TRANSFORMADAS INTEGRAIS

FOURIER

Transformada integral

Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha,t)dt$$

$$f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha,t)d\alpha$$

A função *F*(α) é denominada de transformada integral de *f(t)* pelo núcleo *K*(α,*t*), *e vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função f(t) no espaço t para uma outra função, F(*α*), no espaço* α*.

Transformadas integrais são ferramentas úteis para se resolver equações diferenciais de problemas com valor inicial.

A TF também é usada para decomposição de sinais.

Transformada de Fourier (TF)

TF

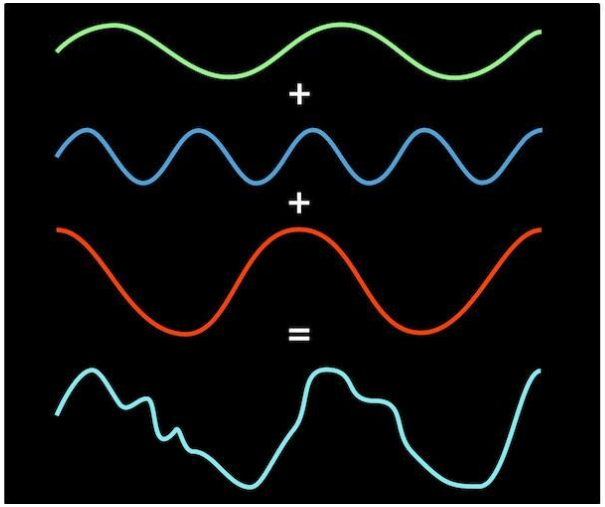
Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;

Funções oscilantes não-periódicas podem ser representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);

A TF decompõe um sinal em suas componentes elementares
seno e cosseno

TF

A TF decompõe um sinal (elétrico) em suas componentes elementares
seno e cosseno

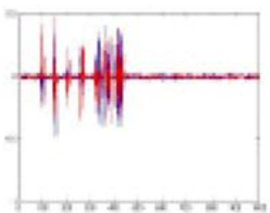


Sinal

Fenómeno variável no tempo e/ou espaço.

Descrito quantitativamente.

*"**Os sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes e, tipicamente contêm informação acerca do comportamento ou natureza de um fenómeno físico.**"*

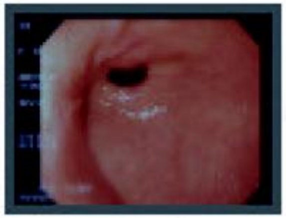


Exemplos:

F(t) -> Som

F(x,y) -> Imagem

F(x,y,t) -> Vídeo



Aplicações da Transformada de Fourier

- Física
- Química
- Teoria dos números
- Análise combinatória
- **Processamento de sinais**
- Teoria das probabilidades
- Estatística
- Criptografia
- e outras áreas.

Joseana Macêdo Fechine
Grupo PET Computação

Sinais ... Ondas...

- Distribuição de elétrons em um átomos pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados.

- Na Mecânica Quântica, a origem Física das relações de Fourier é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos em termos de ondas (k).

Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \, sen\frac{n\pi x}{L} \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \qquad\qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\, sen\frac{n\pi t}{L}dt$$

Substituindo-se a_n e b_n em (1):

$$f(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \times \cos\frac{n\pi x}{L} + \int_{-L}^{L} f(t)\, sen\frac{n\pi t}{L}dt \times sen\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$f(x) = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)\times cos\frac{n\pi t}{L}\times cos\frac{n\pi x}{L}\,dt + \int_{-L}^{L} f(t)\times sen\frac{n\pi t}{L}\times sen\frac{n\pi x}{L}\,dt\right\}$$

Colocando-se f(t) em evidência se obtém o termo:

$$cos\frac{n\pi t}{L}\times cos\frac{n\pi x}{L} + sen\frac{n\pi t}{L}\times sen\frac{n\pi x}{L} = \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\,cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)dt$$

$$f(x) = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)dt$$

$$\frac{n\pi}{L} = \omega \qquad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega$$

Fazendo: $L \to \infty$ $[-L, L] \to (-\infty, \infty)$

$$f(x) \to \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{L\to\infty \\ \Delta\omega\to 0}} \left(\Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \cos(\omega\,(t-x))dt\right)$$

$$lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \to \int_{0}^{\infty} d\omega$$

Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times \cos(\omega\,(t-x))dt$$

Integral de Fourier – Forma exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times cos(\omega\,(t-x))dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\; e^{i\omega t} dt$$

Em muitos problemas físicos ω corresponde à frequência angular. A integral de Fourier é uma representação de f(x ou t) em termos de uma distribuição de trens de ondas senoidais infinitamente longos.

Transformada de Fourier

Integral de Fourier →

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Reescrevendo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x}\boxed{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt}$$

Chamando de *F(ω)*:

$$\boxed{F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

Trocar x por t, não faz diferença, pois a variável de integração é ω.

$$\boxed{f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega}$$

Transformada de Fourier

Forma exponencial

$$\boxed{f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega}$$

$$\boxed{F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt}$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx}\, dk}$$

$$\boxed{F(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\, dx}$$

$F(\omega)$ é a Transformada de Fourier de $f(t)$ e vice-versa

$F(k)$ é a Transformada de Fourier de $f(x)$ e vice-versa

Em três dimensões

$$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{k}}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{r}})\, \boldsymbol{e}^{i\vec{k}.\vec{r}} \boldsymbol{d}\mathrm{r}$$

$$\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{k}}) \boldsymbol{e}^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, \boldsymbol{d\omega}$$

ω*e t* substituídos pelas as variáveis tridimensionais *r e k*, que em uma dimensão poderiam ser *x e k*.

Transformadas: Cosseno e Seno

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\, sen\omega t$$

$$f(-t) = f(t)$$

PAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} f(t)\ \cos\omega t\, dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega$$

$$f(-t) = -f(t)$$

IMPAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, sen\omega t\, dt$$

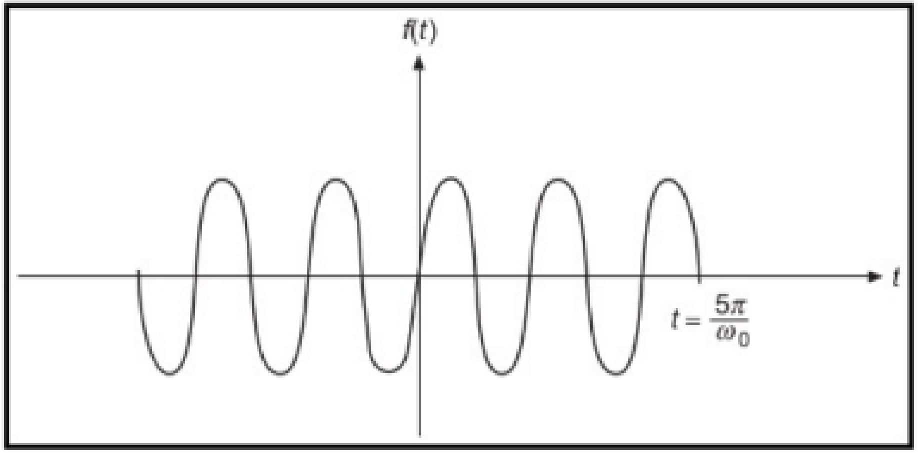
$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, sen\omega t\, d\omega$$

Exemplo: Cálculo da transformada de Fourier

Imagine um trem de ondas $sen\,\omega_0 t$ que seja limitado por um filtro de abertura finita.

$$f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t & para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Isto corresponde a N ciclos do trem de ondas original.



Exemplo $f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t \quad para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 \qquad para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$ ***pulso***

$$\boldsymbol{f(-t) = -f(t)}$$

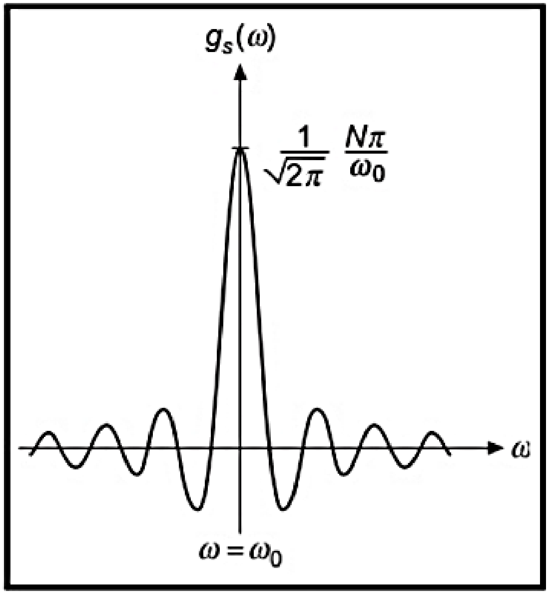
IMPAR

$$\boxed{\boldsymbol{F(\omega)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \boldsymbol{f(t)\, sen\omega t\, dt}}$$

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} sen\omega_0 t\, \boldsymbol{sen\omega t\, dt}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right]$$

Para $\omega \approx \omega_0 \rightarrow$ luz monocromática



Difração
Fenda única

Função sinc (x)
sinus cardinalis (seno cardinal)

$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$$

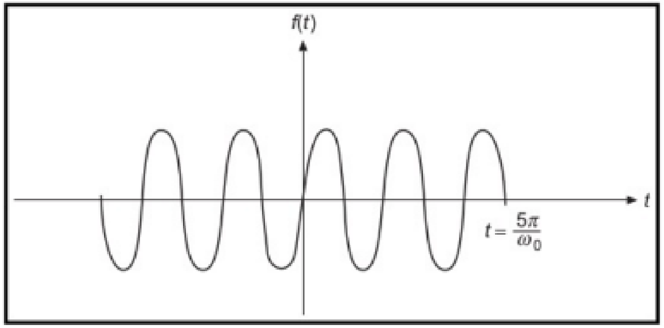
Propriedades da função sinc(x):

1. sinc (x) é uma função par de x
2. sinc (x) = 0 nos pontos em que sin (x) = 0, isto é,

   sinc (x) = 0 quando x = nπ, sendo n um número inteiro
3. Usando a regra de L'Hôpital, pode ser mostrado que sinc (0) = 1
4. sinc (x) oscila quando sin (x) oscila e monotonicamente

   diminui à medida que 1 / x diminui com o aumento | x |

Para ondas eletromagnéticas:



$$\omega = \frac{N\pi}{L} \qquad \Delta\omega = \frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{N}$$

E = hω/2π (energia do fóton) $\rightarrow$ ΔE = h $\Delta\omega$/2π ; ΔE é a incerteza na energia do pulso.

Há também uma incerteza em relação ao tempo, porque a onda tem N ciclos, ela levará $\Delta t = 2.N.\pi/\omega_0$ ($\Delta t = N.T = N.1/f$) segundos para passar.

O produto: $\Delta E.\ \Delta t = h\ \Delta\cancel{\omega}/2\pi \times N\cancel{2}\pi/\omega_0 = h \times \Delta\omega/\omega_0 \times N = h$

Que de maneira "grosseira" é o principio de incerteza de Heisenberg

Transformada de Fourier de Derivadas

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

$$F_1(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dt}\, e^{i\omega t} dt$$

Integrando por partes:

$$F_1(\omega) = -\, i\omega \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt = -i\omega F(\omega)$$

$$\boxed{F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)}$$

n é a ordem da derivada

Resolução de equações diferenciais
Exemplo: Fluxo de Calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi \rightarrow \psi(x,t) \rightarrow \Psi(k,t)$$

$$F(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ikx} dx$$

$$\Downarrow$$

A parte em *t* fica imutável

$$\Psi(k,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,t)\, e^{ikx} dx$$

Propriedades de Transformadas de Fourier

- **Linearidade**

$$\mathcal{F}\{c1\, g(t) * c2\, h(t)\} = c1\mathcal{F}\{\, g(t)\} + \ c2\mathcal{F}\{h(t)\} = \ c1\, G(\omega) + c2\, H(\omega)$$

- **Derivada** $F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$

- **Convolução** $\rightarrow$ $g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau$

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)]\, e^{i\omega t}\, dt$$

Outras propriedades de Transformadas de Fourier

- **Translação**

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(\omega)$$

- **Escalonamento**

$$\mathcal{F}\{g(ct)\} = \frac{G(\omega)}{|c|}$$

Convolução

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)]\, e^{i\omega t}\, dt$$

Onde: $$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau\ e^{i\omega t}\, dt$$

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau\ e^{i\omega t}\,dt$$

$$G(\omega)\,H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\ e^{i\omega t}\,dt$$

Mas: $$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(\omega)$$

Logo: $$\mathcal{F}\{\,h(t-\tau)\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega\tau}\ H(\omega)$$

$$\begin{aligned} G(\omega)\,H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ e^{-i\omega\tau}\ H(\omega)\ d\tau \\ &= H(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ e^{-i\omega\tau}\ d\tau \\ &= H(\omega)\ G(\omega) \end{aligned}$$

Uma representação para a Função Delta

Da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Rearranjando:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)}$$

$\delta(t\text{-}x)$

A função $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)}$ é uma das formas de se representar a função delta de Dirac, pois:

$$\boxed{f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt}$$

$x = t_0$

$$\boxed{f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t)\, dt}$$

Em termos de outras variáveis

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)}d\omega$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\omega-\omega_0)}dx$$

Matematicamente, a função delta não é uma função, porque é muito singular.
De fato é uma "distribuição". É uma ideia generalizada de função, mas esta função só pode ser usada dentro de integrais.

Propriedade:

$$\int dt\, f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

De fato $\int dt\,\delta(t-t_0)$ pode ser considerado como um "operador" que puxa o valor de uma função para t_0.

Desta forma, soa perfeitamente legítimo e bem definido. Mas já que a função delta é eventualmente integrável, podemos usá-la como se fosse uma função.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

O seu valor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{0}^{\infty} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

Difusão de neutrons

taxa de produção

taxa de vazamento

variação de densidade de nêutrons

$$\frac{\partial n}{\partial t} = s - \Sigma_a \phi - \nabla . J$$

taxa de absorção

No estado estacionário: $- \nabla . J = \Sigma_a \phi - s$

Equção de difusão de Fick: $\boldsymbol{J = -D\nabla\phi}$ $\longrightarrow$ **div J =** -D div ($\nabla\Phi$) = **-D$\Delta\Phi$**

$$-D\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2 D\varphi(x) = Q\delta(x)$$

taxa de absorção

taxa de produção

Problemas usando TF

1) A equação de difusão de nêutrons em uma dimensão é dada por:

$$-D\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2 D\varphi(x) = Q\delta(x)$$

Sendo $\varphi(x)$ o fluxo de nêutrons, $Q\delta(x)$ é uma fonte plana em $x = 0$; D, K^2 e Q não dependem de x.

Encontre a solução $\varphi(x)$ para a equação (1), usando transformada de Fourier. Você poderá precisar das seguintes integrais:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(iz)^{\nu}e^{-ipz}}{\beta^2+z^2}dz = \pi\beta^{-\nu-1}e^{-|p|\beta} \qquad f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\delta(z-a)dz$$

Para $|\nu| < 1$, Re $\beta > 0$

2) Mostre que as transformadas de Fourier em seno e cosseno da função e^{-at} são dadas por:

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

3) Encontre a transformada de Fourier de um pulso triangular dado pela função:

$$(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|) & para \quad |x| < \dfrac{1}{a} \\ \\ 0 & para \quad |x| > \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/ciclo_seminarios/tecnicos/2010/TransformadaDeFourier.pdf

FÍSICA MATEMÁTICA - MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, **GEORGE ARFKEN,** Ed. **CAMPUS ELSEVIER.**