Filtro Inverso: Denomina-se de "filtro inverso" o operador (a_t) que quando convolvido com uma *wavelet* (w_t) resulta em um *spike* (δ_t), ou seja, $w_t * a_t = \delta_t$. **O processo de filtragem inversa também é conhecido como "deconvolução".**

O operador a_t sempre possui um número infinito de coeficientes. Portanto, sempre existirá um erro no resultado da deconvolução (saída obtida), devido ao truncamento do operador. Por exemplo, verifique o resultado das seguintes convoluções:

a) (1, - ½) * (1, ½ , ¼) = *(1, 0, 0, -1/8)*

b) (1, - ½) * (1, ½ , ¼ , 1/8, 1/16) = *(1, 0, 0, 0, 0, -1/32)*

c) (- ½, 1) * (-2, -4, -8) = *(1, 0, 0, -8)*

d) (- ½, 1) * (-2, -4, -8, -16, -32) = *(1, 0, 0, 0, 0, -32)*

Observe em (a) e (b), que quanto maior o número de coeficientes do operador, menor o erro do processo. Já em (c) e (d) ocorre o oposto, quanto maior o número de coeficientes, maior o erro do processo. A diferença entre os exemplos está na distribuição de energia da *wavelet* (sinal de entrada para o processo de deconvolução):

- em (a) e (b), a *wavelet* é de fase mínima (maior energia no início do sinal);
- em (c) e (d), a *wavelet* é de fase máxima (maior energia no fim do sinal).

Portanto, o filtro inverso oferece resultados satisfatórios quando a wavelet for de fase mínima.

Obtenção do filtro inverso por mínimos quadrados: deseja-se obter o filtro inverso de x_t, tal que a diferença entre a saída obtida (resultado da deconvolução) e saída desejada (*spike*) seja mínima no sentido dos mínimos quadrados. Assim,

Saída obtida (y_t)	Saída desejada ($\tilde{y}_t$)
$y_t = x_t * a_t = (x_0, x_1, x_2) * (a_0, a_1, a_2)$	$\tilde{y}_t = \delta_t$
$y_0 = a_0\, x_0$	1
$y_1 = a_0\, x_1 + a_1\, x_0$	0
$y_2 = a_0\, x_2 + a_1\, x_1 + a_2\, x_0$	0
$y_3 = a_1\, x_2 + a_2\, x_1$	0
$y_4 = a_2\, x_2$	0

Critério de mínimos quadrados: $L = \sum_{k=0}^{N} (y_k - \tilde{y}_k)^2$ deve ter um valor mínimo

$$L = (a_0\, x_0 - 1)^2 + (a_0\, x_1 + a_1\, x_0)^2 + (a_0\, x_2 + a_1\, x_1 + a_2\, x_0)^2 + (a_1\, x_2 + a_2\, x_1)^2 + (a_2\, x_2)^2$$

Para minimizar L com respeito aos coeficientes do filtro (a_o, a_1, a_2), deve-se encontrar os valores de (a_o, a_1, a_2) que satisfaçam as equações $\frac{\partial L}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial a_2} = 0$.

$$\frac{\partial L}{\partial a_0}=2\left(a_0\,x_0-1\right)x_0+2\left(a_0\,x_1+a_1\,x_0\right)x_1+2\left(a_0\,x_2+a_1\,x_1+a_2\,x_0\right)x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_0}=2\,a_0\,x_0^2+2\,a_0\,x_1^2+2\,a_0\,x_2^2-2\,x_0+2\,a_1\,x_0\,x_1+2\,a_1\,x_1\,x_2+2\,a_2\,x_0\,x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_0}=\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right)a_0+\left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right)a_1+\left(x_0\,x_2\right)a_2-x_0=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1}=2\left(a_0\,x_1+a_1\,x_0\right)x_0+2\left(a_0\,x_2+a_1\,x_1+a_2\,x_0\right)x_1+2\left(a_1\,x_2+a_2\,x_1\right)x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1}=2\,a_1\,x_0^2+2\,a_1\,x_1^2+2\,a_1\,x_2^2+2\,a_0\,x_0\,x_1+2\,a_0\,x_1\,x_2+2\,a_2\,x_0\,x_1+2\,a_2\,x_1\,x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1}=\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right)a_1+\left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right)a_0+\left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right)a_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2}=2\left(a_0\,x_2+a_1\,x_1+a_2\,x_0\right)x_0+2\left(a_1\,x_2+a_2\,x_1\right)x_1+2\,a_2\,x_2^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2}=2\,a_2\,x_0^2+2\,a_2\,x_1^2+2\,a_2\,x_2^2+2\,a_0\,x_0\,x_2+2\,a_1\,x_0\,x_1+2\,a_1\,x_1\,x_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2}=\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right)a_2+\left(x_0\,x_2\right)a_0+\left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right)a_1=0 \qquad (3)$$

Escrevendo as Equações (1), (2) e (3) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right) & \left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right) & \left(x_0\,x_2\right) \\ \left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right) & \left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right) & \left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right) \\ \left(x_0\,x_2\right) & \left(x_0\,x_1+x_1\,x_2\right) & \left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

A solução do sistema linear acima (4), equivale ao operador (ou filtro) inverso (a_t) obtido pelo critério dos mínimos quadrados.

Filtros de Wiener: Observe agora, que os valores que aparecem na matriz (4) à esquerda correspondem aos valores da autocorrelação da *wavelet* ($\phi_{xx}(\tau)$); e que o vetor à direta da igualdade corresponde aos valores da correlação cruzada da saída desejada ($\tilde{y}_t$) com a *wavelet*, $\phi_{\tilde{y}x}(\tau)$

Auto-correlações de $x_t=\left(x_0,x_1,x_2\right)$, $\phi_{xx}(\tau)=\Sigma_k\, x_k\, x_{k+\tau}$:

$\Phi_{xx}\left(0\right)=x_0^2+x_1^2+x_2^2$

$\Phi_{xx}\left(1\right)=x_0\,x_1+x_1\,x_2$

$\Phi_{xx}\left(2\right)=x_0\,x_2$

Correlação cruzada da saída desejada $\tilde{y}_t$ com x_t. $\phi_{\tilde{y}x}(\tau)=\Sigma_k\, x_k\, \tilde{y}_{k+\tau}$:

$\Phi_{\tilde{y}x}\left(0\right)=x_0$ $\Phi_{\tilde{y}x}\left(1\right)=0$ $\Phi_{\tilde{y}x}\left(2\right)=0$

Sendo assim, o sistema linear cuja solução equivale ao operador inverso obtido pelo critério dos mínimos quadrados, pode ser construído calculando-se os valores da autocorrelação da *wavelet* (que é considerada como sendo o sinal de entrada do processo) e da correlação cruzada da saída desejada com o sinal de entrada (*wavelet*), como abaixo,

$$\underset{\phi_{xx}(\tau)}{\left(\begin{array}{c}\text{Matriz de}\\ \text{Autocorrelação do}\\ \text{sinal de entrada}\end{array}\right)}\left(\begin{array}{c} a_t \end{array}\right) = \underset{\phi_{\tilde{y}x}(\tau)}{\left(\begin{array}{c}\text{vetor da}\\ \text{Correlação-cruzada}\\ \text{da saída desejada com}\\ \text{o sinal de entrada}\end{array}\right)}$$

Generalizando para um operador com (N+1) coeficientes, tem-se o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(2) & \cdots & \Phi_{xx}(N) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \cdots & \Phi_{xx}(N-1) \\ \Phi_{xx}(2) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \cdots & \Phi_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(N) & \Phi_{xx}(\text{N-1}) & \Phi_{xx}(N-2) & \cdots & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\tilde{y}x}(0) \\ \Phi_{\tilde{y}x}(1) \\ \Phi_{\tilde{y}x}(2) \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{y}x}(N) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Quando o operador inverso é obtido resolvendo-se o sistema que foi construído com base nos valores de correlação, como descrito acima, recebe o nome de **filtro inverso de Wiener** em homenagem a Norbert Wiener (1894-1964).

Wiener também mostrou que a utilização da função de correlação, como na formulação do sistema acima, também é válida se a saída desejada não for um *spike* (δ_t). Neste caso, o operador a_t é denominado *Wiener shaping filter* ou simplesmente **filtro de Wiener**, onde subentende-se “qualquer” saída desejada.

Nas equações acima, o sinal de entrada x_t é a wavelet. **E se a *wavelet* não for conhecida?**

Deconvolução *spiking*: se o sismograma registrado (s_t) for resultado da convolução do sinal de entrada (*wavelet* (w_t)) com uma série temporal que possua propriedades estatísticas tal que possa ser considerada aproximadamente aleatória, então pode-se usar **($x_t = s_t$) ao invés de w_t para calcular o sistema (5)**, **cuja solução será os coeficientes do filtro desejado.** Neste caso o processo costuma ser chamado de deconvolução *spiking* ou deconvolução estatística**.**

Fica como exercício, mostrar matematicamente que: se $x_t = w_t * e_t$, *a autocorrelação do sinal* (x_t) *é igual a autocorrelação da wavelet* (w_t) *a menos de um fator de escala* (P),
$\boldsymbol{\phi_{xx}(\tau)=P\phi_{ww}(\tau)}$**,** *desde que* e_t *seja uma função aleatória, ou seja,* $\boldsymbol{\phi_{ee}(\tau)} = \begin{cases} P, \tau=0 \\ 0, \tau\neq 0 \end{cases}$

Deconvolução Preditiva: assume-se na formulação do filtro de Wiener que a saída desejada ($\tilde{y}_t$) é o próprio sinal registrado, avançado no tempo de α amostras. Desta forma, seja x_t o sinal conhecido, deseja-se obter $x_{t+\alpha}$, onde α é chamado de “lag de predição”. **Por exemplo, seja α = 2:** $x_t = (x_o, x_1, x_2, x_3)$ → sinal de entrada
$\tilde{y}_t = x_{t+\alpha} = (x_2, x_3, 0 , 0)$ → sinal de saída desejado

Calculam-se então, os valores de auto-correlação do sinal de entrada, $\Phi_{xx}(\tau)$,
e da correlação-cruzada entre a saída desejada e o sinal de entrada, $\Phi_{\tilde{y}x}(\tau)$,

$\Phi_{xx}(0) = x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_3$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(0) = x_0x_2 + x_1x_3 = \Phi_{xx}(2)$

$\Phi_{xx}(1) = x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(1) = x_0x_3 = \Phi_{xx}(3)$

$\Phi_{xx}(2) = x_0x_2 + x_1x_3$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(2) = 0 = \Phi_{xx}(4)$

$\Phi_{xx}(3) = x_0x_3$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(3) = 0 = \Phi_{xx}(5)$

$\Phi_{xx}(4) = 0$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(4) = 0 = \Phi_{xx}(6)$

$\Phi_{xx}(5) = 0$ $\qquad$ $\Phi_{\tilde{y}x}(5) = 0 = \Phi_{xx}(7)$

A partir dos quais, monta-se o sistema linear, cuja solução (a_i) corresponde ao filtro de predição:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(2) & \cdots & \Phi_{xx}(N) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \cdots & \Phi_{xx}(N-1) \\ \Phi_{xx}(2) & \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \cdots & \Phi_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(N) & \Phi_{xx}(\text{N-1}) & \Phi_{xx}(N-2) & \cdots & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}(2) \\ \Phi_{xx}(3) \\ \Phi_{xx}(4) \\ \vdots \\ \Phi_{xx}(N+\alpha) \end{bmatrix}$$

Aplicando-se o operador a_t sobre o sinal de entrada (x_t), tem-se o sinal de saída obtido:

$y_t = x_t * a_t$

$y_0 = a_0x_0$

$y_1 = a_1x_0 + a_0x_1$

$y_2 = a_2x_{-0} + a_1x_1 + a_0x_2$

$y_3 = a_3x_{-0} + a_2x_1 + a_1x_2 + a_0x_3$

Desta forma, o erro no processo de predição (e_t) é igual a $\tilde{y}_t$ - y_t, ou seja, $e_{i+\alpha} = x_{i+\alpha} - y_i$

$e_0 = x_0$

$e_1 = x_1$

$e_2 = x_2 - a_0x_0$

$e_3 = x_3 - (a_1x_0 + a_0x_1)$

$e_4 = 0 - (a_2x_{-0} + a_1x_1 + a_0x_2)$

$e_5 = 0 - (a_3x_{-0} + a_2x_1 + a_1x_2 + a_0x_3)$

O sinal obtido (y_t), corresponde a “parte” do sismograma que pode ser previsível, ou seja,os eventos que podem ser detectados nos valores de auto-correlação. **Assumindo que a função refletividade é “aleatória”**, apenas os eventos periódicos poderão ser identificados nos valores de autocorrelação. O erro no processo de predição (descon-siderando o efeito de truncamento do operador) corresponde a parte não previsível do sismograma, que contém, portanto, a função refletividade.

A partir do **filtro de predição** (a_t) pode-se obter o **filtro de erro de predição** (a'_t), que quando convolvido com o sinal de entrada fornece diretamente o erro no processo de predição: $a'_t = (1, \underbrace{0, ..., 0}_{(\alpha\text{-}1)\text{ zeros}}, -a_0, -a_1, -a_2, -a_3)$

Quando α=1, o filtro de erro de predição corresponde ao filtro inverso de Wiener, ou seja, a deconvolução *spiking* é um caso particular da deconvolução preditiva. Portanto se

$\alpha=1$, além de eliminar os eventos periódicos, o pulso sísmico (*wavelet*) é comprimido para uma amostra (um spike) (a demonstração dessa afirmação pode ser encontrada em Yilmaz, Seismic Data Processing, página 108 ou Yilmaz, Seismic Data Analysis, página 188).

Questões:

1) Na prática, qual o significado do **“lag de predição” (α)?**

2) Se a *wavelet* for de fase mista:
   a) a deconvolução *spiking* fornecerá o resultado desejado?
   b) será possível eliminar as reverberações através da deconvolução preditiva?

3) Além da premissa de que a função refletividade é aleatória, que outras suposições devem ser satisfeitas para que os processos de deconvolução (*spiking* e/ou preditiva) forneçam resultados satisfatórios ?