Resolução das equações

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)

- Difusão térmica em estado estacionário (2D e 3 D);
- Função potencial de uma partícula livre no espaço sob ação de forças gravitacionais;
- Etc

Equação de Laplace (2D)

Equação do Potencial

Problema $\nabla^2 u = 0$ ou $\Delta u = 0$

Independente do tempo $\rightarrow$ não tem condições iniciais!
Em 2D : 4 condições de contorno, uma para cada fronteira (2 para cada dimensão)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

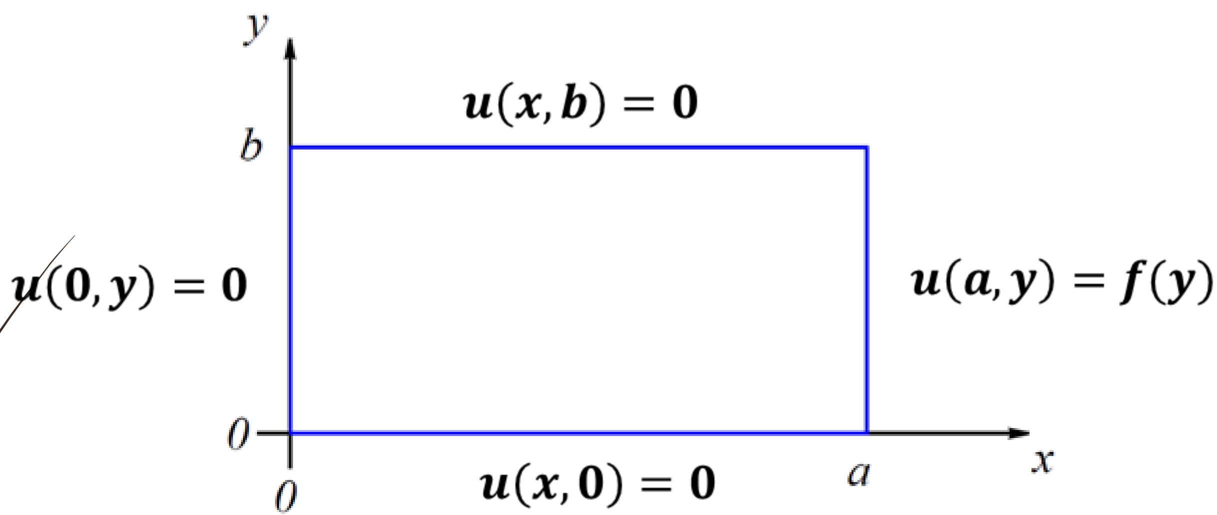
Condições de contorno

1) ***Sobre a função u(x,y) $\rightarrow$ Problema de Dirichlet***

2) *Sobre as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ $\rightarrow$ Problema de Neumann*

Resolução: Problema de Dirichlet em um retângulo

Problema Matemático



Condições de contorno para o retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$:

$$u(x,0)=0 \quad e \quad u(x,b)=0 \;\; para \quad 0<x<a$$

$$u(0,y)=0 \quad e \quad u(a,y)=f(y) \;\; para \quad 0 \le y \le 0$$

Separação de variáveis: u(x,y) = X(x) Y(y)

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^{2}$$

λ é a constante de separação e chega-se as EDOs:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A.\cosh\lambda x + B.\sinh\lambda x$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C.\cos\lambda y + D.\sin\lambda y$$

Aplicando as CC (y):

$$u(x,y) = X(x)\ Y(y)$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = 0 \rightarrow X(x).\, Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0}$$
$$\boldsymbol{u(x,b) = 0 \rightarrow X(x).\, Y(b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0}$$

$$Y(y) = C.\cos\lambda y + D.\sin\lambda y$$

$$\boldsymbol{Y(0) = 0} \Rightarrow Y(0) = C.\cos\lambda 0 + D.\sin\lambda 0 = C = 0$$

$$Y(y) = D.\sin\lambda y$$

$$\boldsymbol{Y(b) = 0} \Rightarrow Y(b) = D.\sin\lambda b = 0 \Rightarrow \lambda b = n\pi$$

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{n\pi}{b}} \Rightarrow Y(y) = D.\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Aplicando as CC (x):

$$\boldsymbol{u(x,y) = X(x)\ Y(y)}$$

$$\boldsymbol{u(0,y) = 0 \rightarrow X(0).Y(y) = 0 \ \rightarrow \ X(0) = 0}$$

$$X(x) = A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x$$

$$X(0) = A.\cosh \lambda 0 + B.\sinh \lambda 0 = A = 0$$ e $$\boldsymbol{\lambda = \frac{n\pi}{b}}$$

$$X(x) = B.\sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Como: $$Y(y) = D.\sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\boldsymbol{u_n(x,y) = A_n} \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

A solução geral é a superposição linear de todas as soluções u_n e agora resta apenas a constante A_n para ser determinada.

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Resta a última condição de contorno a ser aplicada:

$$u(a,y) = f(y)$$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi a}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi a}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$f(y) = \sum_{n} B_n \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Independe de y

Série de Fourier:

$$B_n = A_n \sinh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy$$

Logo:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Determina-se A_n por:

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

E assim u(x,y) fica determinada, dependendo do que é a função f(y).

Exemplo para $f(y) = y$

Para determinar a solução final da equação de Laplace em 2D em coordenadas cartesianas com as CC apresentadas, é preciso determinar A_n a partir de $f(y) = y$:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \frac{2}{b} \int_0^b y. \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \int_0^b y.\sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$\int_0^b y.\sin \frac{n\pi y}{b} dy = -\frac{b^2}{n\pi}(-1)^n = \frac{b^2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \frac{b^2}{n\pi}(-1)^{n+1} \Rightarrow A_n = \frac{2b}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}}$$

Finalmente

$$u(x,y) = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Exemplo para:

$$f(y) = \begin{cases} y & para \quad 0 \le y \le 1 \\ 2 - y & para \quad 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

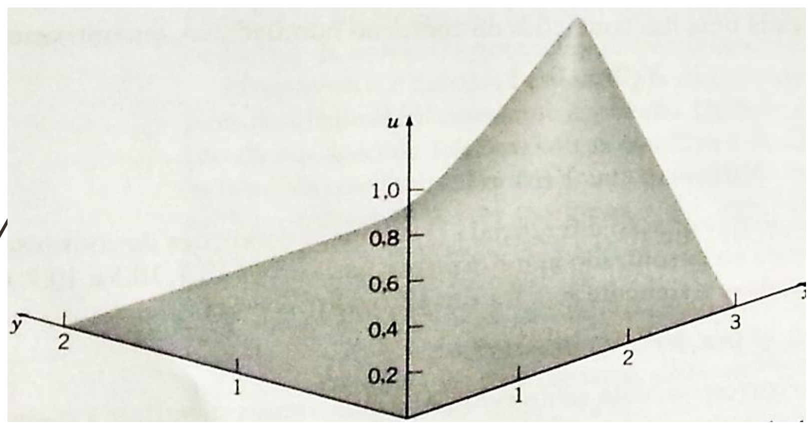
Com: a=3 e b=2

Neste caso:

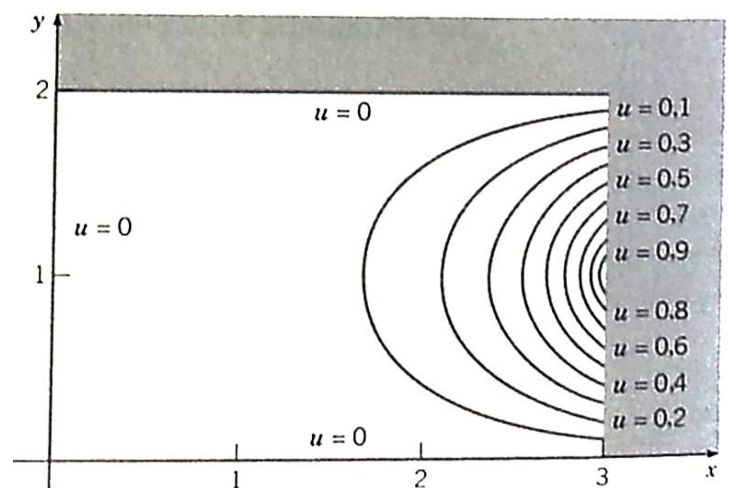
$$A_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh\frac{3n\pi}{2}}$$

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh\frac{3n\pi}{2}}\times\sinh\frac{n\pi x}{b}\times\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Gráfico de u(x,y) para n = 20

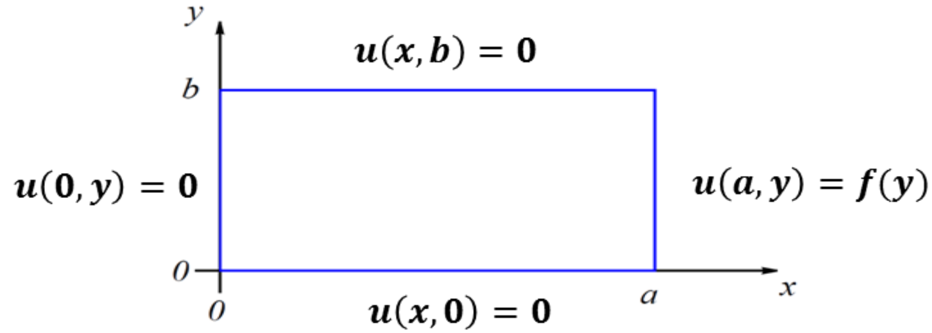


Curvas de nível de u(x,y)



Resumo: Laplace coordenadas retangulares em 2D

Problema de Dirichlet



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(x,y) = X(x)\, Y(y)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}-\lambda^2 X=0 \;\Rightarrow\; X(x)=A.\cosh\lambda x+B.\sinh\lambda x \qquad X(x)=B.\sinh\frac{n\pi x}{b}$$

CC

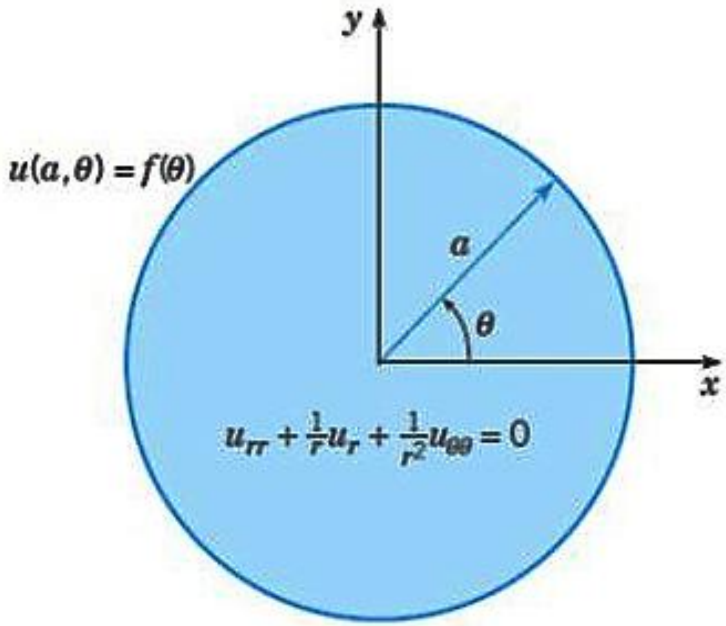
$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2 Y=0 \;\Rightarrow\; Y(y)=C.\cos\lambda y+D.\sin\lambda y \qquad Y(y)=D.sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\lambda=\frac{n\pi}{b}$$

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \times sinh\frac{n\pi x}{b}\times sin\frac{n\pi y}{b} \;\Rightarrow\; u(a,y)=f(y)$$

$$f(y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \times\sinh\frac{n\pi a}{b}\times\sin\frac{n\pi y}{b}$$ com $$A_n\sinh\frac{n\pi a}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

Resolução:
Eq de Laplace em um círculo



$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

$$u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2};\ u_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ u_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

r < a

$$\textit{Para}\quad r < a \quad e \quad u(a,\theta) = f(\theta)$$

$f(\theta)$ é uma função dada em $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$u(r,\theta)$ é periódica de período 2π e finita em r=0

Separação de variáveis: $u(r,\theta) = R(r)\ \Theta(\theta)$;
Substitui as derivadas parciais de $u(r,\theta)$ na equação de Laplace abaixo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Theta+\frac{1}{r^2}R\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=0$$

Multiplica por r^2 e divide por $R\ \Theta$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda$$

Separando as equações em R e Θ:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-\lambda R=0$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\lambda\Theta=0$$

Singularidade para r=0

É possível mostrar que $u(r,\theta)$ é periódica de período 2π, somente se λ for um número real.

Estudaremos os casos: $\lambda < 0$, $\lambda \geq 0$

As condições que permitem resolver este problema são:

1) A função $\Theta(\theta)$ deve ser periódica no círculo, ou seja: $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$;
2) A função R(r) deve ser finita para $r \to 0$;
3) Além de : $u(a,\theta) = f(\theta)$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

Recordação: Equação de Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\, x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

Procurar soluções do tipo: $y = x^r$; deriva-se e substitui-se na equação EQD, chegando-se a: $x^r[r(r-1)+\alpha r+\beta]=0$

As raízes para r são:

$$r_i = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}, \qquad com\ i = 1{,}2$$

$r_1 \neq r_2$ **e reais**	$r_1 = r_2$ **reais**	$r_1 \neq r_2$ **complexas** $r_1 = a+ib$; $r_2 = a-ib$
$y(x) = c_1 x^{r1} + c_2 x^{r2}$	$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x).\, x^{r2}$	$y(x) = c_1 e^a \cos(b.\ln x) + c_2 e^a \operatorname{sen}(b.\ln x)$

Estudo dos valores de λ:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

1) Se $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \mu^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}$$

$c_1 = c_2 = 0$ ⇒ **$\lambda < 0$ não é solução**

Estudo dos valores de λ:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda \quad \Theta = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda \quad R = 0$$

2) Se λ = 0

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = 0$$

$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$ $\quad \Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ⇨ $c_2 = 0$ ⇨ $\boxed{\boldsymbol{\Theta(\theta) = c_1}}$

$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = 0$ ⇨ Eq. De Euler: $\quad R(r) = (c_1 + c_2 \,.\, \ln r)$

$c_2 = 0$ ⇨ $R(r) = c_1$

$$\boxed{\boldsymbol{u_\lambda(r,\theta) = u_0(r,\theta) = constante}}$$

Estudo dos valores de λ:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda \quad \Theta = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda \quad R = 0$$

3) Se λ > 0 → λ = μ²

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mu^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = c_1\cos\mu\theta + c_2\sin\mu\theta$$

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \Rightarrow c_1\cos\mu 0 + c_2\sin\mu 0 = c_1\cos\mu 2\pi + c_2\sin\mu 2\pi$$

$$\Rightarrow \cos\mu 2\pi = 1 \Rightarrow \boxed{\mu = \text{n}} \Rightarrow \boxed{\Theta(\theta) = c_1\cos n\theta + c_2\sin n\theta}$$

n=1,2,3

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0 \Rightarrow R(r) = k_1r^n + k_2r^{-n}$$

Para r → 0 têm-se que $k_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{R(r) = k_1r^n}$

Finalmente: $u(r,\theta) = R(r)\ \Theta(\theta)$

$\lambda > 0$ e $\lambda = n^2$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

$$R(r) = k_1 r^n$$

$\lambda = 0$

$$\Theta(\theta) = c_1$$

$$R(r) = c_1$$

$$\boldsymbol{u_n(r,\theta)} = \Theta_n(\theta) * R_n(r) = r^n(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \sum \boldsymbol{u_n(r,\theta)}$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$\textbf{Mas: } \boldsymbol{u(a,\theta) = f(\theta)}$$

$$\boldsymbol{f(\theta)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Onde

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

Exemplo: f(θ) =θ(π–θ)

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Com:

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta \qquad a^n k_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

Substituindo-se f(θ):

$$c_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$k_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta)\sin n\theta \, d\theta$$

Para calcular as integrais a tabela de integrais pode ser útil:

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2}$$

$$\int x\sin ax\,dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$