# Notas de revisão de matemática para Física Quântica

Bruno Ortega Goes *
Universidade de São Paulo

28 de fevereiro de 2018

## Sumário



*bruno.ortega.goes@usp.br

# 1 Revisão de cálculo básico

Quando escrevi básico, quis dizer bem básico mesmo, comecemos pelas primeiras e segundas derivadas das cinco funções mais úteis que existem, a seguir "$a$"será uma constante real qualquer:

$$f(x) = sin(ax) \rightarrow \frac{df}{dx} = acos(ax) \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -a^2 sin(ax) \quad (1)$$
$$g(x) = cos(ax) \rightarrow \frac{df}{dx} = -asin(ax) \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -a^2 cos(ax) \quad (2)$$
$$h(x) = e^{ax} \rightarrow \frac{df}{dx} = ae^{ax} \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = a^2 e^{ax} \quad (3)$$
$$p(x) = sinh(ax) \rightarrow \frac{df}{dx} = acosh(ax) \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = a^2 sinh(ax) \quad (4)$$
$$t(x) = cosh(ax) \rightarrow \frac{df}{dx} = asinh(ax) \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = a^2 cosh(ax) \quad (5)$$

e as funções hiperbólicas são definidas a partir da exponencial por:

$$sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \quad (6)$$
$$cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \quad (7)$$

Olhe atentamente para as segundas derivadas. Percebe? Todas essas cinco funções têm em comum o fato de que, ao dericarmos duas vezes, obtemos elas próprias com uma constante $\pm a^2$ multiplicando!

Lembre que em *álgebra linear* quando tinhamos um operador "$A$"que aplicado a um vetor "$v$"resultava no próprio vetor "$v$"com uma constante "$\lambda$", diferente de zero, multiplicando-o, ou seja

$$Av = \lambda v \quad (8)$$

damos nomes especiais para esses caras: o vetor "$v$"é o tal "**auto**vetor"do operador $A$ e $\lambda$ é o "**auto**valor". No contexto apresentado acima, as cinco funções (que são vetores no espaço de funções) são as ***auto****funções* do operador segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}$, com autovalores $\pm a^2$.

Este jargão de "**auto**coisas"é muito utilizado em mecânica quântica[1], e sua origem é essa. No decorrer do curso vocês ouvirão muito "autofunção","autoestado","autoenergia","auto da compadecida"e por ai vai.

Em cálculo IV vocês viram (ou irão ver, não tem como escapar!) que quando se cria a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ é possível definir o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e fazer um monte de coisas legais com as funções complexas.

O corpo dos números complexos é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\} \quad (9)$$

[1]SPOILER ALERT: no curso de quântica I ficará extremamente claro o porque, lá será apresentado o formalismo de Dirac, os axiomas da mecânica quântica e etc. Lá você verá que "observáveis"físicas, como energia, são representadas por operadores hermitianos que têm a excelente propriedade de que seus autovalres são reais. Seu objetivo lá será diagonalizar as coisas e encontrar autovalores... Viajei um pouco, pode voltar pro texto.

com as seguintes operações: se $z = (x, y)$ e $x = (a, b)$ $z, w \in \mathbb{C}$

$$z + w \quad = (x + a, y + b) \tag{10}$$

$$z.w = (xa - yb, xb + ya) \tag{11}$$

O complexo conjugado é $z^* = (x, -y)$. Em geral escrevemos $z = x + iy$ então $z^* = x - iy$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Se você achou a definição da multiplicação estranha, você está certo, a seguinte continha "explica"o porquê dessa definição

$$zw = (x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + i^2yb = (xa - yb) + i(xb + ya) \tag{12}$$

Uma interpretação geométrica para números complexos e seus conjugados é:

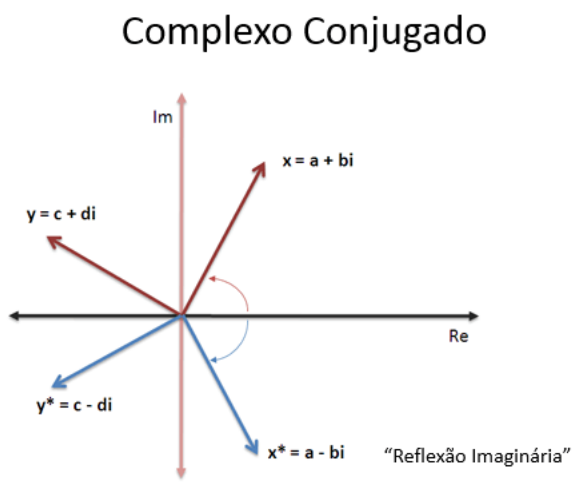



Figura 1: Essa foi a melhor imagem que achei no google, estou usando sem qualquer autorização. Retirada de: `https://matematicaintuitiva.wordpress.com/2015/07/26/aritmetica-intuitiva-com-numeros-complexos/`

De vetores e GA sabemos que a norma de um vetor é dado por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Seja $\theta$ o ângulo entre o vetor que liga a origem a um ponto z do plano complexo, então:

$$\begin{aligned} sin\theta &= \frac{y}{|z|} \rightarrow y = |z|sin\theta \\ cos\theta &= \frac{x}{|z|} \rightarrow x = |z|cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

$$z = x + iy = |z| \underbrace{(cos\theta + isin\theta)}_{=e^{i\theta}\text{,já mostro que isso é verdade.}} \tag{14}$$

O que nos dá a representação polar

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{15}$$

Cabe ressaltar que dois números complexos são iguais se, e só se, suas partes real e imaginária são iguais $z = w \to x + iy = a + ib \leftrightarrow x = a, y = b$. Por fim, vamos ver como fica o quociente de x por w

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = zw^{-1} &= \frac{x+iy}{a+ib} * \underbrace{1}_{\frac{w^*}{w^*}} \\ &= \frac{x+iy}{a+ib} * \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + i\frac{ya-xb}{a^2+b^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Pra quê estudar números complexos? Porque são divertidos, mas o que interessa de verdade pra esse curso é a exponencial complexa $e^{ix}$, para derivar ou integrar essa função basta usarmos o que já vimos fazendo $a = i$.Pra ficar mais conveniente ainda seja $a = ik$ onde k é uma constante real, então:

$$\frac{d^2 e^{ikx}}{dx^2} = -k^2 e^{ikx} \tag{17}$$

A exponencial complexa demonstra o mesmo comportamento das funções sin e cos reais. Interessante! Será que há uma relação entre essas três??? Sim, a conhecida **fórmula de Euler**:

$$e^{ikx} = coskx + isinkx \tag{18}$$

**"Dem.:"**(observe as aspas) a ideia é expandirmos a exponencial complexa em série de Taylor e separar o que está multiplicado por "i"e o que não está:

$$\begin{aligned} e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} &= 1 + ikx + \frac{i^2k^2x^2}{2!} + \frac{i^3k^3x^3}{3!} + \frac{i^4k^4x^4}{4!} + ... \\ &= i\underbrace{(kx - \frac{k^3x^3}{3!})}_{=sinkx} + \underbrace{(1 - \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^4x^4}{4!})}_{=coskx} = coskx + isinkx \end{aligned} \tag{19}$$

Agora você pode escolher entre trabalhar com senos e cossenos (em geral, uma grande furada) ou trabalhar com a exponencial complexa(sucesso total) que é fácil de derivar e integrar.

Saber as coisas triviais revisadas até aqui será muito útil quando vocês estiverem resolvendo a equação de Schrödinger, que só para irem se acostumando com a cara dela:

$$\frac{-\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} \tag{20}$$

Aqui $\hbar = h/2\pi$ onde h é a constante de Plank. Essa é a equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula de massa sujeita a um potencial $V(x)$ que aqui é independente do tempo, mas pode depender, é mais complicado nesse caso, vocês nem verão isso até o curso de quântica II. $\Psi$ é a tal função de onda, em geral você vai ter que lidar com a parte espacial, pois a parte temporal você resolve uma vez e guarda o resultado na cartola. O potencial e as **condições de contorno e iniciais** serão os ingredientes que ditarão a forma de $\Psi(x,t)$. Note que essa equação é a **derivadas parciais**. Por isso revisitaremos um tópico importante de fismat I a seguir.

# 2 Condições de contorno na equação diferencial

Nesta seção vou dar exemplos de resoluções de equações diferenciais nas quais há **condições de contorno**, ou seja, vamos resolver um equações diferencial para encontrar uma função, teremos uma forma geral da funções que resolve o nosso problema, uma família de funções, no entanto ela tomará uma forma particular pois vamos querer que para determinados valores do seu domínio ela assuma um valor fixo.

**Exemplo 1**: Vamos resolver a seguinte equação diferencial:

$$-i\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = k\phi(x) \rightarrow \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = ik\phi(x) \tag{21}$$

Conhecemos a solução, mas o ponto aqui é que vou exigir duas coisas dessa solução veja, quero que

$$\int_0^L |\phi(x)|^2 dx = 1 \tag{22}$$

só porque 1 é um número bonito e também quero que

$$\phi(x+L) = \phi(x) \tag{23}$$

aqui L é um número real qualquer fixo, e x é a variável. (23) é a **condição de contorno** da minha equação diferencial (21). Ela impõe que toda vez que eu estiver no ponto $x+L$ da reta $\phi$ terá o mesmo valor que na posição x. Essa condição de contorno se chama **condição de contorno periódica**, que é bastante utilizada em física do estado sólido, em particular esse exemplo é baseado no modelo do gás de elétrons livres.

Vamos lá, a solução da (21) é manjada $\phi(x) = Ae^{ikx}$, onde A é uma constante qualquer. Agora vamos impor a condição (22)

$$\int_0^L Ae^{ikx}A^*e^{-ikx}dx = 1 \rightarrow |A|^2\int_0^L dx = 1 \rightarrow |A|^2L = 1 \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{24}$$

Logo, já temos uma forma um pouco mais particular da nossa solução, que é

$$\phi(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \tag{25}$$

Agora vamos usar a condição de contorno (23)

$$\phi(x+L) = \frac{e^{ik(x+L)}}{\sqrt{L}} = \frac{e^{ikx}e^{ikL}}{\sqrt{L}} = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} = \phi(x) \tag{26}$$

Simplificando as coisas temos

$$e^{ikL} = 1 = e^{i2\pi n} \tag{27}$$

com n sendo um número inteiro qualquer $n = 0, \pm 1, \pm 2, ....$ Ou seja

$$kL = 2\pi n \to k = \frac{2\pi n}{L} \tag{28}$$

Moral das contas: a nossa condição de contorno impôs que o número k tem uma forma muito bem definida dada por (28), finalmente a solução que procuramos da nossa equação diferencial obedecendo o capricho (22) e a condição de contorno periódica (23) é

$$\phi(x) = \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \tag{29}$$

O procedimento é basicamente, dada uma equação diferencial com condições de contorno (e algum capricho que ela deve satisfazer): ache a forma geral da equação, imponha a condição de contorno (e o capricho, se tiver).

**Exemplo 2**: Vamos resolver a equação de Laplace em uma dimensão $V = V(x)$:

$$\nabla^2 V = 0 \to \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \tag{30}$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\begin{aligned} V(1) &= 4 \\ V(5) &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Essa equação é super fácil , qualquer criança de 4 anos resolve, a solução geral é:

$$V(x) = mx + b \tag{32}$$

Onde m e b precisam ser encontradas, usando agora as condições de contorno chegamos que:

$$\begin{aligned} V(1) &= m + b = 4 \\ V(0) &= 0m + b = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Resolvendo teremos $m = -1$ e $b = 5$. O que nos dá a seguinte forma pro potencial V: $V(x) = -x + 5$.

# 3 Revisão de física matemática: O método de Fourier

Para relembrar o método de Fourier visto no curso de física matemática I vamos resolver um problema bem simples que é o da condução do calor numa barra de comprimento L, isolada nas laterais.

**Problema:**Encontrar a função $u(x,t)$ que satisfaça

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{34}$$

Sujeita às seguintes condições inicial e de fronteira:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \text{ (condição inicial)} \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \text{ (condições de fronteira)} \end{aligned} \tag{35}$$

Note que adotamos uma condição inicial muito geral, mas as condições de fronteira (contorno são bem particulares, elas garantem que $limt \to \infty$ , $u(x,t) = 0$. Vamos começar a resolver.

1º Usamos **separação de variáveis**, ou seja, procuramos por soluções que tenham a forma

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{36}$$

Plugando isso em (34) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x)G(t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 F(x)G(t)}{\partial x^2}, \text{ (essas derivadas são parciais)} \\ \to F(x)\frac{dG(t)}{dt} &= G(t)\frac{d^2F(x)}{dx^2}, \text{ (essas derivadas são totais)} \end{aligned} \tag{37}$$

Dividindo a última equação de (37) por $u(x,t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x)G(t)}F(x)\frac{dG(t)}{dt} &= \frac{1}{F(x)G(t)}G(t)\frac{d^2F(x)}{dx^2} \\ \frac{1}{G(t)}\frac{dG(t)}{dt} &= \frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} \end{aligned} \tag{38}$$

O lado esquerdo só depende do tempo enquanto o lado direito só depende da posição e eles são iguais! Logo, cada lado é independente de "x"e "t", é uma constante. Isto é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(t)}\frac{dG(t)}{dt} &= \sigma \\ \frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} &= \sigma \end{aligned} \tag{39}$$

Vamos resolver primeiro a parte espacial.
As consdições de fronteira em (35) passam para a função F(x), ou seja, temos:

$$F(0) = F(L) = 0 \tag{40}$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \sigma \to \frac{d^2F(x)}{dx^2} = \sigma F(x) \tag{41}$$

Há 3 possibilidades para o $\sigma$
(i) $\sigma = 0$, neste caso

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = 0 \to F(x) = ax + b \tag{42}$$

Usando (40)

$$\begin{aligned} F(0) &= a0 + b = 0 \to b = 0 \\ F(L) &= aL + b = aL = 0 \to a = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Logo a solução é $F(x) = 0$ e isso não é uma solução aceitável fisicamente, primeiro porque não poderíamos fazer a divisão por $u(x,t)$ que fizemos acima e também não nos informa nada sobre como se dá a condução do calor na barra.

(ii)Vamos supor agora $\sigma > 0$, por conveniência vamos escrever $\sigma = k^2 > 0$

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = k^2F(x) \to F(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}, \text{ confira!} \tag{44}$$

Usando (40)

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 + c_2 \\ F(L) &= c_1e^{kL} + c_2e^{-kL} \end{aligned} \tag{45}$$

Usando o método de Cramer para resolver para os coeficientes $c_1, c_2$ encontramos que eles devem ser nulos (faça!), chegando novamente a $F(x) = 0$, a solução não aceitável.

(iii)Vamos supor agora $\sigma < 0$, por conveniência vamos escrever $\sigma = -k^2 < 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2F(x)}{dx^2} = -k^2F(x) &\to F(x) = c_1e^{ikx} + c_2e^{-ikx}, \text{ ou} \\ &\to F(x) = c_1sinkx + c_2coskx \end{aligned} \tag{46}$$

Vamos usar a solução de senos e cossenos por serem mais familiares por enquanto. Usando (40)

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1cos0 + c_2sin0 \to c_1 = 0 \\ F(L) &= c_1coskl + c_2sinkL = c_2sinkL = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Não queremos outra solução $F(x) = 0$ então impomos que $c_2 \neq 0$ o que implica em:

$$sinkL = 0 \rightarrow kl = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \tag{48}$$

n sendo um inteiro qualquer

Vou colocar $c_2 = 1$, em geral qualquer combinação linear de senos será solução, então a solução será

$$F_n(x) = sinkx = sin\frac{n\pi x}{L} \tag{49}$$

Aqui $-\sigma = k^2 = n\pi/L$ são os autovalores e $F_n(x)$ são as autofunções.

Agora resolveremos a parte temporal, não precisamos mais estudar 3 casos pois apenas o caso $\sigma = -k^2 < 0$ é que importa por nos dar solução aceitável. Então:

$$\frac{1}{G(t)}\frac{dG(t)}{dt} = -k^2 \rightarrow \frac{dG(t)}{dt} = -k^2 G(t) \tag{50}$$

A solução geral é $G(t) = c_3 e^{k^2 t} + c_4 e^{-k^2 t}$, mas não queremos que nossa u(x,t) exploda para o tempo evoluindo infinitamente (ou seja, t tendendo a infinito), dessa forma a exponencial positiva tem que ser jogada fora, fazemos isso colocando $c_3 = 0$, então $G(t) = c_4 e^{-k^2 t}$. Sabemos já a forma de k da solução da parte espacial.

Então $G_n(t) = c_4 e^{\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$. E para cada $n = 1, 2, 3, ...$ temos uma função:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = e^{\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} sin\frac{n\pi x}{L} \tag{51}$$

Este $u_n(x,t)$ satisfaz a equação diferencial (34) e as condições de fronteira de (35). Só falta usar a informação da condição inicial no tempo $t = 0$ $u(x,0) = f(x)$. Vamos supor que foi dado que $f(x) = sin\frac{5\pi x}{L}$,

$$u_n(x,0) = 1sin\frac{n\pi x}{L} = sin\frac{5\pi x}{L} \rightarrow n = 5 \tag{52}$$

Assim a solução final, que satisfaz tudo o que tem que satisfazer é:

$$u(x,t) = e^{\frac{25\pi^2 t}{L^2}} sin\frac{5\pi x}{L} \tag{53}$$

Em geral, se f(x) puder ser expandida em série de Fourier (o que ocorre para qualquer situação que corresponda a uma situação física real) então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n sin\frac{n\pi x}{L}, \text{ de modo que, } u(x,0) = 1\sum_{n=1}^{N} c_n sin\frac{n\pi x}{L} \tag{54}$$

E a solução vai ser algo do tipo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} sin\frac{n\pi x}{L} \tag{55}$$

**Resumo das contas:** dada uma EDP faça o método de separação de variáveis (método de Fourier), pegue as soluções que fazem sentido para o problema, plugue as condições de fronteira e a condição inicial e voilà!

# 4 Revisão de física matemática: A transformada de Fourier

Para uma revisão em bom nível deste tópico sugiro a leitura das notas de aula do prof. Rodney Josué Biezuner da UFMG, disponível aqui e também no site da disciplina. Elas são a referência mais direta ao ponto e acessível que encontrei, não conseguiria fazer melhor por isso nem tentarei. Abaixo só direi as informações mais relevantes para uma referência rápida:

As definições de transformada e antitransformada de Fourier são dadas, respectivamente, por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \tag{56}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} dx \tag{57}$$

Existem condições sobre as funções, as integrais acima devem existir e a condição necessária e suficiente para isso é que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Neste caso temos o Teorema de Plancherel-Parseval para uma classe de funções "boas"

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi \tag{58}$$

As funções utilizadas em física geralmente são bem comportadas e poderemos fazer a transformada numa boa. Se quiser saber formalmente o que são funções "boas"sugiro a leitura do capítulo 6 do livro *Análise de Fourier e EDPs* do Djairo Guedes de Figueiredo, ou as notas do prof. João Barata que são acessíveis aqui.

# 5 Integração por partes

A integração por partes é a regra da integração correspondente a regra do produto para a diferenciação e é útil em vários casos, no curso em específico será muito utilizada no cálculo de médias de operadores. O objetivo é simples, encontrar uma integral mais simples de resolver do que a integral inicial.

Lembre que a regra do produto diz que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{59}$$

Integrando a eq. (59) com relação a x temos

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\end{aligned} \tag{60}$$

Então temos que

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx} \tag{61}$$

**Exemplo**:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{sinx}_{g'(x)} dx \tag{62}$$

Escolho, essa escolha é baseada no traquejo, se eu fizer a escolha trocada acabo chegando numa integral com um $x^2$ (verifique!) que claramente é pior!

$$\begin{aligned}f(x) = x &\rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = sinx &\rightarrow g(x) = -cosx\end{aligned} \tag{63}$$

Então

$$\int xsinxdx = -xcosx - \int 1(-cosx)dx = -xcosx + \int cosxdx = -xcosx + sinx + C \tag{64}$$

onde C é a constante de integração.

Em alguns casos você precisa fazer a integração por partes mais de uma vez pra conseguir resolver, a integral de $h(x) = x^2e^{kx}$ é uma dessas, por exemplo.

## 5.1 Diferencial sob o sinal de integração

A primeira vez que soube da existência desse método foi por meio deste artigo , o qual sugiro a leitura inclusive. Na época não apreciei muito bem, em mecânica estatística entretanto comecei a usar esse método a torto e a direito, isso porque ele é **extremamente prático**, a integral de $h(x) = x^2e^{kx}$ requer que façamos integral por partes duas vezes, não que a técnica seja difícil mas requer mais manipulações matemáticas o que pode fazer que numa distração a gente erre o sinal ou perca um fator e chegue num resultado errado.

A ideia do presente método é a seguinte, a gente olha o que tem que integrar e pensamos num jeito de escrever a função que queremos integrar como uma derivada de um parâmetro de uma função simples, se isso for possível nós escrevemos a função como uma derivada dentro da integral e ai, e isso pode ser desconfortável para alguns, *trocamos a ordem da derivada e da integral*, integramos a função simples e depois derivamos com relação ao parâmetro da derivada. Esse parágrafo pode ter ficado confuso, vamos resolver a integral dessa h(x) pra ver como funciona, é melhor do que ficar descrevendo.

Queremos resolver

$$\int x^2 e^{kx} dx \tag{65}$$

Note que podemos pensar nessa função como uma função não só de x mas de k também. Bom, vamos derivar $e^{kx}$ com relação a k pra ver o que acontece

$$\frac{\partial}{\partial k} e^{kx} = x e^{kx} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial^2 k} e^{kx} = x^2 e^{kx} \tag{66}$$

Olha que beleza! Derivando a exponencial com relação ao parâmetro k duas vezes chegamos exatamente na função que queremos integrar. Vamos escrever então

$$\int x^2 e^{kx} dx = \int \frac{\partial^2}{\partial^2 k} e^{kx} dx = \frac{\partial^2}{\partial^2 k} \int e^{kx} dx = \frac{\partial^2}{\partial^2 k} \left[ \frac{e^{kx}}{k} \right] + C \tag{67}$$

Agora é só derivar com relação a $e^{kx}/k$ duas vezes com relação a k duas vezes, o resultado vai ser

$$\int x^2 e^{kx} dx = \frac{\partial^2}{\partial^2 k} \left[ \frac{e^{kx}}{k} \right] + C = \frac{x^2 k e^{kx} - x e^{kx}}{k^2} - \frac{k^2 x e^{kx} - 2k e^{kx}}{k^4} + C \tag{68}$$

Se $k = 1$ temos que

$$\int x^2 e^x dx = x^2 - 2x e^x + 2e^x + C \tag{69}$$

Muitas vezes que essa técnica for usada vocâ vai acabar caindo na integral da gaussiana, tenha esse resultado no bolso, tatue no coração

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{70}$$

# 6 Fórmulas para o Laplaciano

Esta seção é para ser apenas uma referência rápida para a forma que o operador Laplaciano assume nas coordenadas cartesianas, esféricas e cilindricas, em geral vocês só precisarão das duas primeiras.

**Cartesianas** $\Psi = \Psi(x, y, z)$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{71}$$

**Esféricas** $\Psi = \Psi(r, \theta, \phi)$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \tag{72}$$

**Cilindricas** $\Psi = \Psi(r, \theta, z)$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{73}$$

É só isso, use com sabedoria.

# 7 Mudança de variável em integral múltipla: coordenadas esféricas

Quando temos que calcular o volume de uma esfera, por exemplo, temos que fazer uma integral tripla, e neste caso usar as nossas adoradas coordenadas cartesianas é, pra falar o mínimo, uma grande estupidez. Quando um problema tem simetria esférica é natural pensar em resolvê-lo no sistema de coordenadas esféricas, que são:

$$\begin{aligned} x &= r sin\theta cos\phi \\ y &= r sin\theta sin\phi \\ z &= r cos\theta \end{aligned} \tag{74}$$

onde $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Quando fazemos essa transformação de coordenadas é muito, mas muito importante mesmo não esquecer de colocar o **Jacobiano** da transformação ma integral, que nesse caso é $r^2 sin\theta$, assim, quando trocamos o sistema de coordenadas temos

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_E g(r, \theta, \phi) r^2 sin\theta dr d\theta d\phi \tag{75}$$

Enfatizando, **ao mudar de coordenadas não se esqueça do Jacobiano!!!** A dedução dessa coisa é um pouco trabalhosa e não agrega, por isso omiti, se tiver interesse é fácilmente encontrada em livros de cálculo, física matemática, internet e afins.

# 8 A função $\Gamma$

A função $\Gamma$ pode ser representada por uma integral que vai aparecer em algum momento no decorrer do curso, sempre que essa integral aparecer você terá uma fórmula fechada para calculá-la. O meu objetivo aqui é apenas de definir essa função e escrever fórmulas que poderão ser úteis para uma referência rápida.

Para quem gosta de matemática sugiro a leitura das notas do prof. João Barata, que podem ser encontradas aqui. Outra boa referência é o livro *Mathematical methods in the physical sciences* de Mary Boas, capítulo 9.

Comecemos calculando a seguinte integral:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}|_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \tag{76}$$

Beleza, agora vamos derivar ambos os lados de (76) com relação à $\alpha$ algumas vezes só pra ver o que acontece

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha^2} \\
\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx &= \frac{2}{\alpha^3} \\
\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x} dx &= \frac{3!}{\alpha^4} \\
\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x} dx &= \frac{4!}{\alpha^5}
\end{aligned} \tag{77}$$

Em geral temos o seguinte:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \tag{78}$$

Para $\alpha = 1$ vamos ter:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \tag{79}$$

Observe que (80) é uma representação integral para o valor de $n!$, em particular se $n = 0$ temos que

$$0! = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1 \tag{80}$$

Até agora $n$ é um número inteiro maior que 0. Vamos usar o que foi discutido acima para definir a função $\Gamma$ para um número p qualquer **maior que zero**.

**Def.** A função $\Gamma$ é, para *qualquer* $p > 0$, definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \ p > 0 \tag{81}$$

Para $p < 0$ essa integral diverge, e portanto não é usada para definir $\Gamma(p)$, logo veremos como fazer pra definir esta função neste intervalo. Temos até agora que

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$$
$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{n}e^{-x}dx = (n)! \qquad (82)$$

Podemos escrever então:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^{p}e^{-x}dx = p!, p > -1 \qquad (83)$$

Há uma fórmula recursiva para a função $\Gamma$ que é

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \qquad (84)$$

Outra fórmuleta é:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin\pi p} \qquad (85)$$

A fórmula recursiva é utilizada para definirmos $\Gamma(p)$ para p menor que 0 , neste intervalo

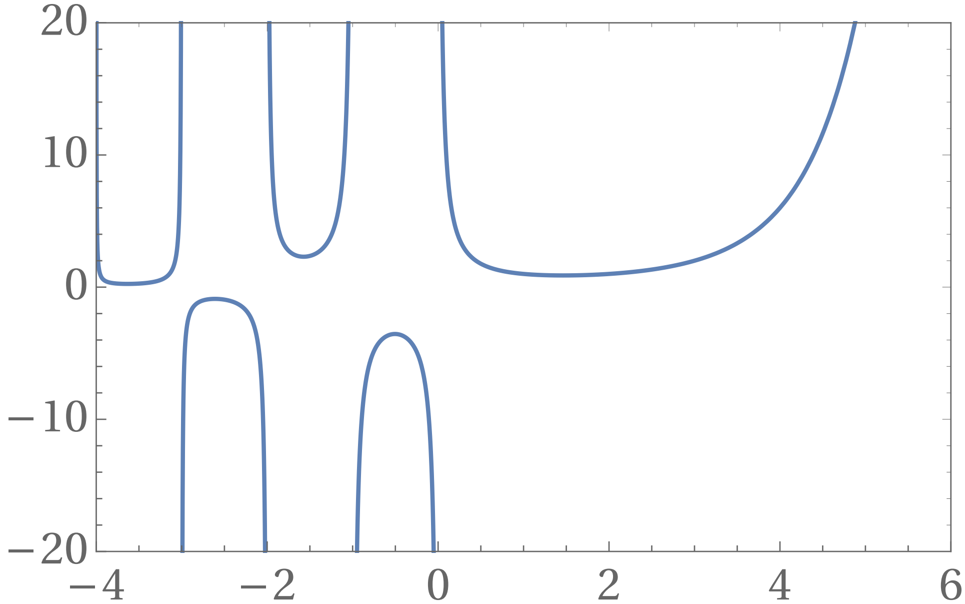
$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \qquad (86)$$

Dessa forma temos que, por exemplo:

$$\Gamma(-0.5) = \frac{1}{-0.5}\Gamma(0.5)$$
$$\Gamma(-1.5) = \frac{1}{-1.5}\Gamma(-0.5) = \frac{1}{-1.5}\frac{1}{-0.5}\Gamma(0.5) \qquad (87)$$

E só por completeza, $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$. É importante notar que $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \to \infty$ para $p \to 0$.

Abaixo está o gráfico da função $\Gamma(p)$ para p indo de -4 até 6.


20
10
0
−10
−20
−4
−2
0
2
4
6