Equações diferenciais parciais

EDP

1 – Equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

- Eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- Hidrodinâmica,
- Fluxo de calor,
- Gravitação.

2 – Equação de Difusão

- Dependente do tempo

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi$$

- Independente do tempo (Eq. de Helmholtz)

$$\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0$$

3 – Equação de onda

- Dependente do tempo

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

- Independente do tempo (Eq. de Helmholtz)

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$$

- Ondas elásticas em sólidos: cordas, barras membranas,
- Som ou acústica,
- Ondas eletromagnéticas,
- Reatores nucleares.

4 – Equação de Schrödinger

- Dependente do tempo

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

- Independente do tempo

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

- etc

Métodos de solução de EDP´s

- **Separação de variáveis (homogêneas)**
  - Série de potências: obtém-se por exemplo as funções especiais referentes a cada equação
  - Série de Fourier, transformadas de Fourier e Laplace
  - Casos especiais: redução à equações conhecidas

- **Funções de Green (não homogêneas)**

Método da Separação de variáveis

Exemplo: Equação de Helmholtz

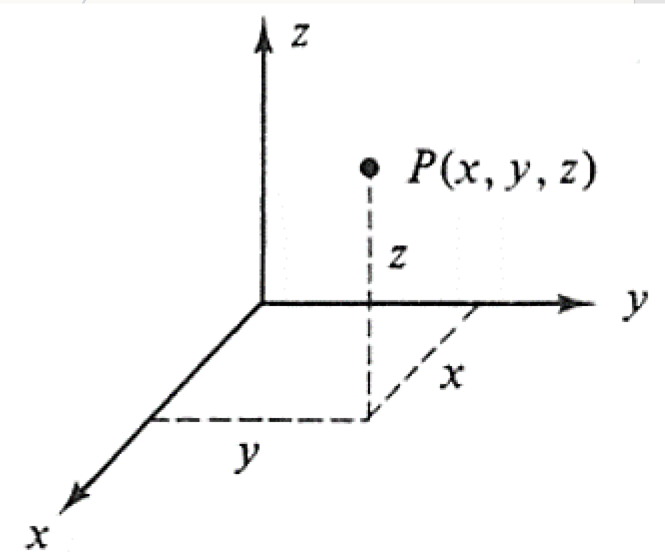
Separação de variáveis da equação de Helmholtz: $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$

Coordenadas cartesianas $\psi(x, y, z)$

ψ(x, y, z)

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0;$$

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0$$

÷ XYZ

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0$$

Isola a parte em x do lado esquerdo

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2$$

x, y e z são variáveis independentes

x, y e z são coordenadas independentes

Portanto, o comportamento de x não é determinado por z e y e a forma de se resolver isto é assumir que cada lado deve ser igual a uma constante, a mesma:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = -l^2 \\[2ex] l^2 - k^2 - \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} = \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} l^2 - k^2 - \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} = -m^2 \\[2ex] \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -m^2 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -l^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2X}{dx^2} + l^2X = 0}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2Y}{dy^2} + m^2Y = 0}$$

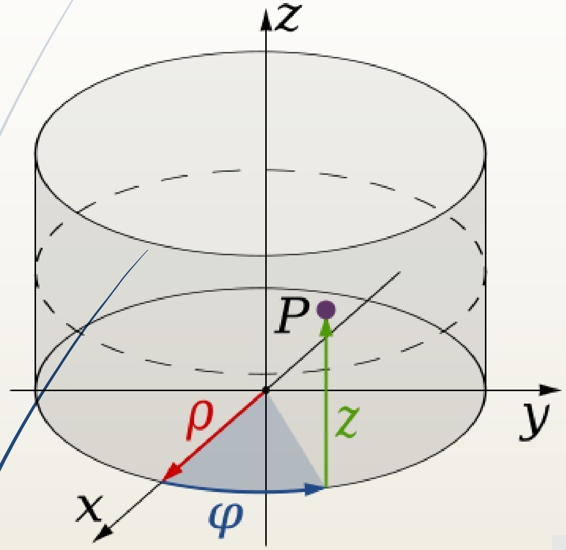
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -\,n^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2Z}{dz^2} + n^2\,Z = 0}$$

$$\text{com } \boldsymbol{k^2 = l^2 + m^2 + n^2}$$

Separação de variáveis da equação de Helmholtz: $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$

Coordenadas Cilíndricas circulares: $\psi(\rho, \varphi, z)$

ψ (ρ, φ, z)



$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

$$\psi(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{PZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2P\Phi Z=0$$

$\div P\,\Phi Z$

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2=0$$

Isola a parte em z do lado esquerdo

$$-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2$$

ρ, φ e z são variáveis independentes

$$-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2$$

ρ, φ e z são variáveis independentes

Portanto, o comportamento de z não é determinado por ρ e φ e a forma de se resolver isto é assumir que cada lado deve ser igual a uma constante, a mesma constante – l^2:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=l^2$$

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-l^2$$

Somente para a equação em P(ρ) e Φ(φ) :

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-l^2$$

Multiplica a equação por ρ^2:

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\rho^2k^2=-\rho^2l^2$$

Isola a dependência de ρ e φ :

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\rho^2k^2+\rho^2l^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Novamente, as variáveis ρ e φ são independentes e igualamos cada parte a uma constante – l^2:

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\rho^2k^2+\rho^2l^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=m^2$$

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+(k^2+l^2)\rho^2=m^2$$

Com $(k^2+l^2)=n^2$

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+(n^2\rho^2-m^2)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+(n^2\rho^2-m^2)P=0$$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas cilíndricas resulta nas 3 equações:

$$\boxed{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = l^2}$$

$$\boxed{-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

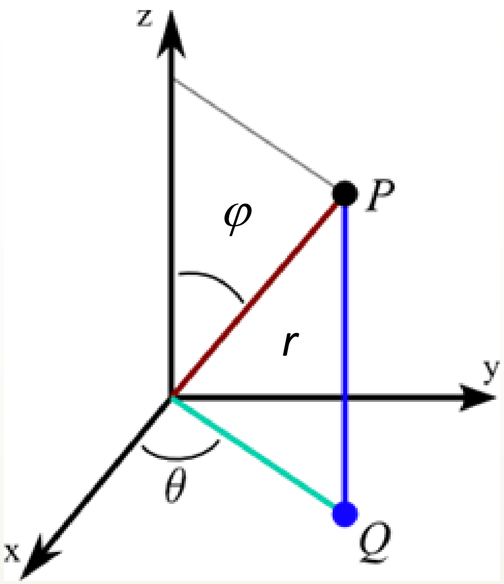
Equação de Bessel

Com $(k^2+l^2) = n^2$

Separação de variáveis da equação de Helmholtz: $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$

Coordenadas Polares Esféricas: $\psi\,(r, \theta, \varphi)$

ψ (r, θ, φ)



$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0;$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi).$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 sen\theta}\left[sen\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi^2}{d\varphi^2} = -k^2$$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas esféricas resulta nas 3 equações:

Equação de Bessel Esférica

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{Q}{r^2}\right)R=0}$$

$k^2 > 0$

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(Q-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0}$$

Equação Associada de Legendre

$Q = l(l+1)$

l inteiro e positivo

$$\boxed{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2}$$

Resolução das equações

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)