



# Funções de Bessel

# Coordenadas Cilíndricas circulares: $\psi(\rho, \varphi, z)$

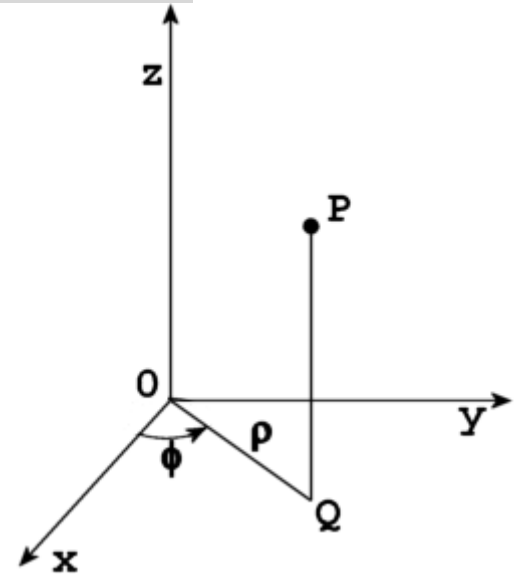
$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0;$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 Z.$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0$$



$$\rho^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0 \quad \leftarrow \text{Equação de Bessel}$$

## Simplificando...

$$\rho^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0$$

$$n\rho = x \quad e \quad y(x) = P\left(\frac{x}{n}\right)$$

*Para n real*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

**Equação de Bessel  
de ordem m**

*Para n = in*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

**Equação de  
Bessel Modificada**



**Método de Frobenius**

# Equação de Bessel de ordem $m$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

Procurar soluções do tipo Séries de Potências:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

**Equação indicial**

$$k = 0 \rightarrow a_0 [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - m^2] = 0$$

$$a_0 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = m \text{ e } \alpha_2 = -m$$

$$k = 1 \rightarrow a_1 [(\alpha + 1)^2 - m^2] = 0$$

$$a_1 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = 1+m \text{ e } \alpha_2 = 1-m \rightarrow \text{Escolhe-se } a_1 = 0$$

## Relação de recorrência, $a_0 \neq 0$ e $\alpha = m$

$$a_k = -\frac{1}{(k+\alpha)^2 - m^2} a_{k-2}$$

$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m m!}{2^{2k} k! (k+m)!} a_0 \quad a_0 = (2^m m!)^{-1}$$

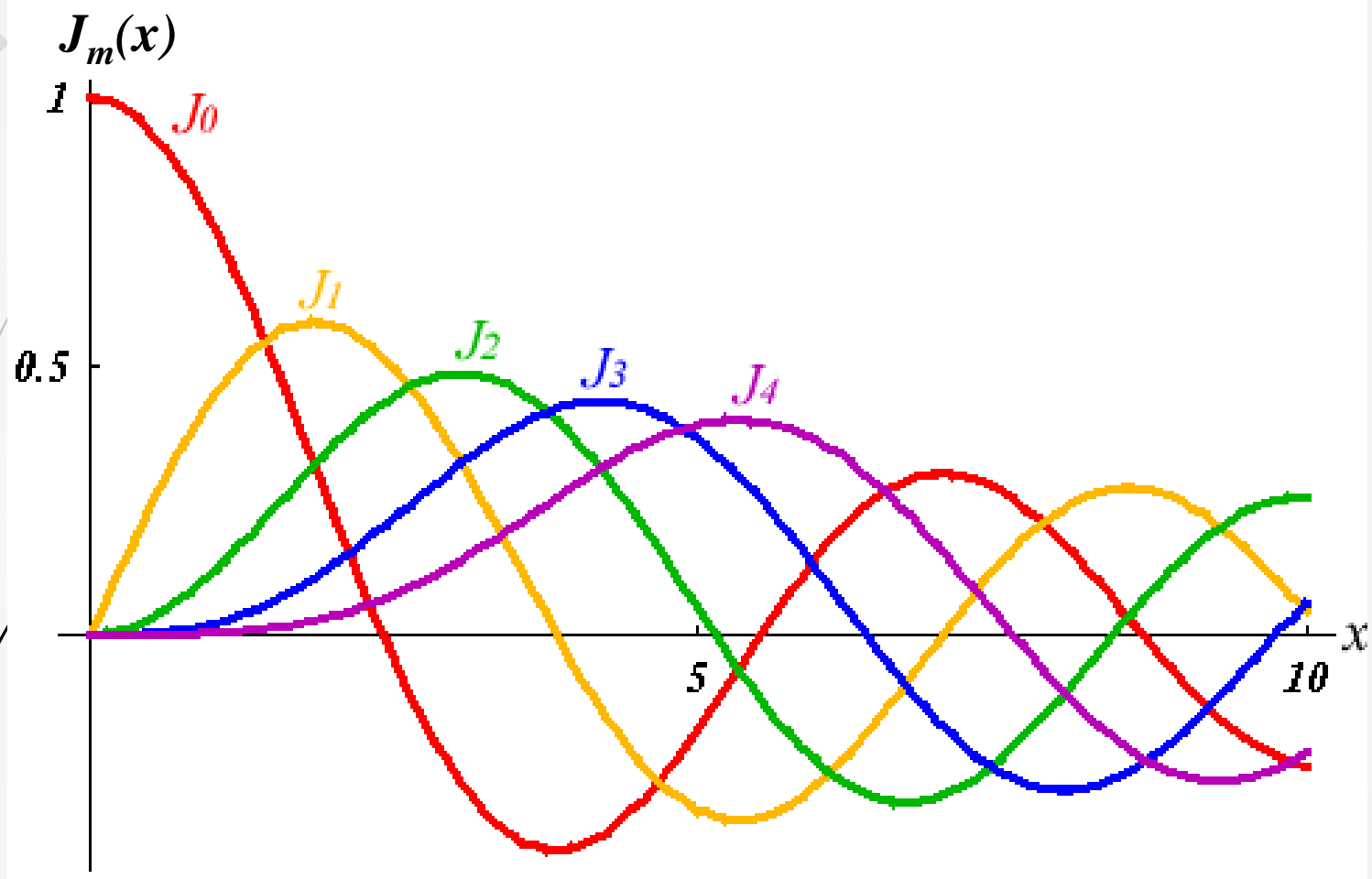
$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m}{2^{2k+m} k! (k+m)!}$$

**Primeira solução para equação de Bessel (para  $\nu = m$  inteiro)**

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

*$J_m$  é a função de Bessel de 1ª. espécie e ordem  $m$*

*Esta série converge para todo intervalo finito;  $J_m(x)$  está definida para todo valor de  $x$  real ou complexo*



A função não tem problema de convergência para qualquer valor de  $x$ .

A outra solução para  $\alpha = -m$  é:

$$y_2(x) = J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

Seriam as soluções  $J_m(x)$  e  $J_{-m}(x)$  soluções linearmente independentes (LI)?



## Para obter as soluções LI deve-se calcular o wronskiano destas soluções:

Chamamos de funções *linearmente independentes*, duas funções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  que satisfazem

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x, \text{ se e somente se } C_1 = C_2 = 0$$

em outras palavras, não podemos escrever  $y_2(x) = C y_1(x)$ ,  $C \neq 0$ .

Se fosse possível escrever  $y_2(x) = C y_1(x)$ ,  $C \neq 0$  as 2 soluções seriam *linearmente dependentes* e teríamos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} y_2(x) &= C y_1(x) & (y' = \frac{dy}{dx}) \\ y_2'(x) &= C y_1'(x) \end{aligned}$$

cuja solução é  $y_1(x) y_2'(x) = y_1'(x) y_2(x)$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \quad (5)$$

da equação (5) vemos que se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são linearmente independentes então,  $W(x) \neq 0$

$$W(J_m, J_{-m}) = -2 \frac{\text{sen}(m\pi)}{\pi x}$$

✓ Se  $m = n$  é inteiro  $\rightarrow J_n(x)$  e  $J_{-n}(x) \rightarrow$  não são LI, pois

$W = 0$ . E:  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

✓ Se  $m = \nu$  não é inteiro  $\rightarrow J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  são LI.

## Segunda solução para equação de Bessel (para $\nu = m$ inteiro)

Como: 
$$W(J_m, J_{-m}) = -2 \frac{\text{sen}(m\pi)}{\pi x} = 0$$

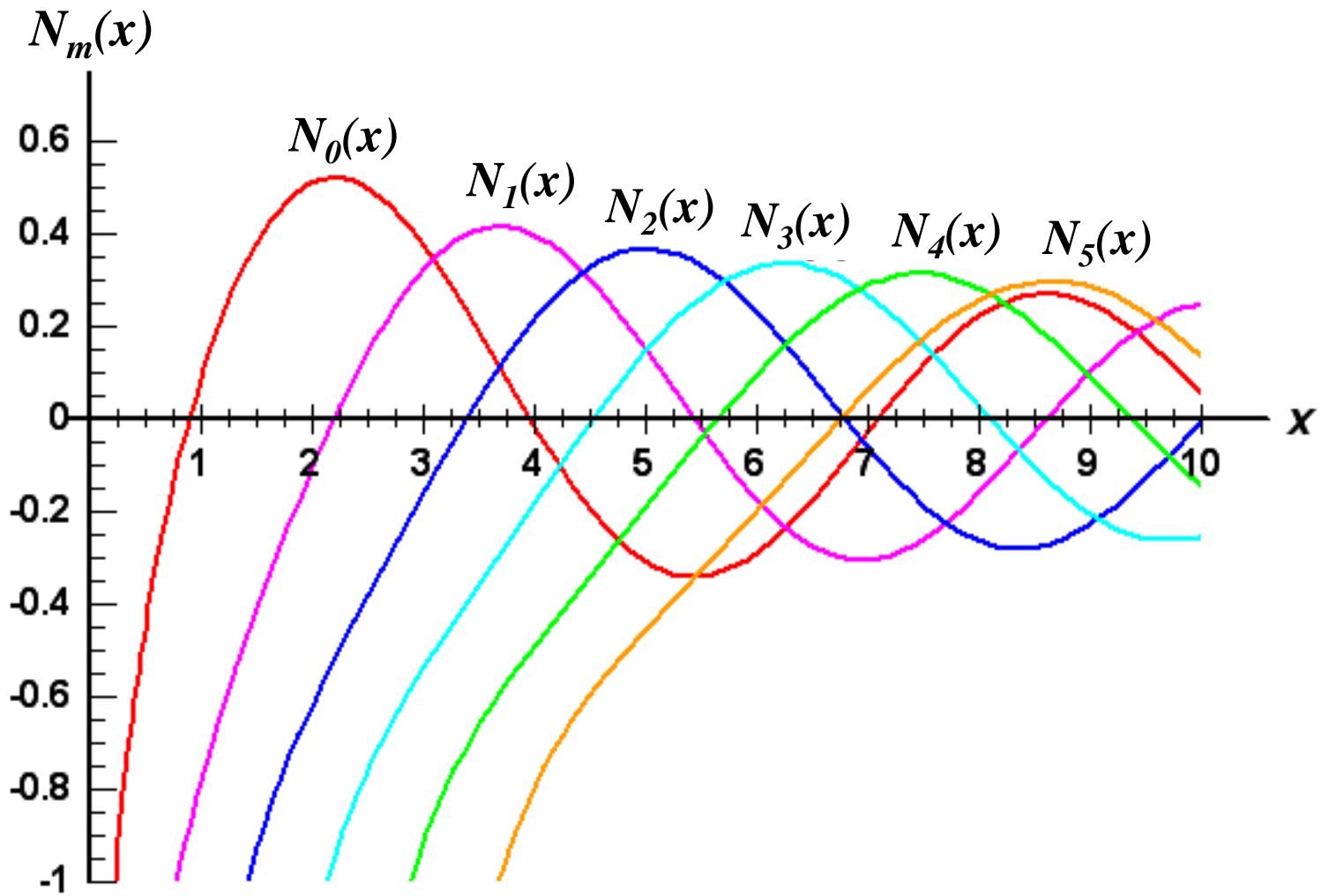
Precisamos procurar uma solução que seja LI de  $J_m(x)$



Funções de Bessel de segunda espécie ou  
Funções de Neumann

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)}$$

*$N_\nu(x)$  é solução da equação de Bessel para  $\nu$  não inteiro, pois é uma combinação linear de  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$ , que são soluções LI.*



A função  $N_m(x)$  diverge se  $x$  pequeno, para todos os valores de  $m$ .

E para  $\nu \rightarrow n$  (  $n$  inteiro) também é solução (questão de fé!!!! 😊 ).

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)}$$

Notação:

$$N_\nu(x) = Y_\nu(x)$$

Pode ser mostrado que para qualquer valor de  $\nu$  inteiro ou não, que:

$$W(J_n, N_n) = \frac{2}{\pi x} \quad \text{e} \quad N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$$

Assim, a solução mais geral da equação de Bessel será:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \longrightarrow \text{Para qualquer valor de } \nu$$

Particularmente, para  $\nu$  não inteiro:

✓  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  são l.l.  $\longrightarrow y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$

# Equação de Bessel Modificada

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

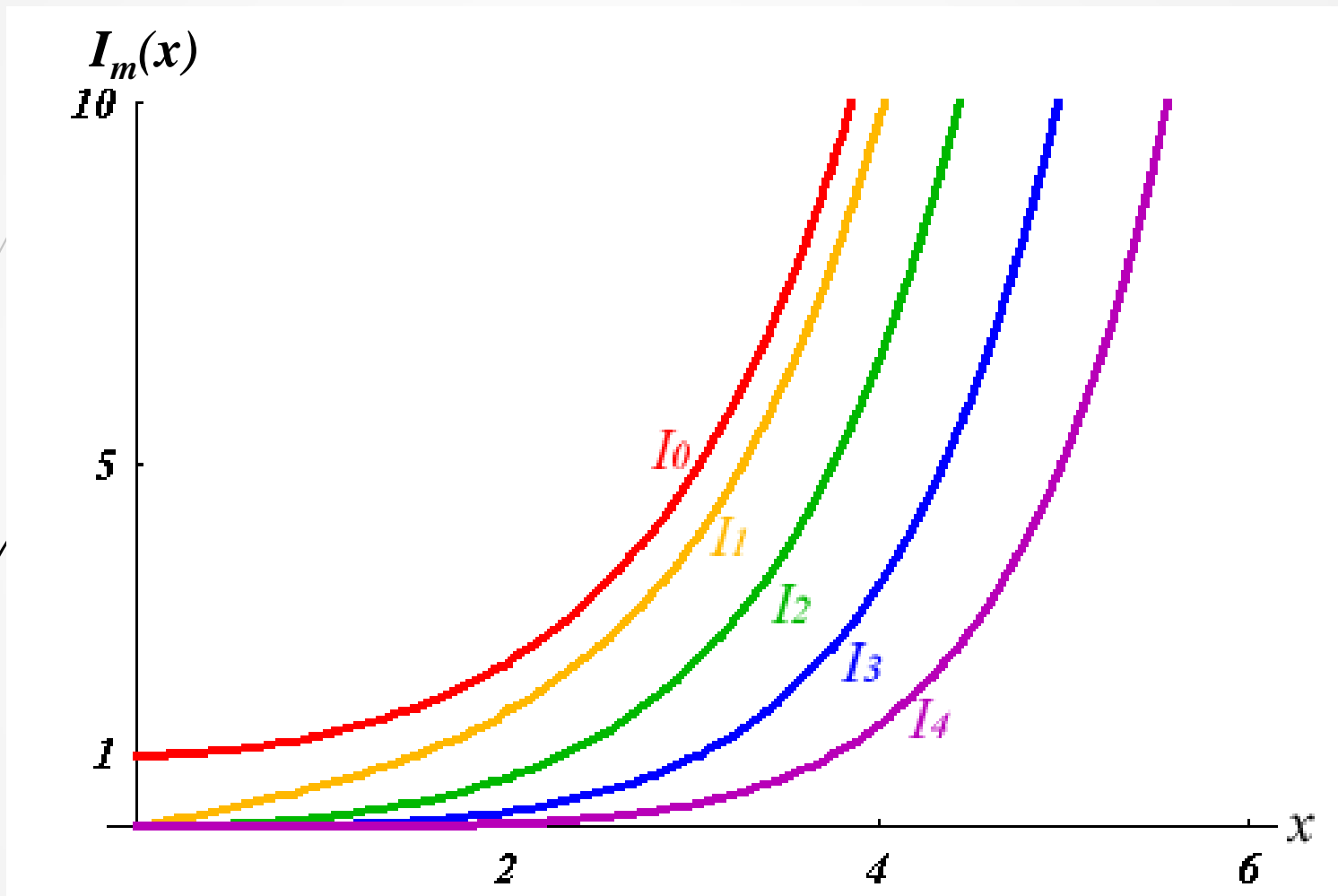
**Primeira solução para equação de Bessel Modificada  
(para  $\nu = m$  inteiro)**

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

*Função de Bessel modificada de 1a. Espécie e ordem  $m$*

Existe uma relação entre  $I_m(x)$  e  $J_m(x)$  dada por:

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix)$$



A função  $I_m(x)$  diverge se  $x$  cresce para todos valores de  $m$ .



# Função Geratriz para n inteiro

**Bessel :**

$$G_{Bessel}(x, t) = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

**Bessel Modificada:**

$$G_{Bessel Mod} = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$$

# Relações de recorrência para as funções de **Bessel**

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad \left(\frac{dG}{dt}\right)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \quad \left(\frac{dG}{dx}\right)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

# Relações de recorrência para as funções de **Bessel Modificadas**

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = 2I'_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

## Segunda solução para equação de Bessel Modificada (para $\nu = m$ inteiro)

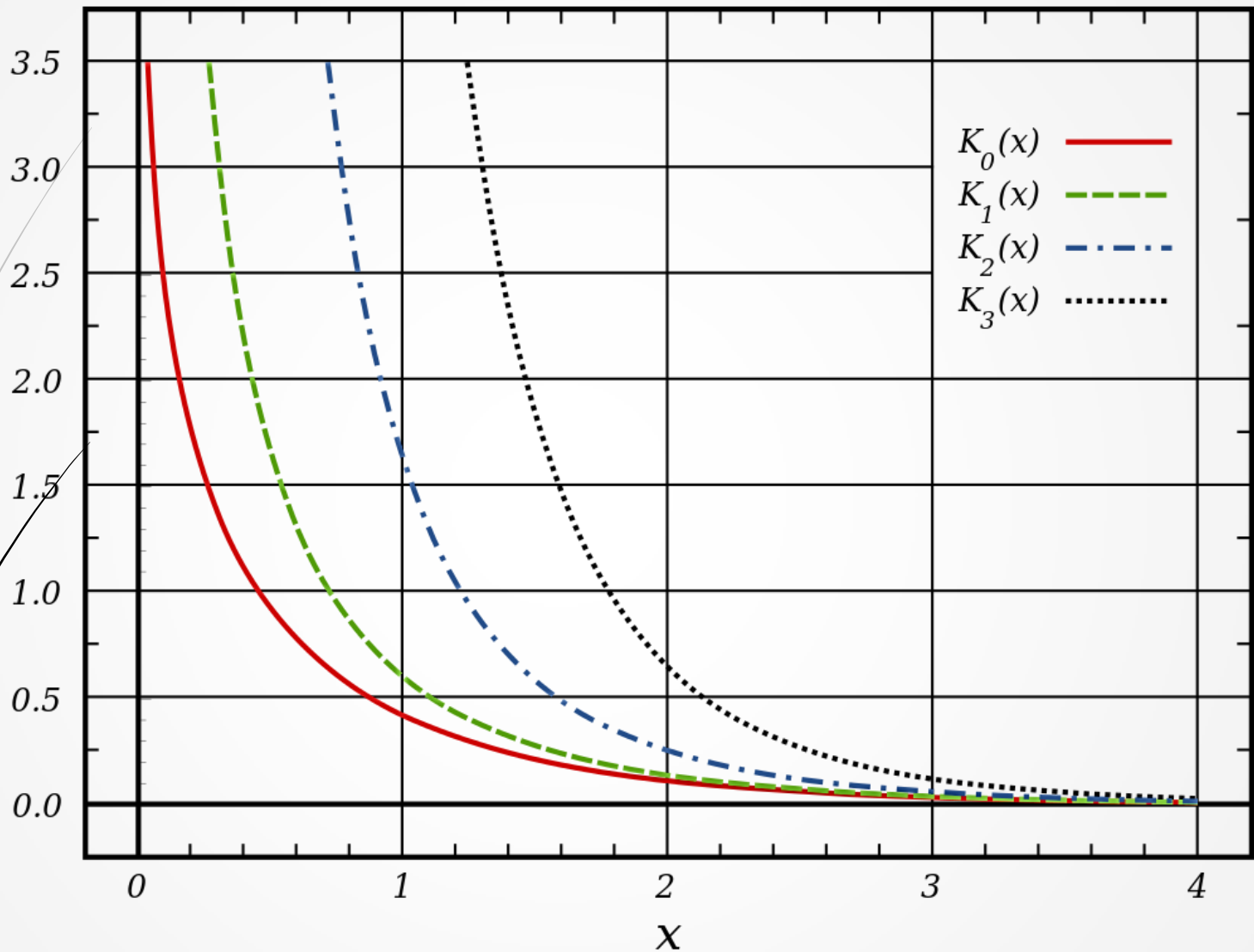
$$y_2(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}$$



Funções de **Bessel Modificada de segunda espécie**

*$K_\nu(x)$  é solução da equação de Bessel para  $\nu$  não inteiro, pois é uma combinação linear de  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  que são soluções LI.*

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu J_\nu(ix)$$



A função  $K_m(x)$  diverge se  $x$  pequeno, para todos os valores de  $m$ .

# Resumo

## Equação de Bessel de ordem $m$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

### 1ª. espécie

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

### 2ª. espécie

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)}$$

## Solução Geral

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \quad \rightarrow \text{Para qualquer valor de } \nu$$

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad \rightarrow \text{Somente para } \nu \text{ não-inteiro}$$

# Resumo

## Equação de Bessel Modificada de ordem $m$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

1ª. espécie

$$y_1(x) = I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

$$y_2(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen}(v\pi)}$$

## Solução Geral

$$y(x) = CI_\nu(x) + DK_\nu(x) \rightarrow \text{Para qualquer valor de } \nu$$

$$y(x) = AI_\nu(x) + BI_{-\nu}(x) \rightarrow \text{Somente para } \nu \text{ não-inteiro}$$

# Resumo

**Equação de Bessel de ordem m**

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

**1ª. espécie**

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

**2ª. espécie**

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

---

**Equação de Bessel Modificada de ordem m**

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

**1ª. espécie**

$$y_1(x) = I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

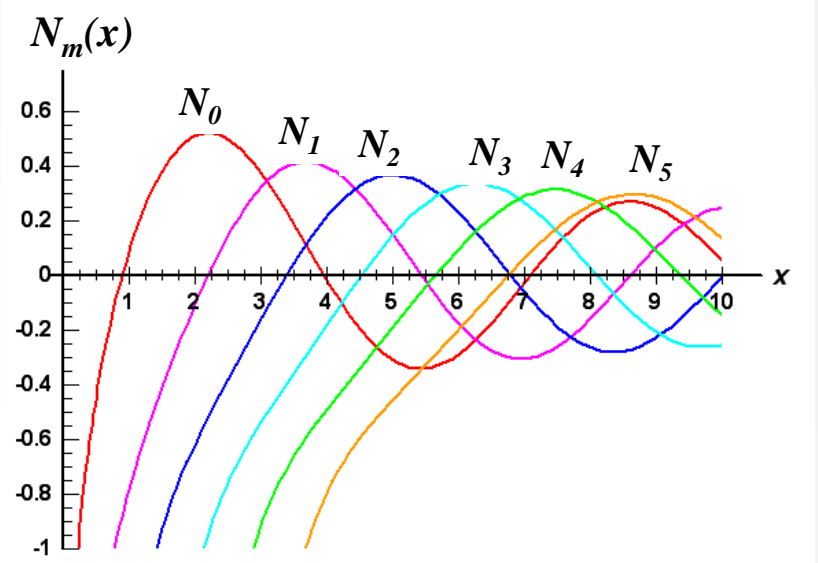
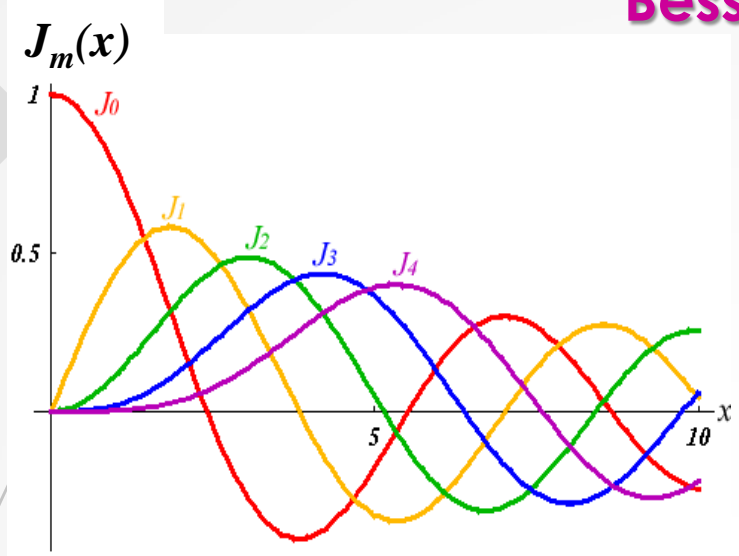
**2ª. espécie**

$$y_2(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

$$y(x) = CI_\nu(x) + DK_\nu(x)$$



# Bessel



---

# Bessel Modificada

