LOM 3253 - Física Matemática
2ª. parte

Profª. Cristina Bormio Nunes

Bibliografia Sugerida

- W E. Boyce e R. C. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares, Ed. LTC, 9ª edição
- Arfken e Weber, Física Matemática, Ed. Campus/ Elsevier
- Butkov, E., Física Matemática, Editora **LTC.**

Conteúdo

- Série de Fourier
- Equações Diferenciais Parciais
  - Equação de Difusão (calor)
  - Equação de ondas (corda vibrante)
  - Equação de Laplace

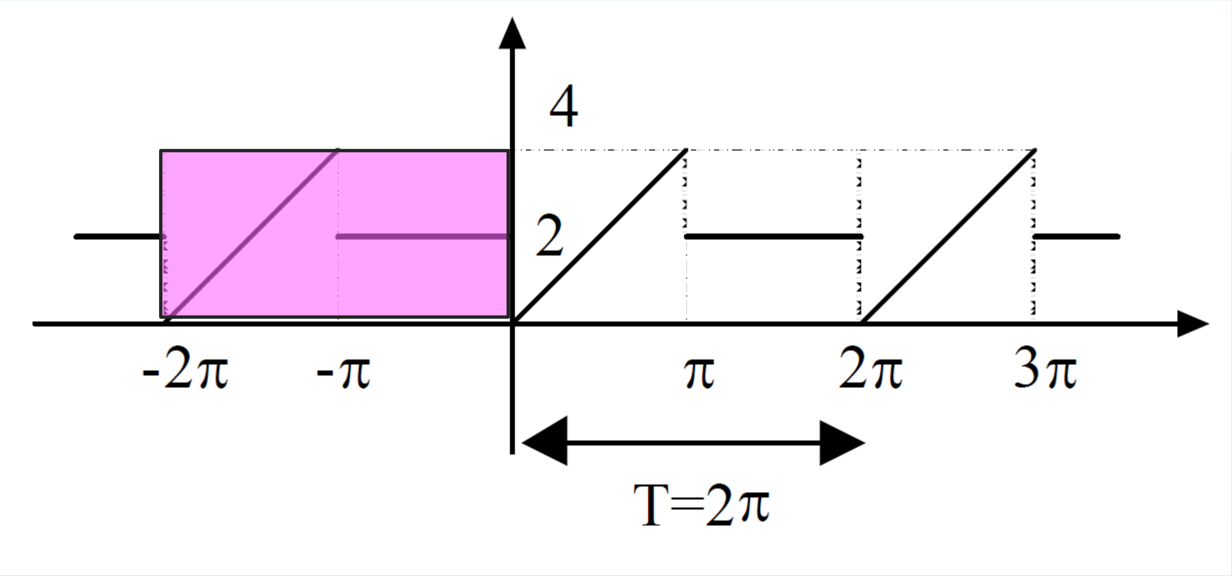
- Transformadas Integrais: Fourier e Laplace

- Funções Especiais: Polinômios de Legendre, Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel

Séries de Fourier

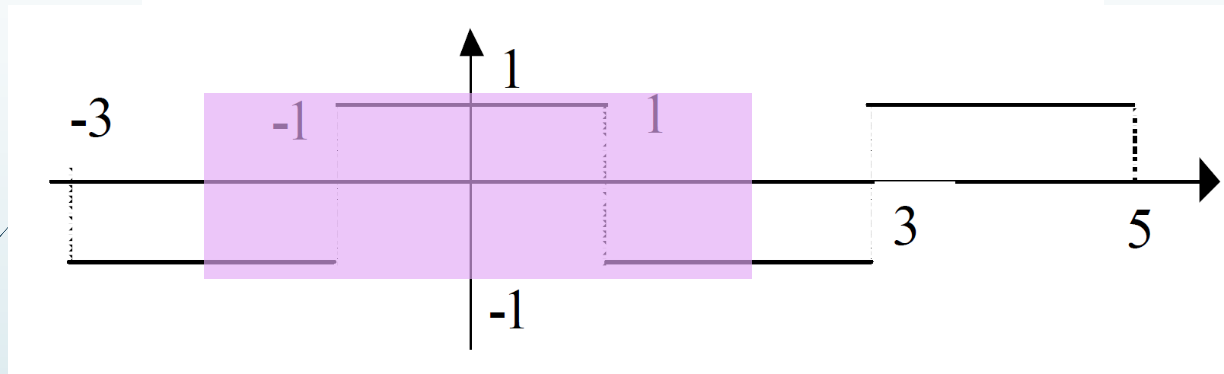
Funções Periódicas

- As **funções periódicas** podem ser definidas como aquelas funções f(t) para as quais:
- $f(t) = f(t + T)$
- A menor constante T que satisfaz f(t) é chamada **período** da função f(t). Por iteração :
- $f(t) = f(t + nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

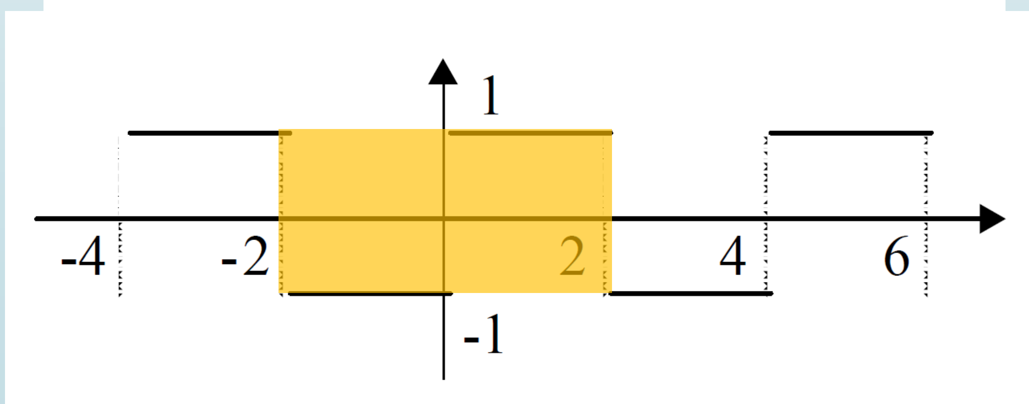


Propriedades de Paridade

função par se $f(-x) = f(x)$.

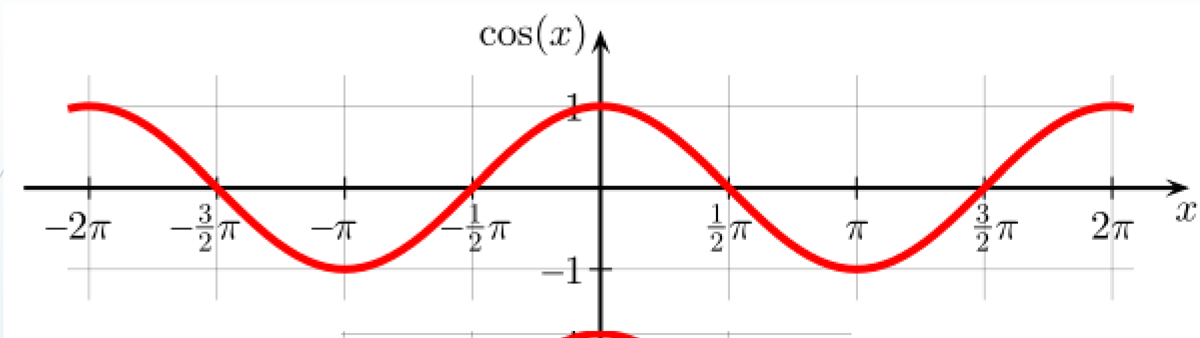


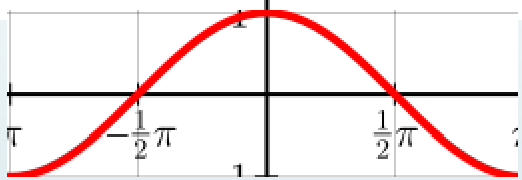
função impar se $f(-x) = -f(x)$.

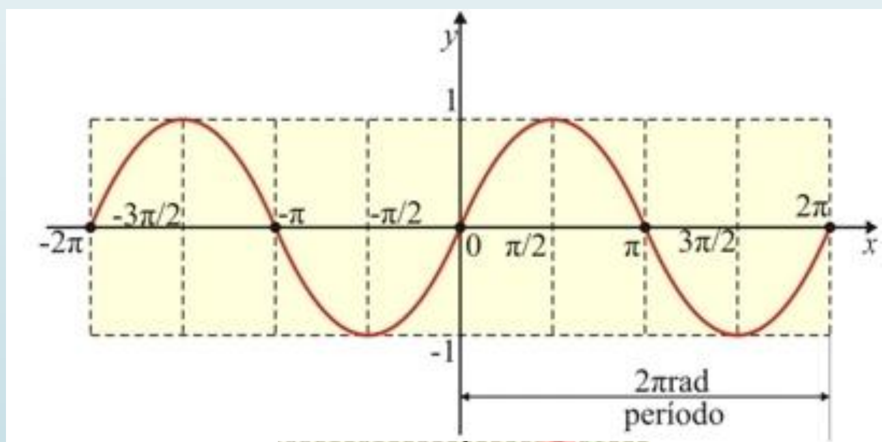


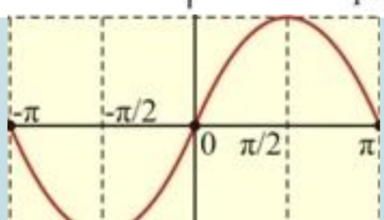
Funções seno e cosseno são funções periódicas!

Funções cosx e senx





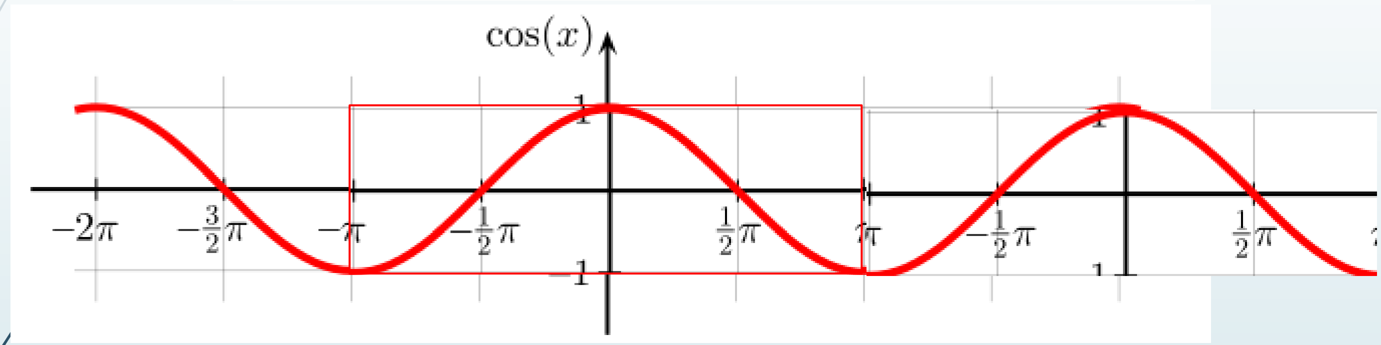




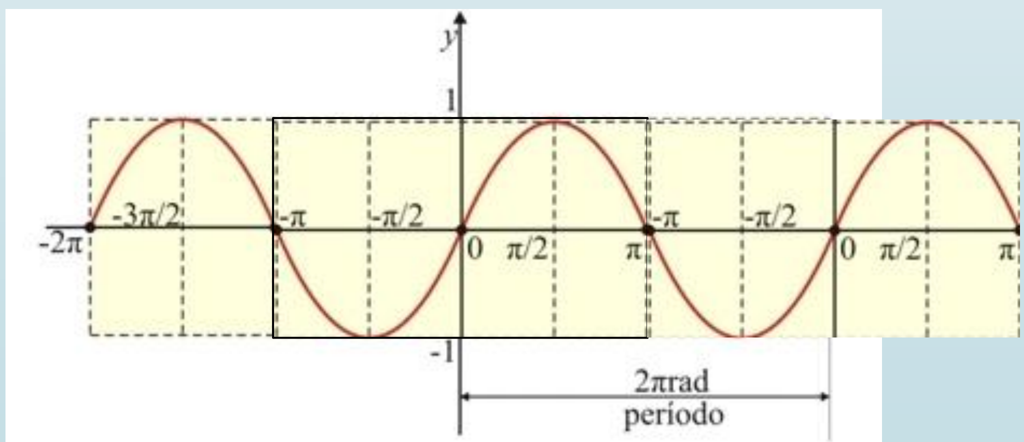
Propriedades de Paridade

Deve ser analisada em x=0 e y=0

função par se $f(-x) = f(x)$



função impar se $f(-x) = -f(x)$



senx

Integração de funções pares e ímpares em intervalos simétricos

- **Se a função for ímpar**

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

- **Se a função for par**

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Relações de ortogonalidade

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \cos mx \, dx = 0 \quad (\text{para todos os } n, m)$$

$$\text{b) } \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ 2\pi & (\text{se } n = m = 0) \\ \pi & (\text{se } n = m \neq 0) \end{cases}$$

$$\text{c) } \int_{-\pi}^{+\pi} \text{sen } nx \text{ sen } mx \, dx = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \neq m) \\ \pi & (\text{se } n = m) \end{cases}$$

É possível mostrar estas relações usando :

- **sen (a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a**
- **sen (a – b) = sen a . cos b – sen b . cos a**
- **cos (a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b**
- **cos (a – b) = cos a . cos b + sen a . sen b**

Definição de Série de Fourier

- Uma série formada por senos e cossenos é chamada de série trigonométrica assume a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

Período = 2π

- Se a função converge uniformemente no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, a série convergirá uniformemente para todos os valores de x
- Se os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (n > 0)$$

- Os coeficientes a_n e b_n são os coeficientes de Fourier e a série f(x) é denominada de **Série de Fourier** de período 2π .

O período 2π não é obrigatório na teoria das séries de Fourier.

- A substituição de **x** por **(2π/T)t** fornece uma série com período T:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega t)\, dt$$

$\omega = 2\pi / T$ é denominada **freqüência angular fundamental** da função f(t)

a série de Fourier resultante deverá reproduzir f(t) no intervalo

$$-T/2 < t < T/2$$

Em muitas aplicações, quando x representa uma distância, usar o período 2L é mais conveniente.

Troca-se $\pi \to L$ e $n \to n\pi/L$ em:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx \quad (n > 0)$$

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Séries em Cossenos ou Senos

- Cosseno

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

- Seno

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = 0$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

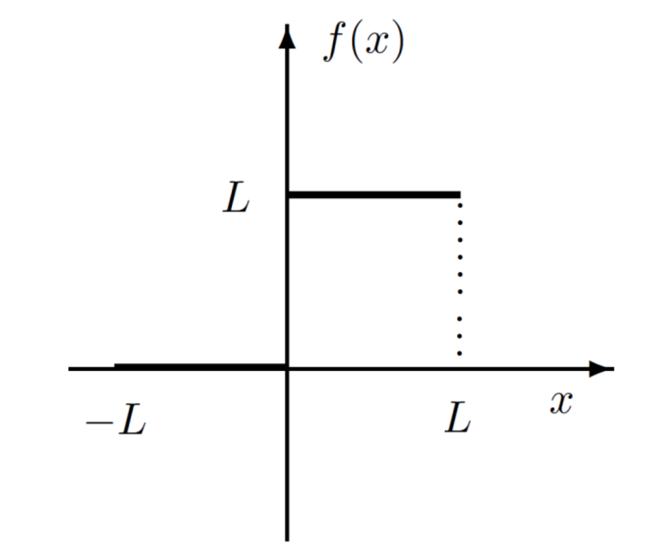
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

Exemplo 1:

- Desenvolva a série de Fourier para a onda quadrada:

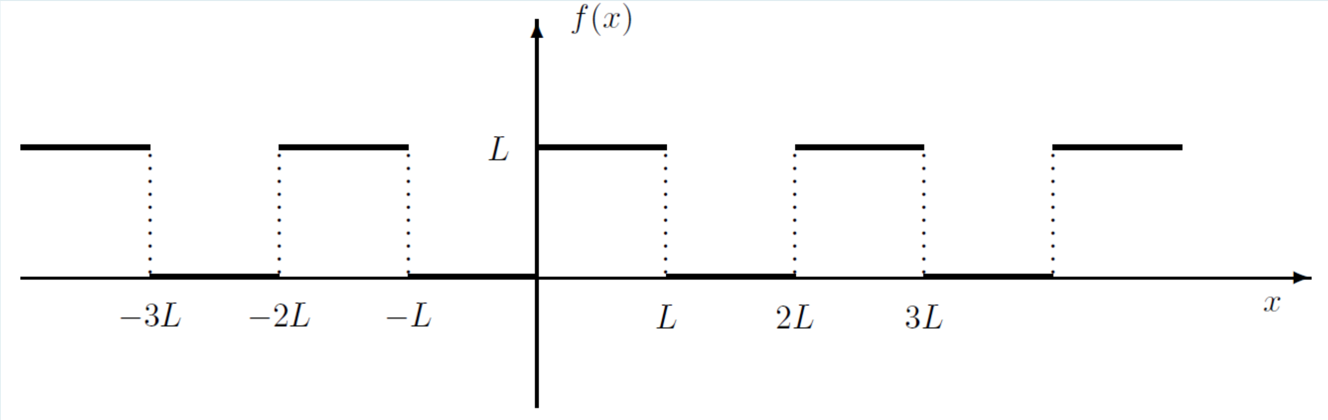
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -L \leq x \leq 0 \\ L & \text{se} \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x)$$



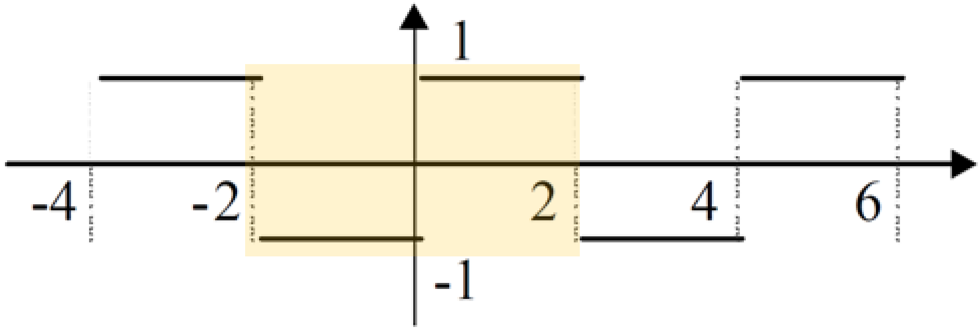
- Série de Fourier para a onda quadrada:

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Sen\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]}{(2n+1)}$$



Exemplo 2:

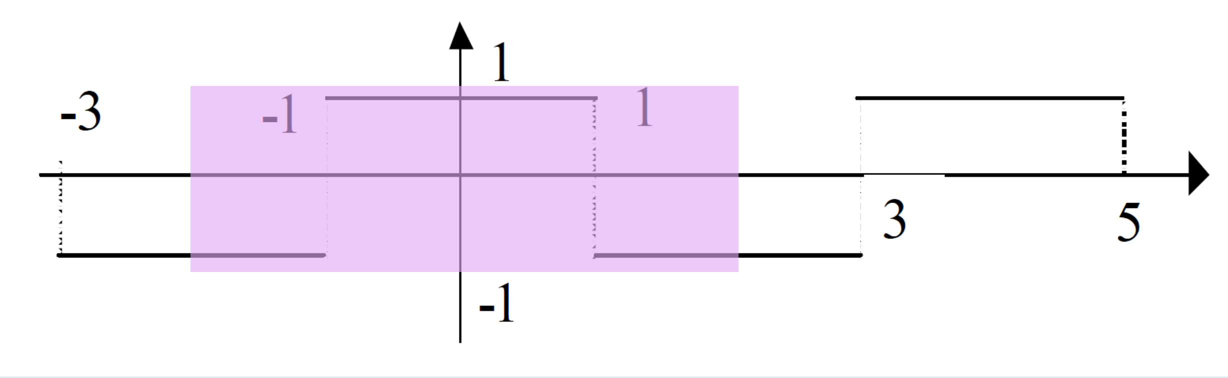
- Desenvolva a série de Fourier para a função ímpar:



$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}t + \ldots \right).$$

Exemplo 3:

- Desenvolva a série de Fourier para a função par:

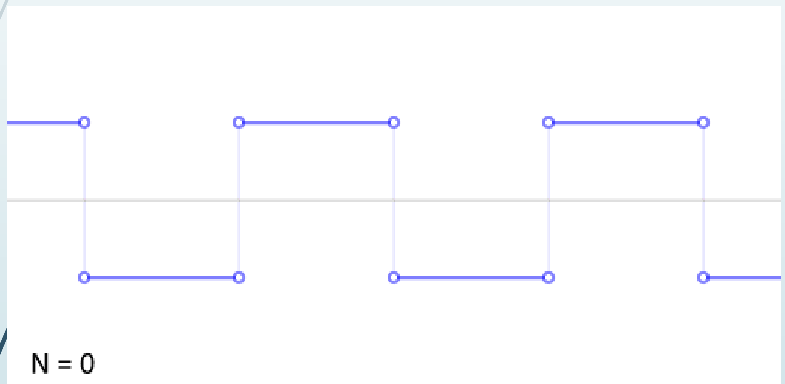


$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t - \dots\right)$$

Vantagens da Representação de Fourier

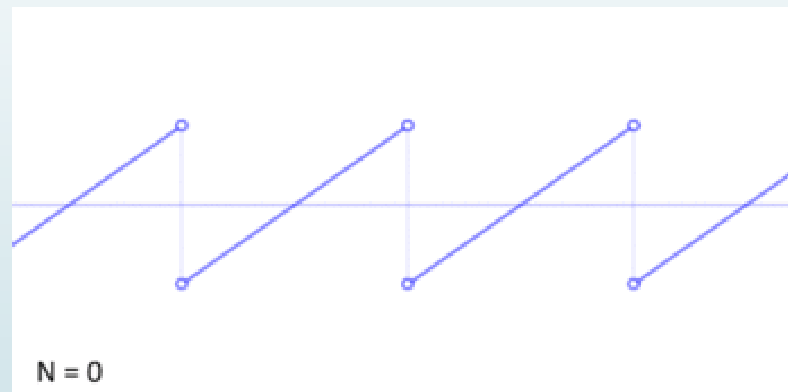
- **Expansão de funções descontínuas**
- **Expansão de funções periódicas**

Onda quadrada



$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{sen\,\frac{(2N+1)\pi t}{2}}{(2N+1)}$$

Onda dente de serra



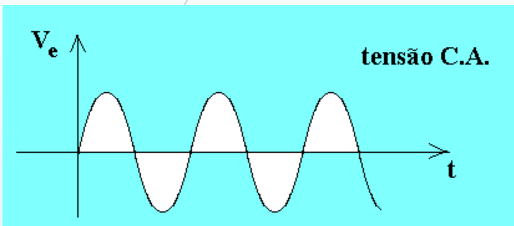
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{senNt}{N}$$

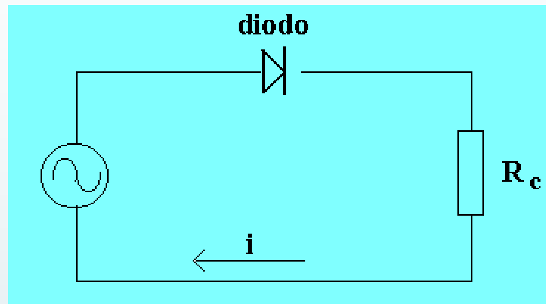
Aplicações

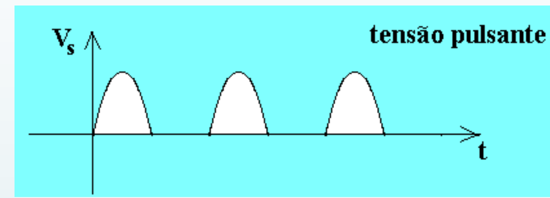
- Onda quadrada em altas frequências >> circuitos elétricos projetados para lidar com pulsos que sobem abruptamente.
- Retificador de onda completa (AC $\rightarrow$ DC)
- Série Infinita, Função Zeta de Riemann

Retificador de onda

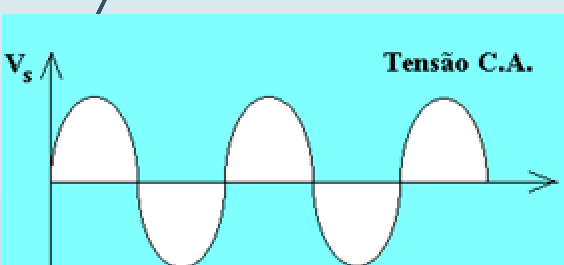
Retificador de meia onda

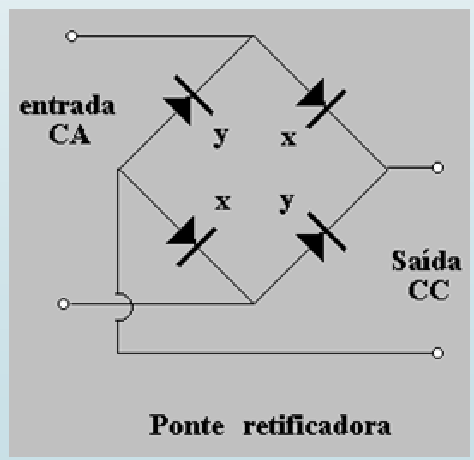


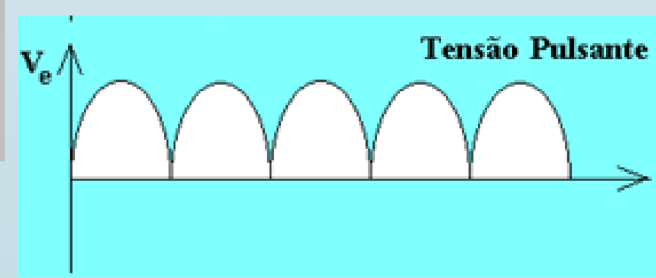




Retificadores de onda completa.







http://www.fis.ita.br/labfis45/exps/e8.htm

A onda passada pelo retificador de onda completa resulta em:

$$f(t) = -sen\omega t \quad para \quad -\pi < \omega t < 0$$

$$f(t) = sen\omega t \quad para \quad 0 < \omega t < \pi$$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1}$$

A frequência original ω foi eliminada. A oscilação de frequência mais baixa é 2ω. As componentes de alta frequência caem com $4n^{2}$, mostrando que o retificador de onda completa faz um bom trabalho na aproximação da corrente contínua, dependendo da aplicação.

Função Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

Para $x = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Lista de exercícios

- Esboce o gráfico das funções por 3 períodos e encontre a série de Fourier:
- A) $f(x) = \begin{cases} x \quad para \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 \quad para \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$ $\qquad f(x+2\pi)=f(x)$
- B) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad para \quad -2 \leq x \leq -1 \\ x \quad para \quad -1 < x < 1 \\ 0 \quad para \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\qquad f(x+4)=f(x)$
- C) $f(x) = L - x \qquad 0 \leq x \leq L$ $\qquad$ *em senos, período 2L*