Vibrações e Ondas — 7600025

Lista 3 — teste no dia 16/10/2018

1. Uma corda muito longa tem densidade linear $\mu = 1\,\mathrm{kg/m}$ e está sujeita a uma tensão $T = 1000\,\mathrm{N}$. Uma de suas extremidades está presa a uma barra vertical por uma argola sem atrito e pode mover-se livremente na vertical. Aplica-se a essa extremidade uma força oscilatória.

$$F(t) = \cos(\omega t)\mathrm{N},$$

onde $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$. Tome a barra como origem das posições horizontais ($x = 0$). Encontre a equação que descreve a posição vertical dessa extremidade da corda em função do tempo. *Sugestão: lembre-se de que* $\cos(\omega t) = \Re[\exp(-i\omega t)]$ *e siga o procedimento empregado em classe.*

2. Repita o problema anterior para a força

$$F(t) = \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{N}.$$

3. A partir do resultado da questão anterior, encontre a impedância da corda.

4. Encontre a potência $P(t) = F(t)v(t)$ gerada pela força $F(t)$ no problema 2. Encontre também a potência média em um ciclo da oscilação.

5. Encontre a posição $y(x,t)$ na corda da questão 2. *Sugestão: encontre a solução geral da equação de onda como combinação de modos normais e imponha as condições de contorno no ponto* $x = 0$.

6. Calcule a energia cinética de um pequeno segmento de comprimento dx da corda do problema 2 em função da posição x e em função do tempo t.

7. Calcule a razão entre a energia cinética do segmento de tamanho dx no ponto $x = 0$ e a energia gerada pela força $F(t)$ num intervalo de tempo dt. Interprete o resultado.

8. Suponha agora que a corda do problema 1 não está mais sujeita a uma força externa, mas que, no instante $t = 0$, caminha sobre ela um pulso descrito pela função $f(x+vt)$ que somente é apreciavelmente distinta de zero numa região muito distante do ponto $x = 0$. Para simplificar, suponha que f é uma função par em torno de seu máximo, isto é, que $f(u - u_{max}) = f(u_{max} - u)$, onde u_{max} é o ponto onde a função passa por um máximo. A equação $y(x,t) = f(x+vt)$ descreve o formato da corda apenas aproximadamente no instante $t = 0$, porque essa igualdade não satisfaz à condição de contorno $\partial y/\partial x = 0$, que deve valer em qualquer instante no ponto $x = 0$. Escreva a solução geral na forma proposta por D'Alembert para a equação de onda e, supondo conhecida a função f, encontre a solução que satisfaz à condição de contorno em $x = 0$. Interprete fisicamente o resultado.

9. Considere a corda sujeita à condição de contorno do problema anterior, mas agora procure uma solução geral com frequência $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$. Suponha que a corda satisfaz à condição inicial $y(x = 0, t = 0) = 0$ e encontre a expressão geral para $y(x,t)$. *Sugestão: escreva* $y(x,t)$ *como combinação linear das quatro soluções com a frequência* ω *e imponha as condições de contorno para eliminar alguns dos coeficientes da combinação.*

10. A corda do problema 1 é agora presa à barra vertical, de forma que $y(x = 0, t) = 0$. Sabe-se que, em $t = 0$, a inclinação da corda em $x = 0$ (isto é, o ângulo que ela forma com o eixo horizontal) tem seu valor máximo e vale $\pi/4$. Encontre $y(x,t)$ para $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$.