



Resolução das equações EDP

- ➔ **Equação de Difusão (calor) (1D)**
- ➔ **Equação de ondas (corda vibrante) (1D)**
- ➔ **Equação de Laplace (2D)**



Equação de Difusão de Calor – 1 D

A equação mais geral unidimensional é dada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t}$$

$$T = T(x, t)$$

T é a temperatura;

c_p é o calor específico;

ρ é a densidade de massa;

k é a condutividade térmica;

\dot{q}_g é a taxa de geração de calor.

Problema específico

Barra longa de secção reta uniforme feita de uma material homogêneo de comprimento L.

- Material homogêneo $\rightarrow k$ é constante em x
- Extremidades isoladas: $\dot{q}_g = 0$;
- Condição inicial \rightarrow em $t = 0 \rightarrow T(x, 0) = f(x)$
- Condição de contorno: $T(0, t) = T(L, t) = 0$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho c_p}$$

Difusividade (m^2/s)


Resolução

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Separação de variáveis: $T(x,t) = X(x) Y(t)$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{dY}{dt} + \lambda^2 a^2 Y = 0$$


$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$T = T(x, t) = X(x) Y(t)$$

- *Condição de contorno: $T(0, t) = T(L, t) = 0$ (somente x !)*
- $A = 0$
- $B \neq 0$
- $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\frac{dY}{dt} + \lambda^2 a^2 Y = 0$$

$$Y(t) = Y_n(t) = C_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{L^2}\right)$$

Resultado:

$$T(x, t) = \sum_n T_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{L^2} \right)$$

- *Condição inicial* \rightarrow em $t = 0 \rightarrow T(x, 0) = f(x)$,
para determinar A_n !

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Série de Fourier em senos!

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$



Algumas possibilidades de distribuição de temperatura inicial:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{600}{L} x & \text{para } 0 \leq x < L/2 \\ 600 - \frac{600}{L} x & \text{para } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

$$2) f(x) = \text{constante} = 300$$

etc