Resolução das equações

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)

Ondas acústicas: corda (1D) e tambor (2D); ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas (3D).

Equação de ondas (corda vibrante) (1D)

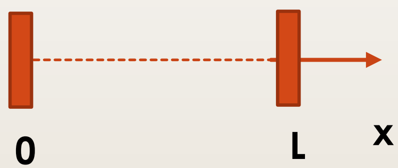
Problema específico

Ondas mecânicas em uma corda elástica de comprimento L, ligeiramente esticada entre dois suportes sendo o eixo x ao longo da corda (violino, ...).

Desprezados os efeitos de amortecimento $\rightarrow$ resistência do ar.

Deslocamento da corda $\rightarrow$ *u(x,t)*

$$a^2 = \frac{F}{\rho}$$



$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- *F é a força*
- *ρ é a massa/unid. comp.*

- ***Condição inicial*** $\rightarrow$ *em t = 0*
- $\rightarrow$ *u(x,0) = f(x) : posição inicial*
- $\rightarrow$ *u'(x,0) = g(x) (u' = du/dt): velocidade inicial*

- ***Condição de contorno****: u(0,t) = u(L,t) = 0 para t $\geq$ 0. (parado nas extremidades em qq momento)*

Resolução: dois casos

1) Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: u(x,0) = f(x) e u'(x,0) = 0

2) Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio u(x,0) = 0, mas com velocidade inicial u'(x,0) = g(x).

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Separação de variáveis: u(x,t) = X(x) T(t)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad \frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

Caso 1

Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$

- ***Condição de contorno****: u(0,t) = u(L,t) = 0 para t ≥ 0.*
(parado nas extremidades em qq momento)

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda a t + B_2 \cos \cos \lambda a t$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

- *Condição de contorno: u(0,t) = u(L,t) = 0 (somente x!)*
- $A_2 = 0$
- $A_1 \neq 0$
- $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ $\Rightarrow$ $X(x) = X_n(x) = A_1(n) \sin \frac{n\pi}{L} x$

Da equação em t:

$$T_n(t) = B_1(n) \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_2(n) \cos \frac{n\pi a}{L} t$$

$$u = u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\Downarrow$$

$$u_n(x,t) = \left(A_1(n) \sin \frac{n\pi}{L} x\right) \times \left[B_1(n) \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_2(n) \cos \frac{n\pi a}{L} t\right]$$

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left(A_n \sin \frac{n\pi a}{L} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t\right)$$

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi a}{L}t + B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Aplicando-se a condição inicial: u(x,0) = f(x) e u'(x,0) = 0

$$u_n{}'(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x \times \frac{n\pi a}{L}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{L}t - B_n \sin\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

u'(x,0) = 0

$$u_n'(x,0) = \sin\frac{n\pi}{L}x \times \frac{n\pi a}{L}(A_n 1 - B_n 0) \quad = 0$$

$A_n = 0$

$$u_n(x,t) = B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Solução geral é a superposição linear de todos $u_n(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Resultado para as condições: *u(x,0) = f(x) e u'(x,0) = 0*

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi a}{L} t \, \sin\frac{n\pi}{L} x$$

Só falta aplicar a condição: u(x,0) = f(x)

$$f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi}{L} x$$

Coeficientes B_n são os coeficientes de Fourier e dependem da forma de f(x).

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

Análise

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t \, \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Para um valor fixo de n a função é periódica no tempo cujo período é $T_n = 2L/na$, pois:

$$\cos\frac{n\pi a}{L}t = \cos\omega_n t \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{L}$$

$$\Rightarrow \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

São as frequências naturais da corda, ou seja, as frequências no qual a corda vibra livremente.

Análise (cont.)

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t \, \sin\frac{n\pi}{L}x$$

O fator dependente da posição $\boldsymbol{sin\frac{n\pi}{L}x}$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar em uma dada frequência.

Cada padrão de deslocamento é chamado de **modo natural de vibração** e é periódico em x com período → $\boldsymbol{\lambda = \frac{2L}{n}}$ que é o comprimento de onda do modo de frequência $\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi a}{L}}$

Vetor de onda = k = 2π/λ

Resumindo...

Em t: $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$; $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T_n = \frac{2L}{na}$

Em x: $k_n = \frac{n\pi}{L}$; $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\omega_n t \, \sin k_n x}$$

com $$f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Caso 2

Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio.

Condição inicial: $u(x,0) = 0$, $u'(x,0) = g(x)$.

- ***Condição de contorno***: *u(0,t) = u(L,t) = 0 para t ≥ 0.* *(parado nas extremidades em qq momento)*

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda at + B_2 \cos \cos \lambda at$$

- ***Como as equações diferenciais são as mesmas e as condições de contorno são as mesmas o resultado antes de aplicar as condições iniciais são as mesmas do caso 1:***

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi a}{L}t + B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

- ***Aplicando-se a primeira condição inicial, u(x,0) = 0 :***

$B_n = 0$

$$u_n(x,t) = A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi a}{L}t$$

Solução geral é a superposição linear de todos $u_n(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi a}{L}t$$

- ***Aplicando-se a segunda condição inicial: u'(x,0) = g(x).***

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi at}{L}$$

$$u'(x,t) = \sum_n u_n{}'(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} \times \cos\frac{n\pi at}{L}$$

- ***u'(x,0) = g(x) ou seja para t = 0.***

$$u'(x,0) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} = g(x)$$

$$u'(x,0) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi a}{L} = g(x)$$

- ***Reescrevendo como:***

$$g(x)\frac{L}{\pi a} = \sum_n n\, A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

- ***Chamando de:***

$$g(x)\frac{L}{\pi a} = f(x)$$

$$n\, A_n = B_n$$

$$f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

- ***Ou seja:***

$$n\, A_n = \frac{2}{L}\frac{L}{\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x \Rightarrow A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

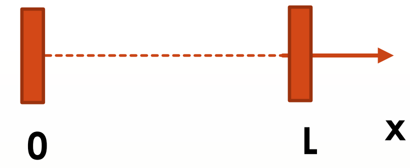
Finalmente

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi a}{L}t$$

com

$$A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Equação de ondas (corda vibrante) (1D)



$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Separação de variáveis

$$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$T(t) = B_1 \sin \lambda a t + B_2 \cos \cos \lambda a t$$

Mesmas condições de contorno para os dois casos: *$u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$. (parado nas extremidades em qq momento)*

Muda a condição inicial

- ***Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$***

$$u(x,t) = \sum_n B_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

- ***Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio. Condição inicial: $u(x,0) = 0$, $u'(x,0) = g(x)$.***

$$u(x,t) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$