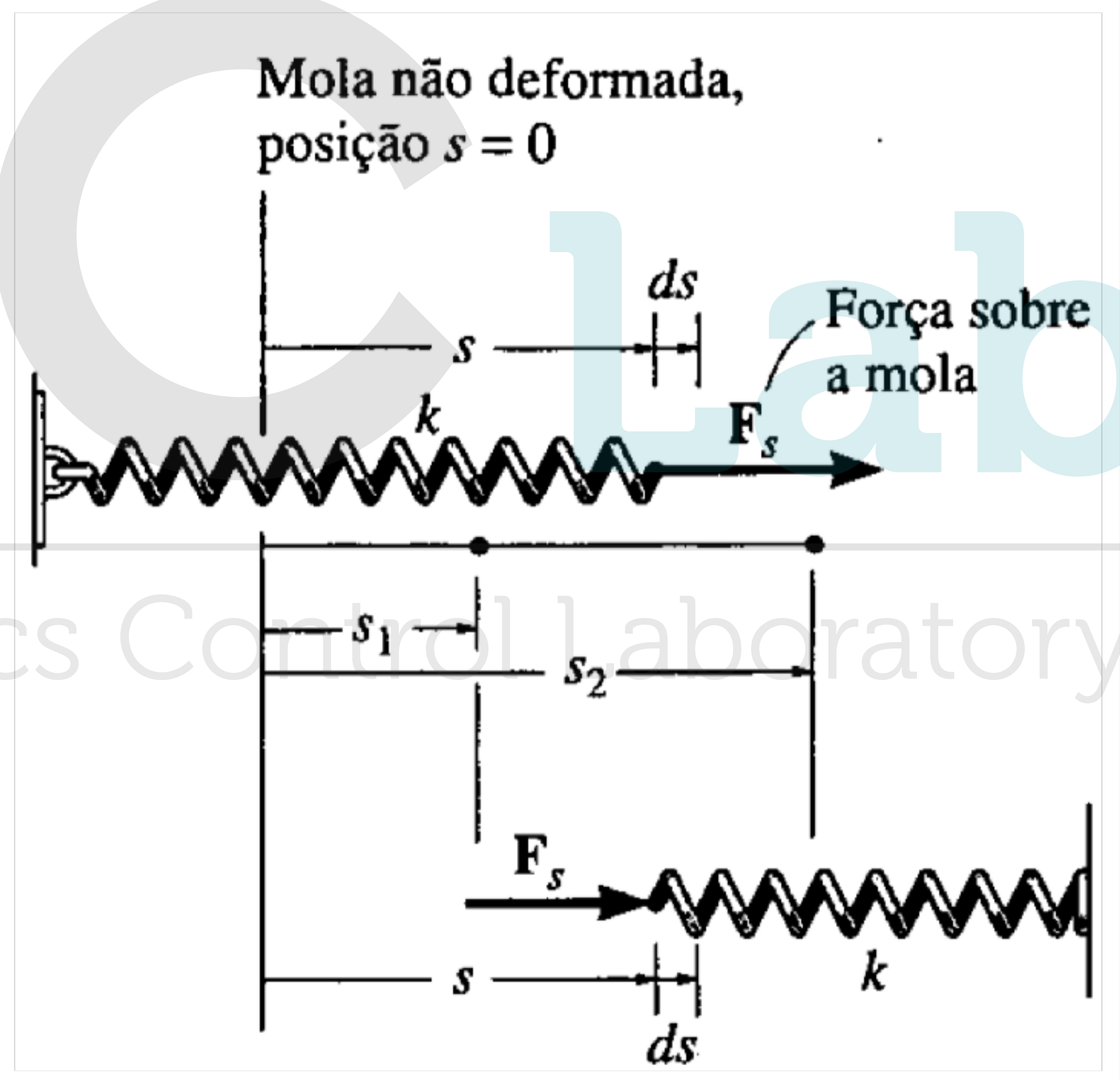


Casos particulares

Revisão aula passada...

força de uma **mola**

$$F_s = ks$$



$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s \; ds = k \int_{s_1}^{s_2} s \; ds$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(s_2^2 - s_1^2 \right)$$

Potência

$$P \equiv \frac{dU}{dt}$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}$$

Princípio do trabalho e energia

Revisão aula passada...

$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

$$\boxed{T_1 + \sum_i U_i = T_2}$$

Objetivos da aula de hoje

Introduzir forças conservativas e energia potencial
(Cap. 14.5 e 14.6)

Desenvolver expressão para energia cinética em corpos rígidos
(Cap. 18)

Conservação da energia em ação

Conteúdo

Ponto material

- Forças conservativas
- Conservação da energia
- Exemplo

Corpos rígidos

- Trabalho: força e binário
- Princípio do trabalho e energia
- Exemplo

Conclusão

- “Take-home messages”
- Próxima aula…

Conteúdo

- Forças conservativas
- Conservação da energia
- Exemplo

Ponto material

Corpos rígidos

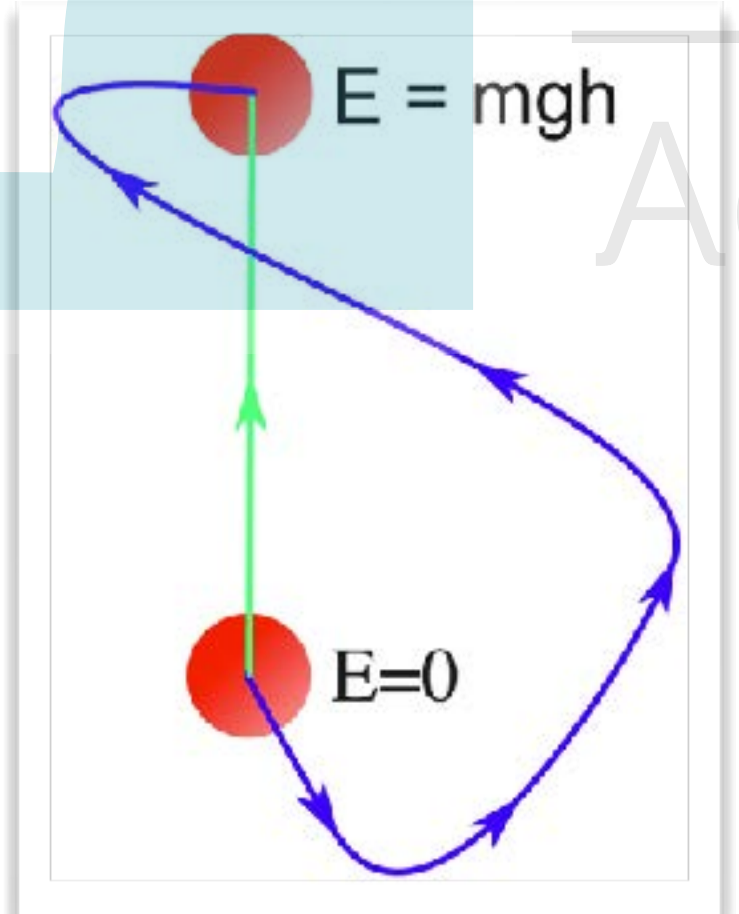
Conclusão

Advanced Robotics Control Laboratory

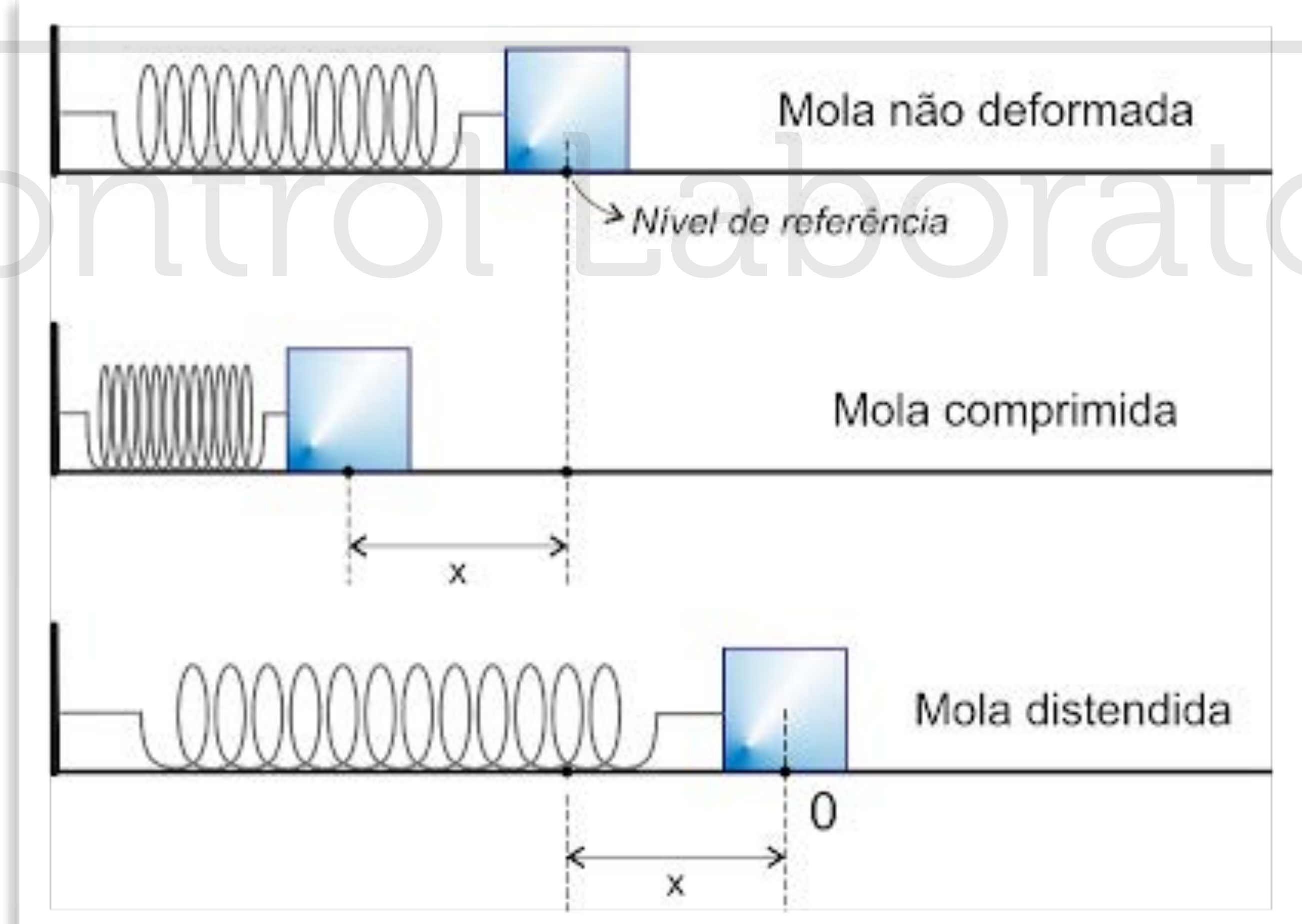
Forças conservativas

trabalho independe da trajetória
(conserva a energia!)

força gravitacional



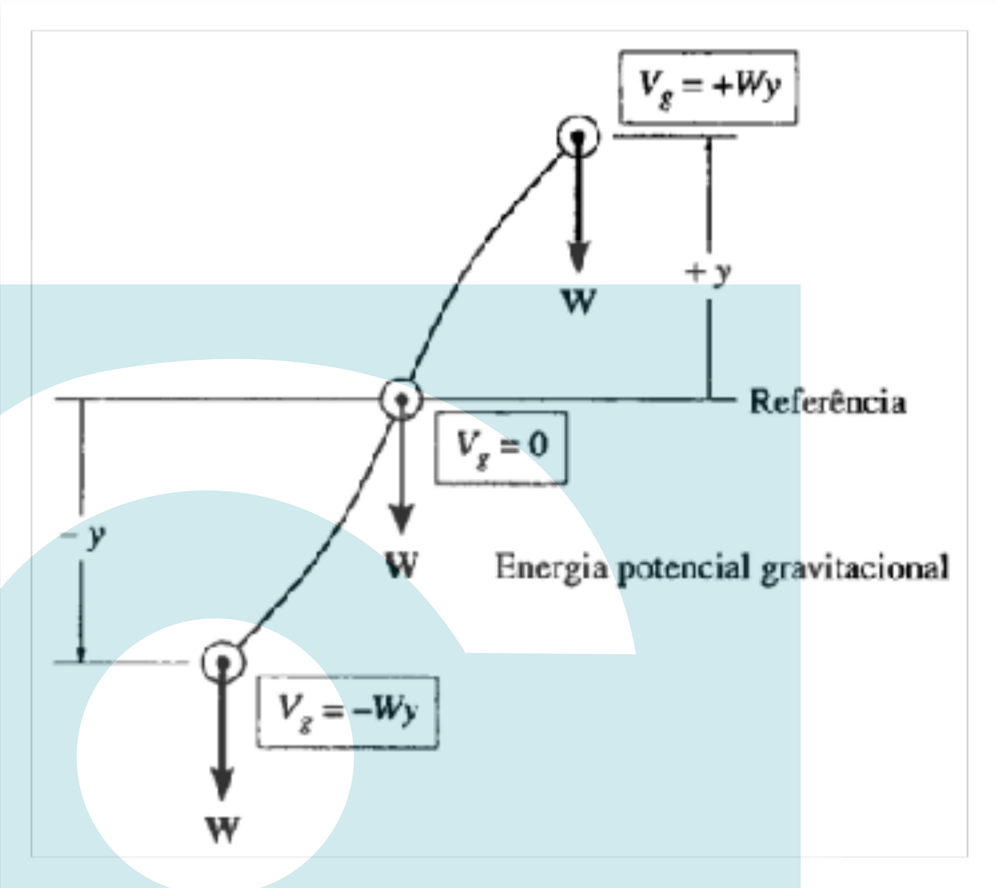
força elástica



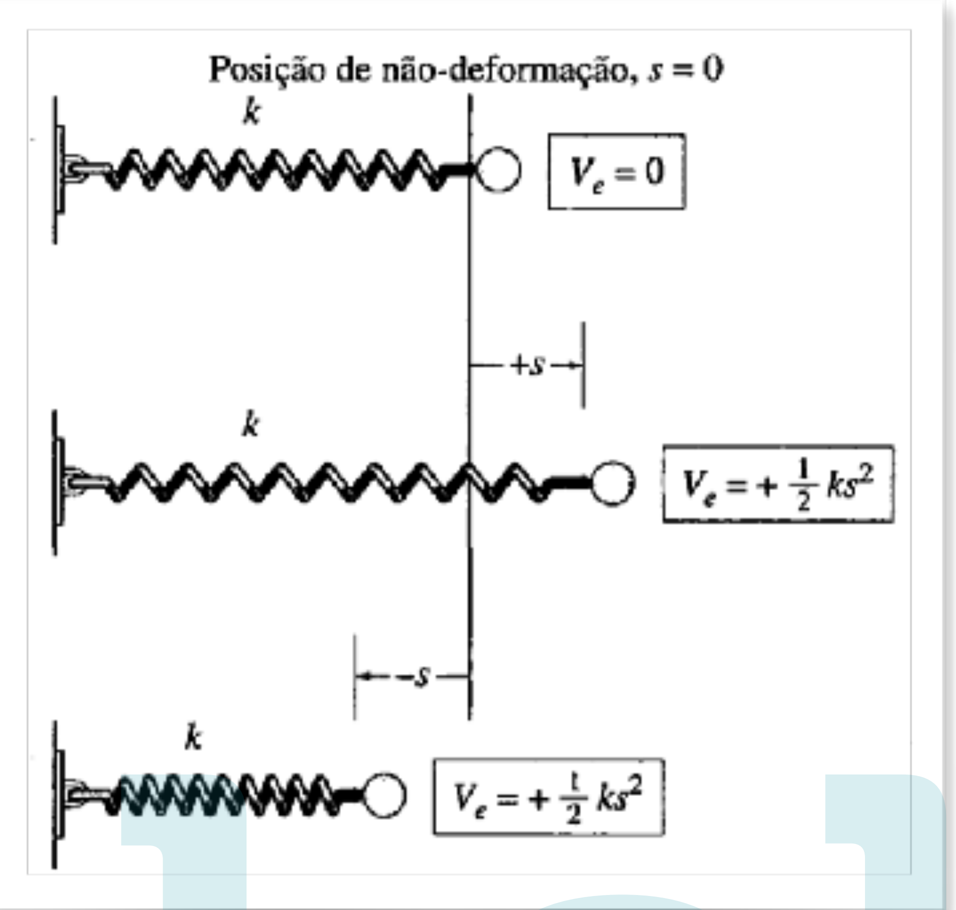
Wikipedia

Forças conservativas

Ponto material
Corpos rígidos
Conclusão



trabalho é função de uma energia potencial



energia potencial gravitacional

$$U = -W\ \Delta y$$

$$U = V_{g_1} - V_{g_2}$$

$$\boxed{V_g \equiv Wy = mg\ y}$$

$$U = V_1 - V_2$$

$$V \equiv V(x, y, z)$$

depende somente da posição

$$U = \frac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

energia potencial elástica

$$U = V_{e_1} - V_{e_2}$$

$$\boxed{V_e \equiv \frac{1}{2}ks^2}$$

Forças conservativas

$$\boxed{U = V_1 - V_2} \qquad \boxed{V \equiv V(x, y, z)}$$

$$dU = V_1(x, y, z) - V_2(x + dx, y + dy, z + dz) = -dV(x, y, z)$$

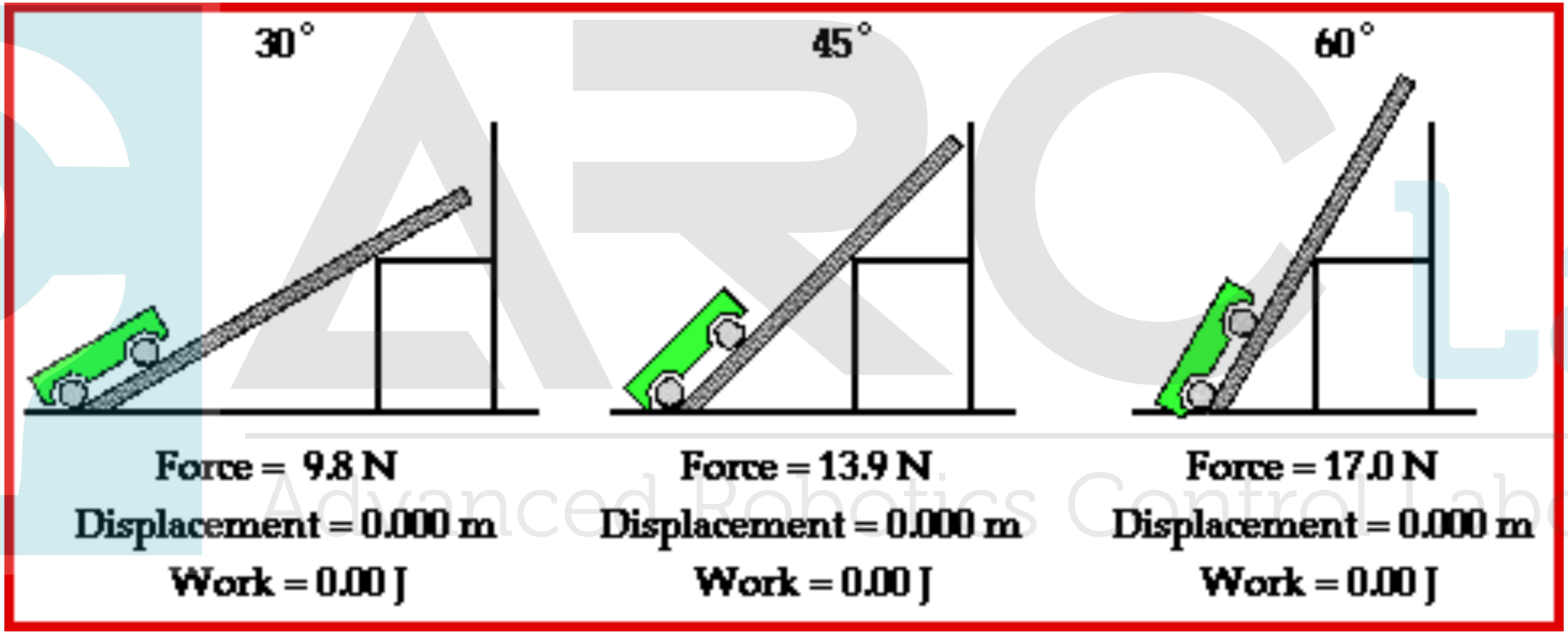
$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV(x, y, z)$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

Forças conservativas



www.physicsclassroom.com

Princípio do trabalho e energia: sistemas conservativos

princípio do **trabalho e energia**

$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

quando **todas** as forças são **conservativas:**

$$U = V_1 - V_2$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

conservação
da energia mecânica

Conservação da energia mecânica: pêndulo

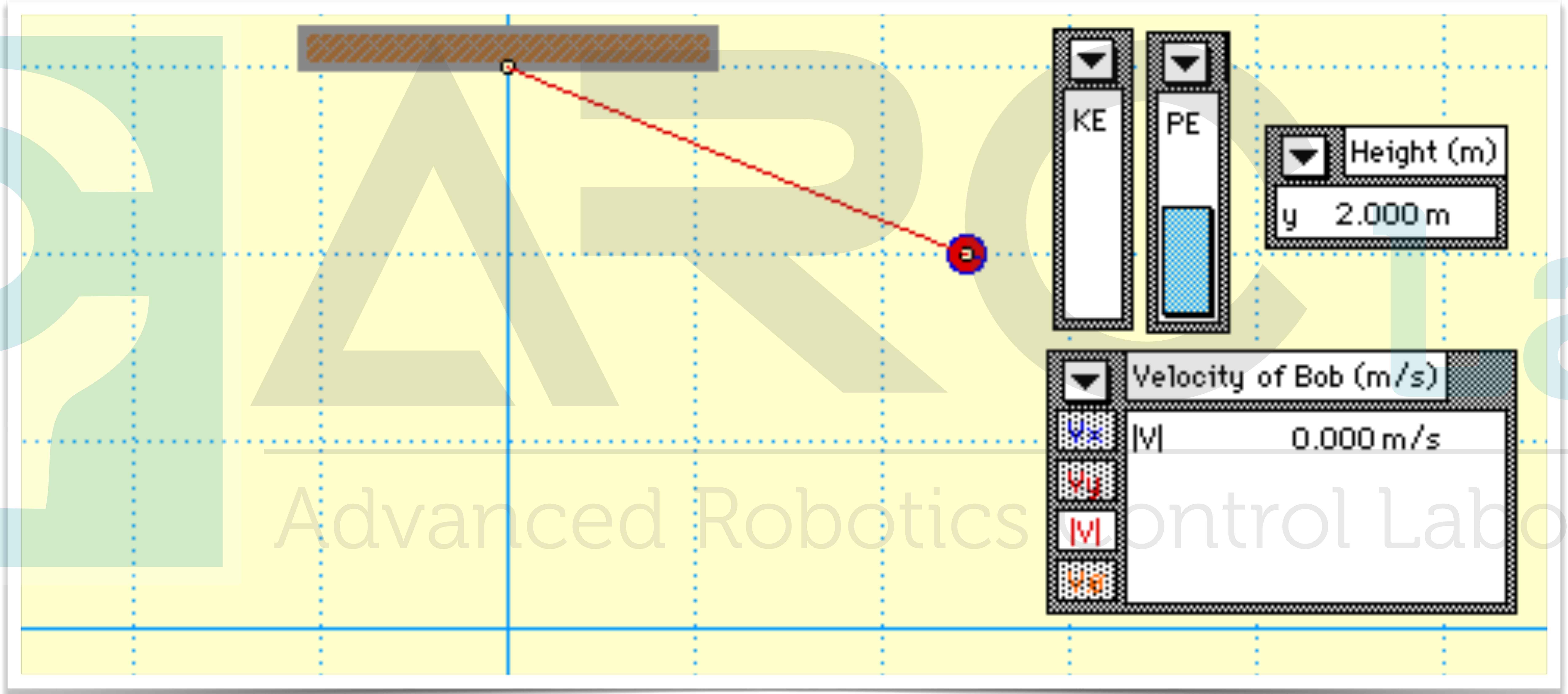
Ponto material

Corpos rígidos

Conclusão

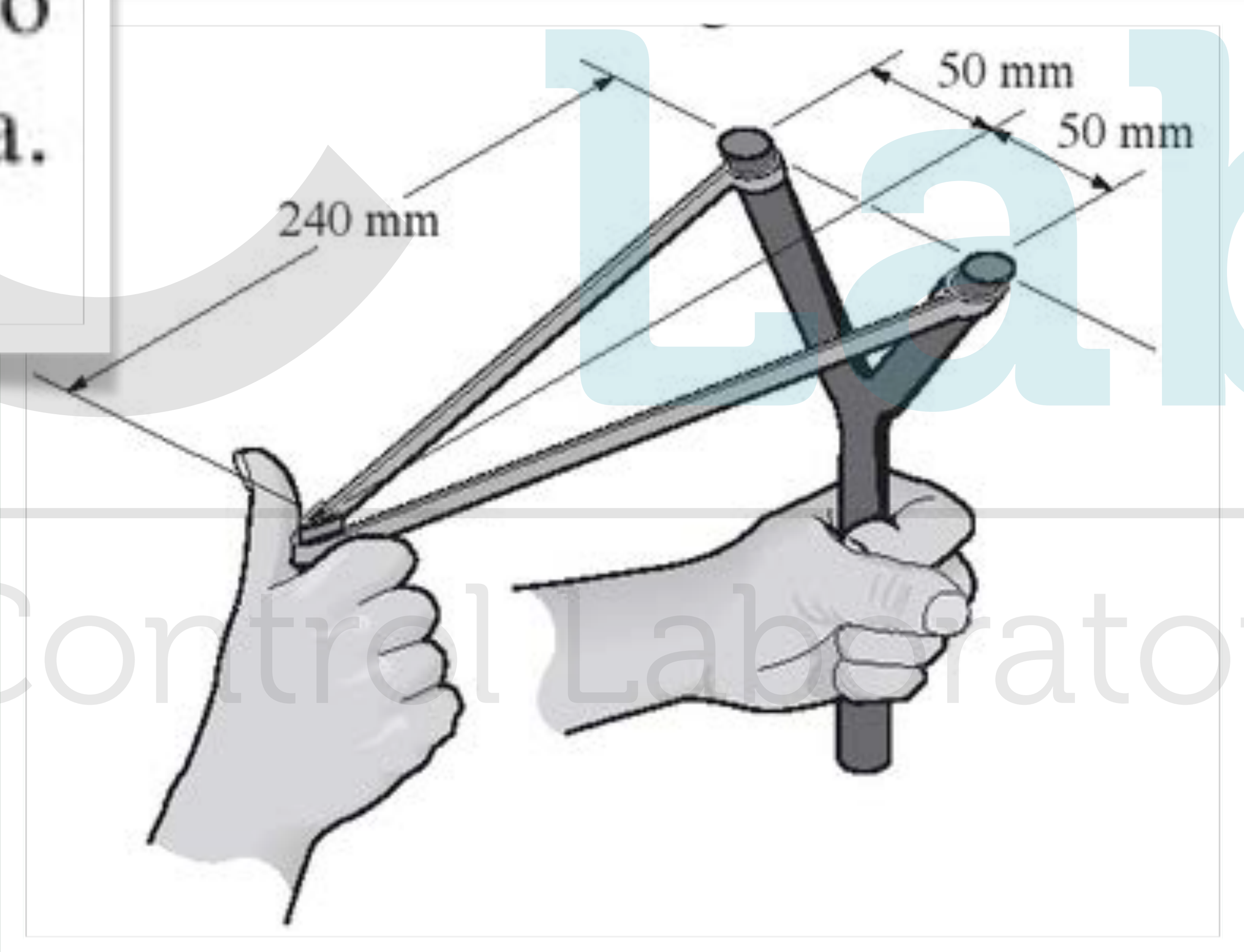
A última aula do Prof. Walter Lewin...

Conservação da energia mecânica: pêndulo



www.physicsclassroom.com

14.78. Cada uma das duas tiras de elástico do estilingue tem um comprimento não deformado de 200 mm. Se elas são puxadas para trás para a posição mostrada e soltas do repouso, determine a altura máxima que o chumbinho de 25 g vai alcançar se ele for atirado verticalmente para cima. Despreze a massa das tiras de borracha e a variação na elevação do chumbinho enquanto ele está preso pelas tiras de borracha. Cada tira de borracha tem uma rigidez de $k = 50$ N/m.



Conteúdo

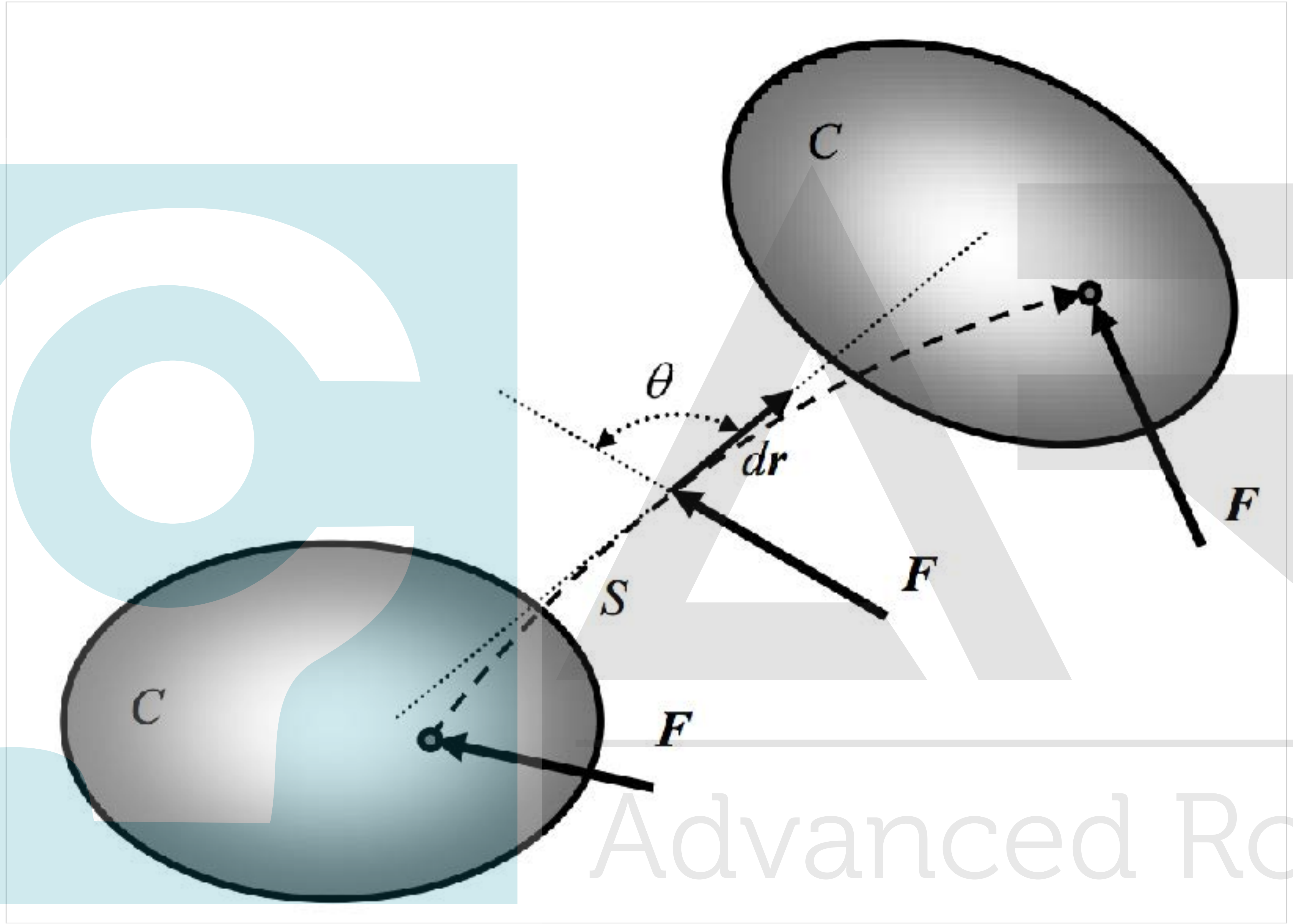
Ponto material

Corpos rígidos

- Trabalho: força e binário
- Princípio do trabalho e energia
- Exemplo

Conclusão

Trabalho de uma força externa



$$U = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\ cos\theta\ ds$$

força constante e movimento retilíneo:

$$U = F_c\ cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds = F_c\ cos\theta\ \Delta s$$

força peso:

$$U = -W\ \Delta y$$

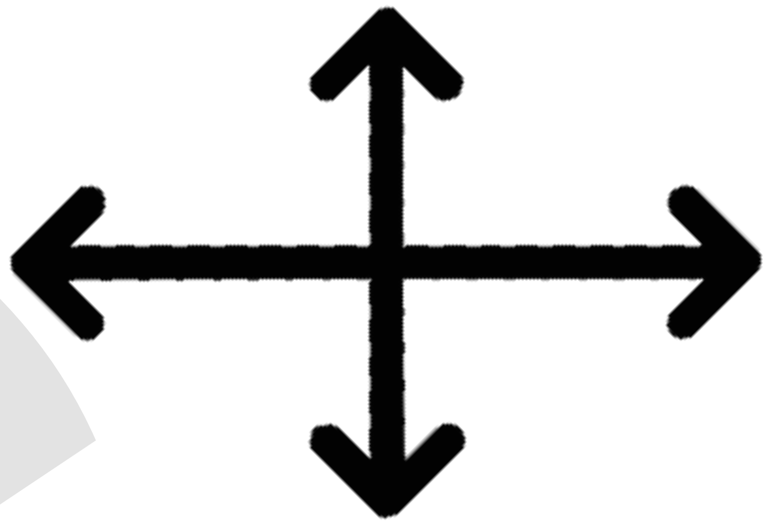
força de uma mola:

$$U = -\frac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right)$$

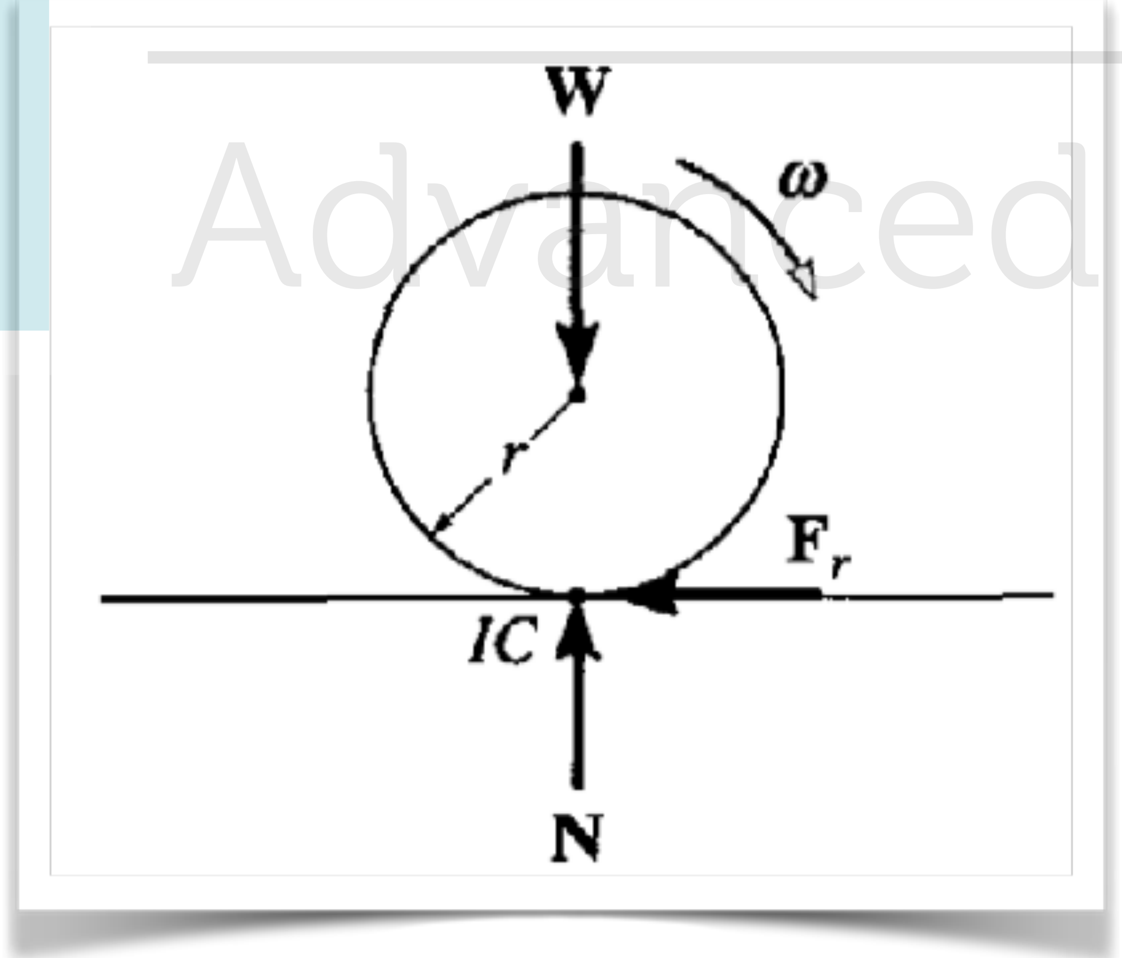
Forças que não realizam trabalho

forças internas

reações de apoio



forças perpendiculares



Forças de atrito sem escorregamento

Trabalho de um binário

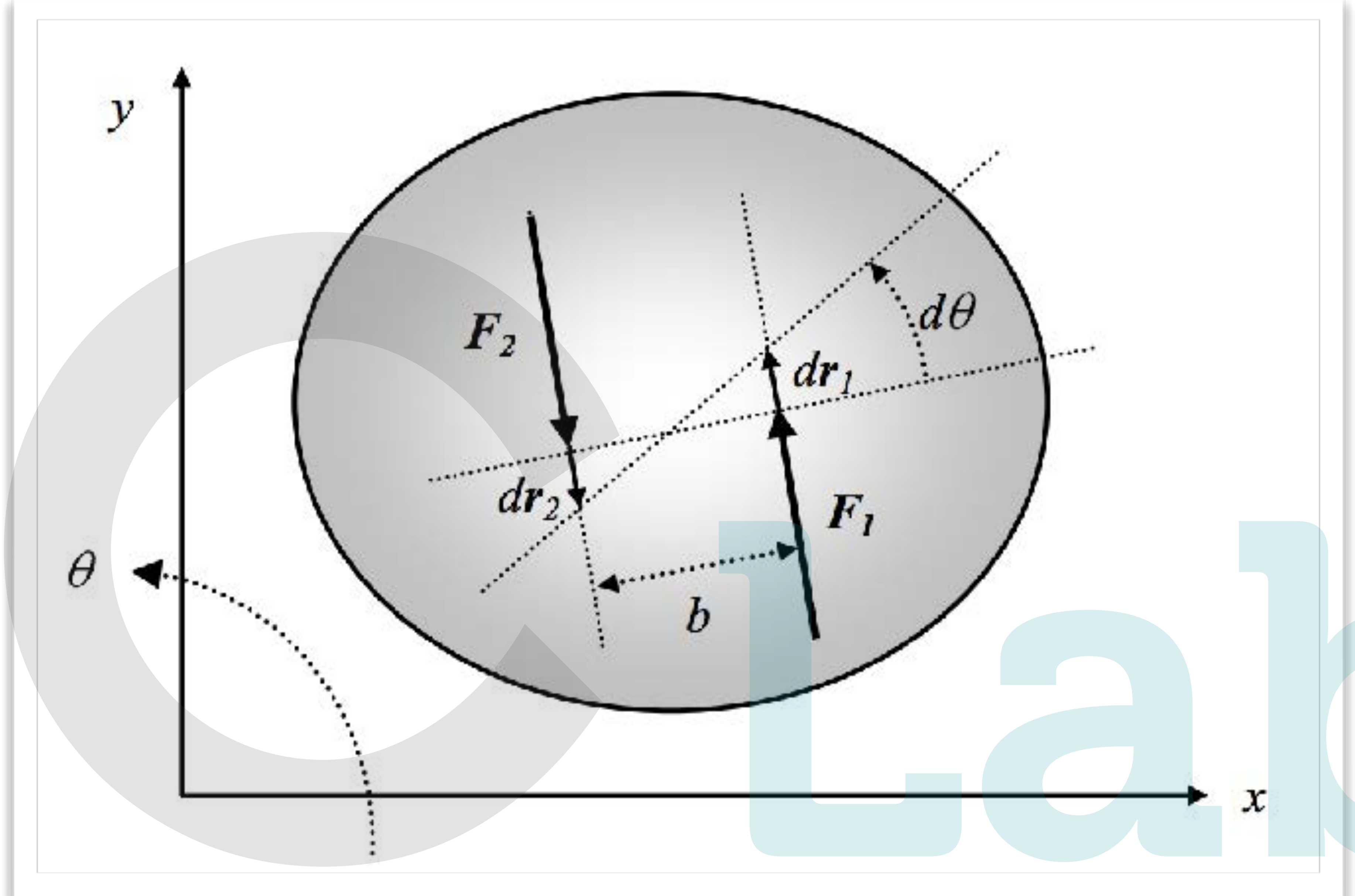
Ponto material
Corpos rígidos
Conclusão

binário
par de forças

iguais
paralelas
opostas

produzem
somente
rotação

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}b$$



trabalho: $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

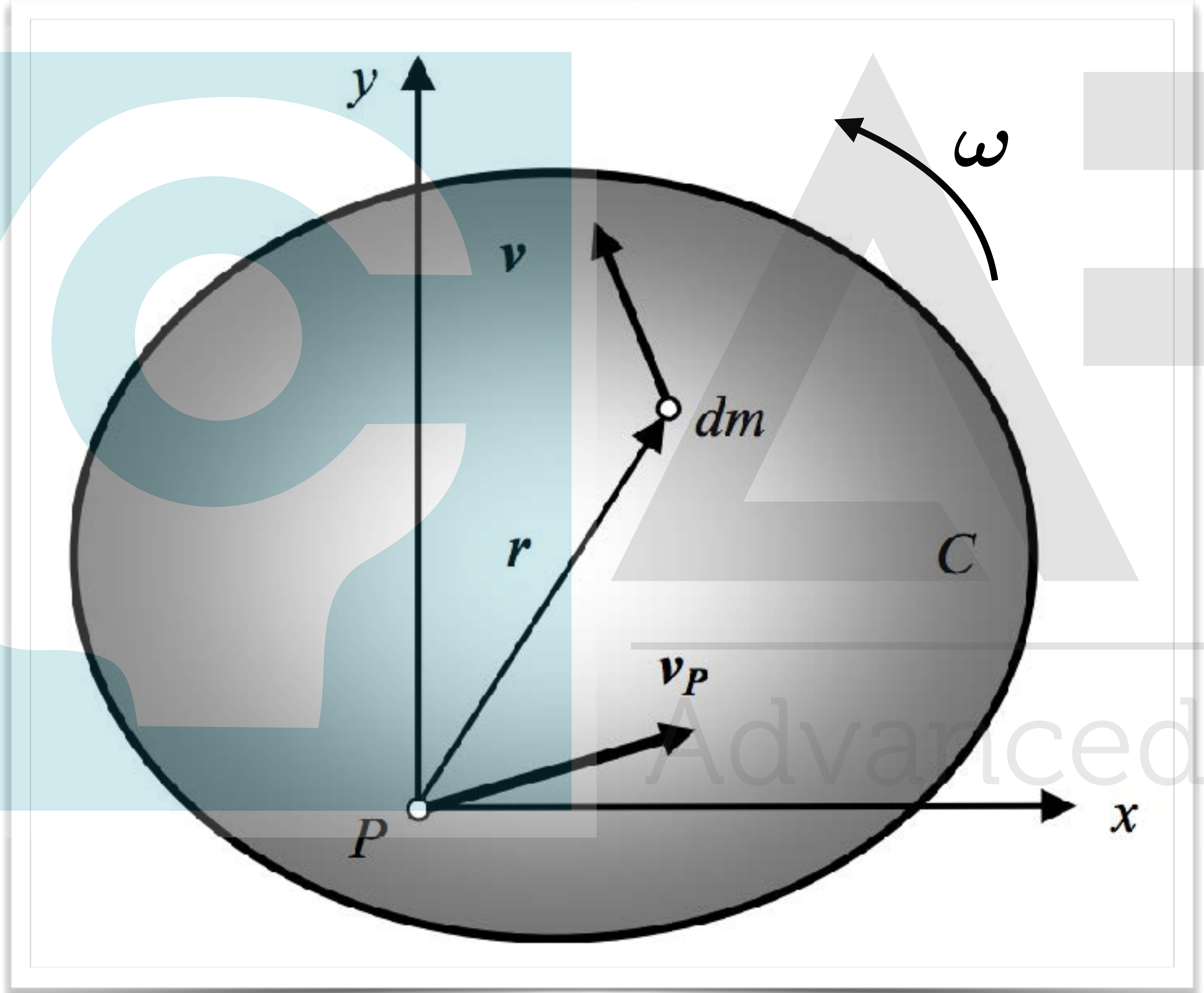
$$dU_M = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = 2F dr = Fb\ d\theta$$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 = -d\mathbf{r}_2$$

$$\boxed{U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\ d\theta}$$

$$dr = \frac{b}{2} d\theta$$

Energia cinética para um corpo rígido



partícula: $\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$

corpo rígido:

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm$$

cinemática: $\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}$

$$\mathbf{v} = v_{P_x}\mathbf{i} + v_{P_y}\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

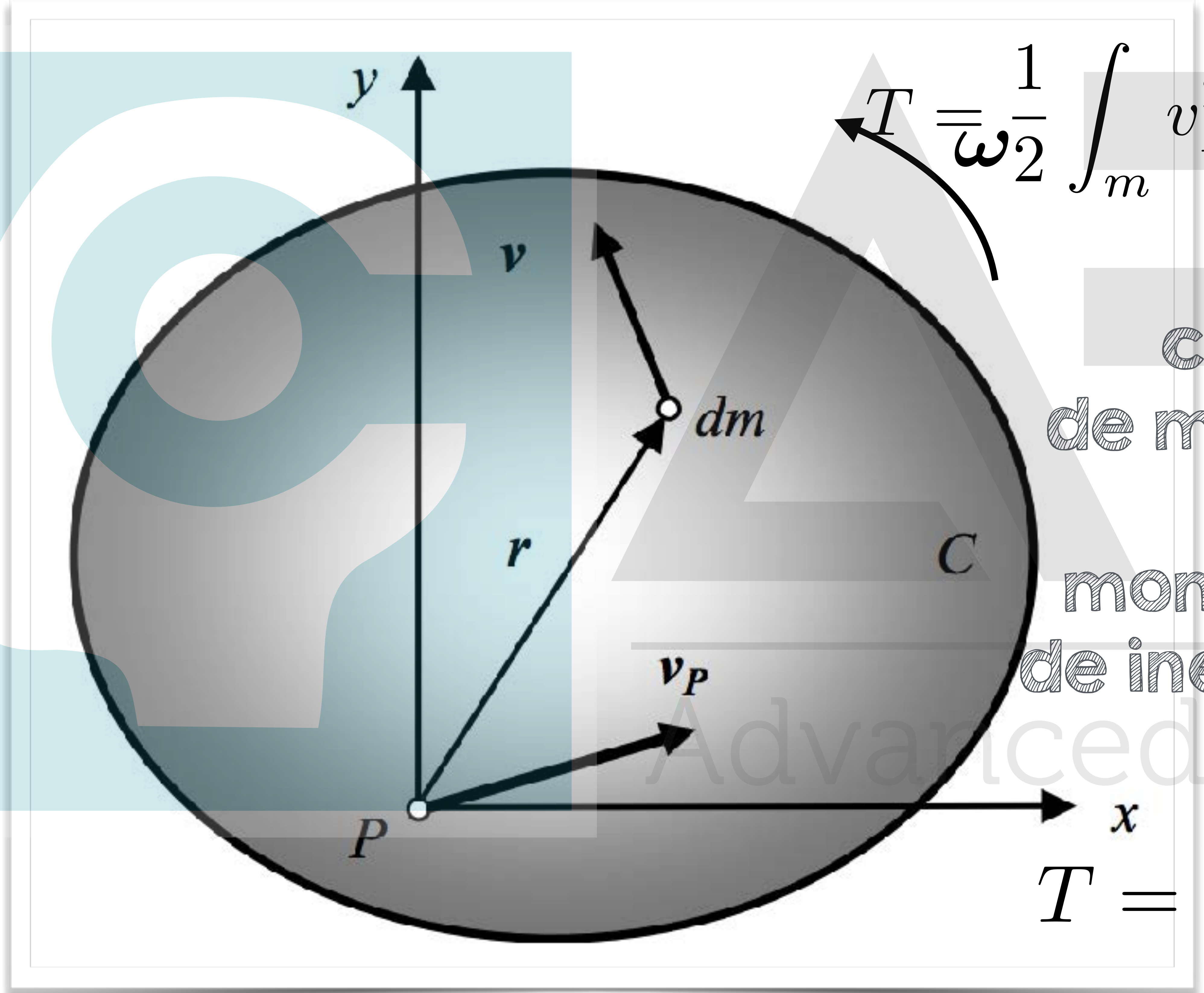
$$\mathbf{v} = (v_{P_x} - \omega y)\,\mathbf{i} + (v_{P_y} + \omega x)\,\mathbf{j}$$

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v_{P_x} - \omega y)^2 + (v_{P_y} + \omega x)^2$$

Energia cinética para um corpo rígido

$$T = \frac{1}{2}\int_m [(v_{Px} - \omega y)^2 + (v_{Py} + \omega x)^2] dm$$

$$T = \frac{1}{2}\int_m v_P^2\, dm - v_{Px}\omega \int_m y\, dm + v_{Py}\omega \int_m x\, dm + \frac{1}{2}\omega^2 \int_m r^2 dm$$



centro de massa: $x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_m x\, dm$ $\qquad y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_m y\, dm$

momento de inércia: $I_P = \displaystyle\int_m (x^2 + y^2)\, dm$

$$T = \frac{1}{2}mv_P^2 \overset{0}{\cancel{- v_{Px}\omega y_G m + v_{Py}\omega x_G m}} + \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

P = G

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2}$$

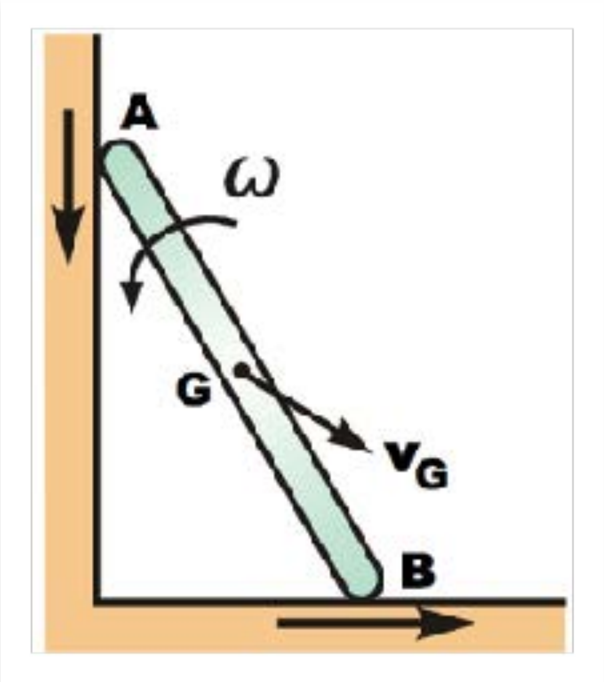
Princípio do trabalho e energia

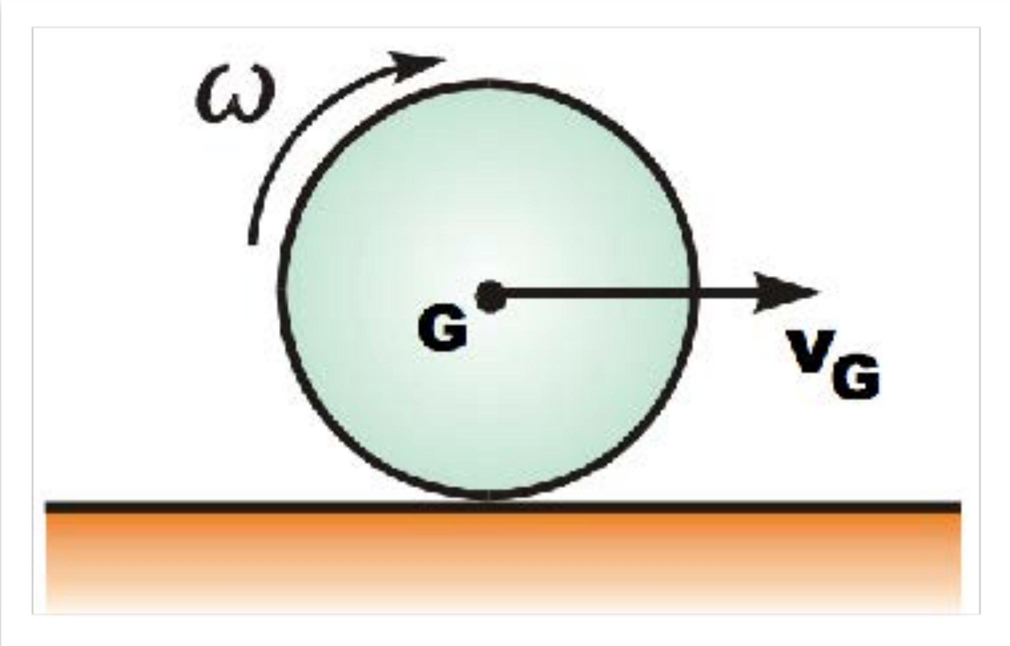
igual ao ponto material, só que diferente...

$$\sum_i U_i = T_2 - T_1$$

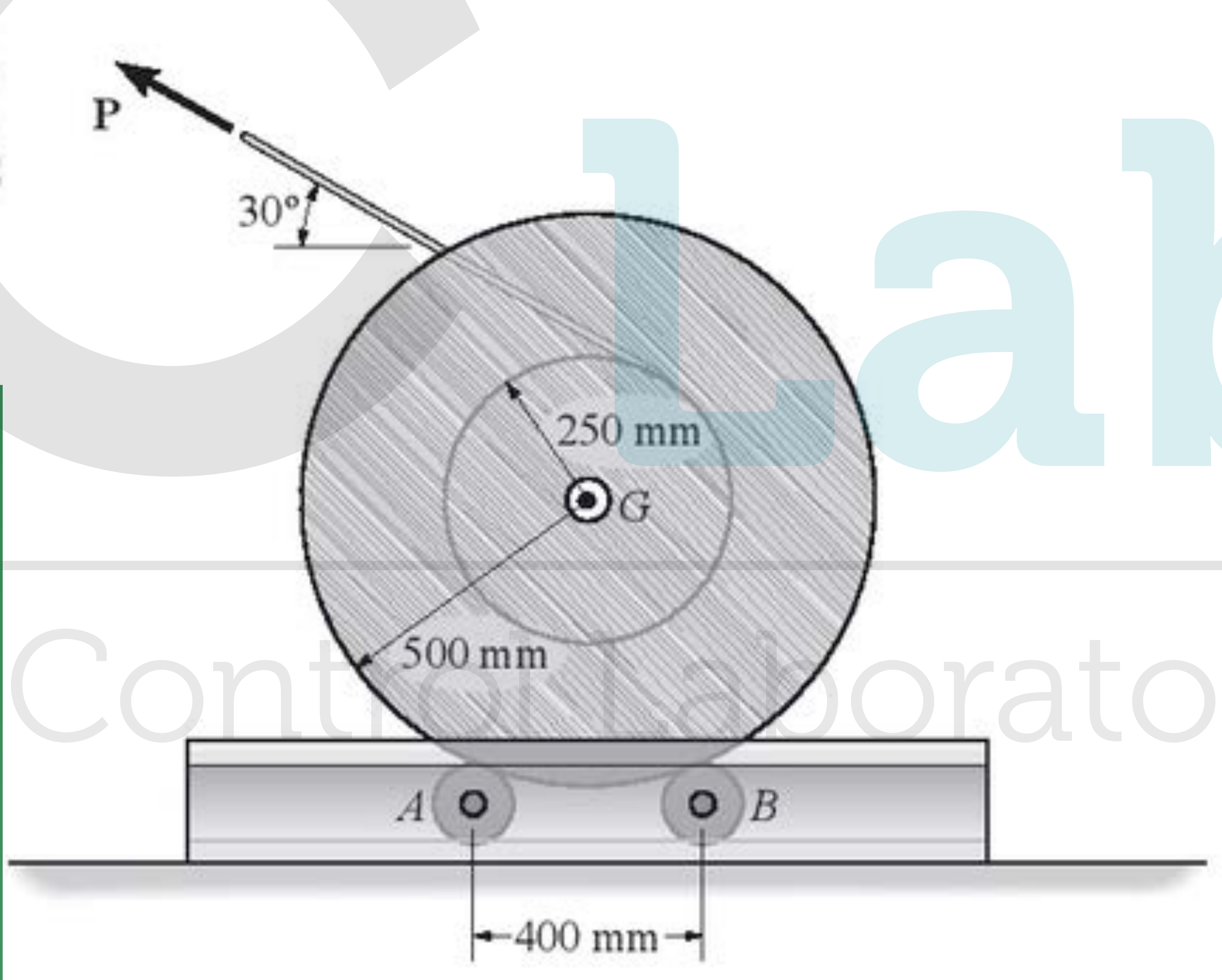
soma dos trabalhos de todas as forças externas e torques de binário

energia cinética de translação e rotação final e inicial





18.3. Uma força $P = 20$ N é aplicada ao cabo, o qual faz a bobina de 175 kg girar sem deslizar sobre os dois rolos, A e B, do distribuidor. Determine a velocidade angular da bobina após ela haver completado duas revoluções, partindo do repouso. Despreze a massa do cabo. Cada rolo pode ser considerado um cilindro de 18 kg, tendo um raio de 0,1 m. O raio de giração da bobina em relação a seu eixo central é $k_G = 0{,}42$ m.



Conteúdo

Ponto material

Corpos rígidos

Advanced Robotics Control Laboratory

- “Take-home messages”
- Próxima aula…

Conclusão

“Take-home messages”

Para forças conservativas, a energia mecânica permanece constante

Trabalho de um binário:

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \; d\theta$$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Lista de exercícios para próxima aula…

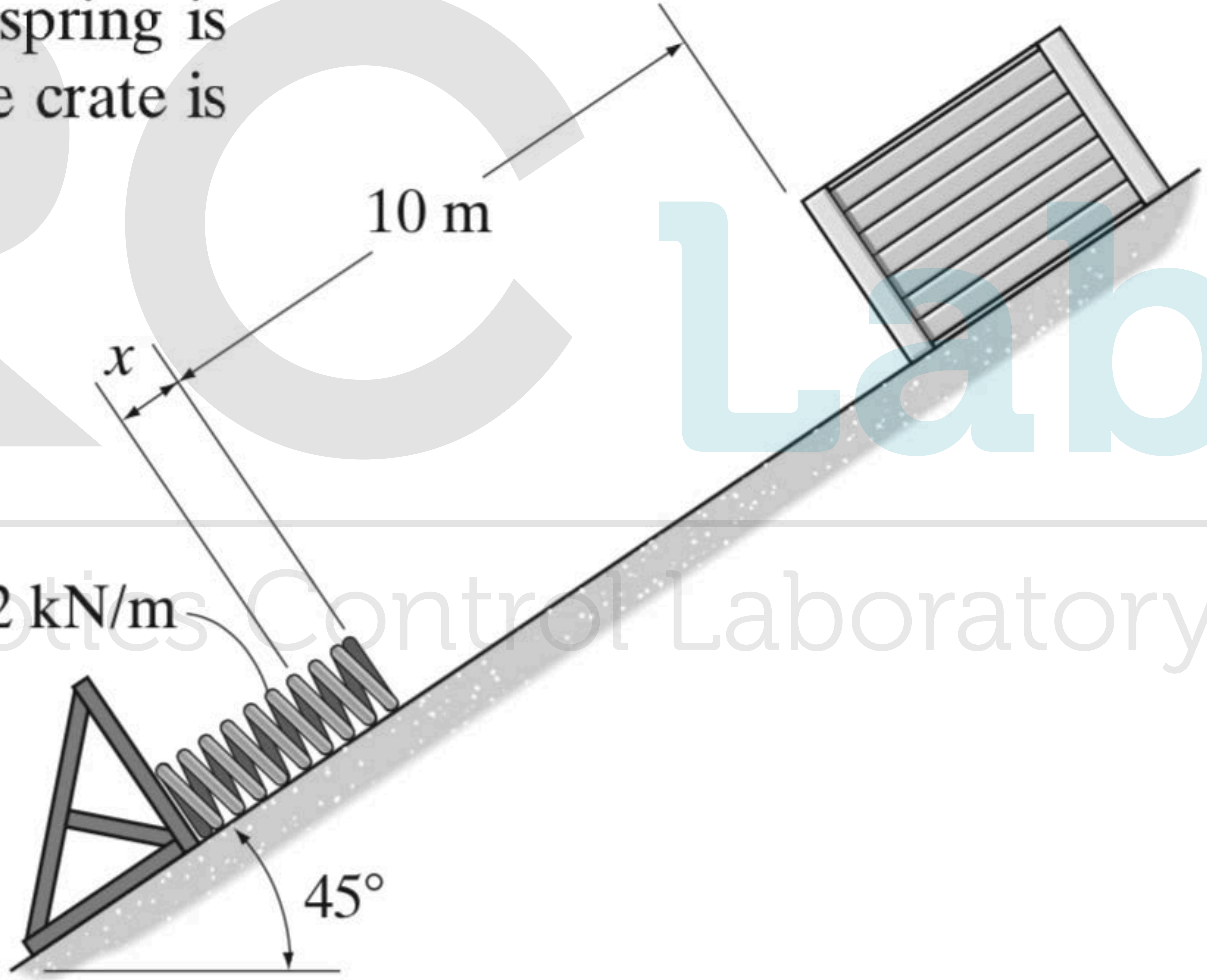
14.84, 14.89, 18.3, 18.15, 18.19

Dúvidas?

Exercício valendo nota

Exercício valendo nota

If the coefficient of kinetic friction between the 100-kg crate and the plane is $\mu_k = 0.25$, determine the speed of the crate at the instant the compression of the spring is $x = 1.5$ m. Initially the spring is unstretched and the crate is at rest.




That's all Folks!

Gradiente

Substituindo esse resultado na Equação 14.17 e expressando a diferencial $dV(x, y, z)$ em termos de suas derivadas parciais, temos

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Uma vez que mudanças em x, y, z são todas independentes umas das outras, essa equação é satisfeita se

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{14.18}$$

Assim:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V$$

ou

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{14.19}$$

onde ∇ representa o operador vetorial $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$.

A Equação 14.19 relaciona a força $\mathbf{F}$ com a função potencial V e, portanto, fornece um critério matemático para garantir que $\mathbf{F}$ seja conservativa. Por exemplo, a função potencial gravitacional para um peso situado a uma distância y acima de uma referência é $V_g = W\,y$. Para provar que $\mathbf{W}$ é conservativo, é necessário mostrar que a Equação 14.19 (ou a Equação 14.18) é satisfeita, caso em que

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F = -\frac{\partial}{\partial y}(W y) = -W$$

Golwala, 2007

Quadrado modo velocidade

O quadrado do módulo da velocidade $\mathbf{v}_i$ é então

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i^2 &= [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2 \\
&= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x \omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y \omega x + \omega^2 x^2 \\
&= v_P^2 - 2(v_P)_x \omega y + 2(v_P)_y \omega x + \omega^2 r^2
\end{aligned}
$$

Trabalho de um binário

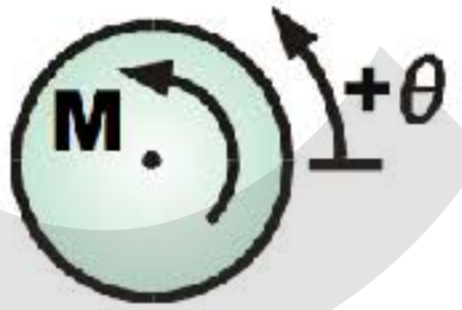
Work-Energy (WE) for Rigid Bodies

More on the work of a couple: If a couple, M, is a function of θ, like the torsional spring on a mouse or rat trap, the energy stored in the spring is the area under the M vs. θ curve.

Work of a couple: M = couple or torque, lb-ft or N-m

$$\boxed{U_M = M \cdot \theta}$$

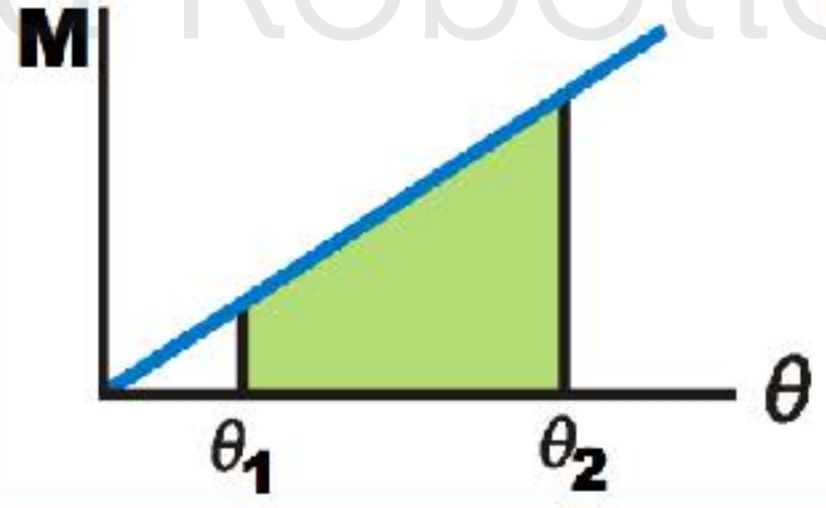
θ = angular displacement, in radians



If the couple, M, varies with θ like for a torsional spring:

$$\boxed{U_M = \int M d\theta}$$

Area under M(θ) curve is energy:



Examples:
Mouse trap
Some hinges