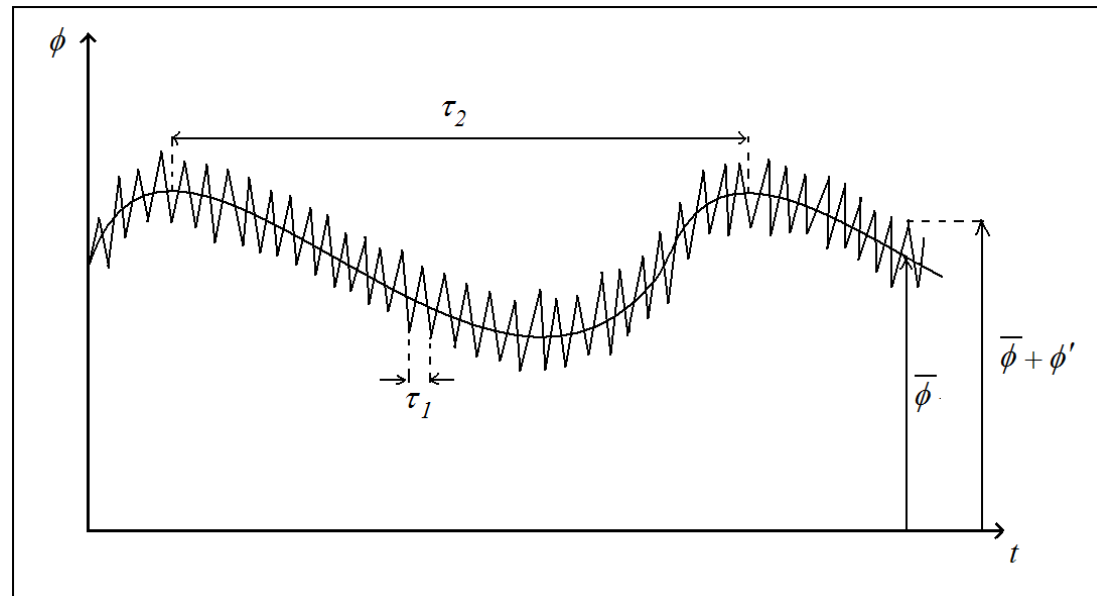


# PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

## **Aula 9 - Modelo k- $\epsilon$ *Standard***

# Decomposição de Reynolds



A decomposição de Reynolds aplicada a um escoamento não-permanente, segundo Wilcox (1993).

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\bar{\phi} + \phi') dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{\phi} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi' dt$$

# Decomposição de Reynolds

Se temos  $\tau_1 \ll T \ll \tau_2$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{\phi} dt = \bar{\phi}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi' dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi dt = \bar{\phi}$$

# Equações de Reynolds (1)

Equação de Navier-Stokes na forma conservativa para um fluido incompressível:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Onde:

$$u_i = U_i + u'_i \quad ; \quad p = P + p'$$

# Equações de Reynolds (2)

RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

$$\frac{\partial(\rho \overline{u_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right]$$

Resulta:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right]$$

# Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

Resulta, para fluido incompressível:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

## Hipótese de Boussinesq para as tensões de Reynolds (1)

Tensões Laminares: 
$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

onde  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu \rightarrow$  (hipótese de Stokes)

Tensões turbulentas ou Tensões de Reynolds:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = -\delta_{ij} \rho \frac{2}{3} k + \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

Nesta expressão k é a energia cinética da turbulência:

$$k = \frac{\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}}{2}$$

## Hipótese de Boussinesq para as tensões de Reynolds (2)

Para fluido incompressível:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = -\delta_{ij} \rho \frac{2}{3} k + \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Substituindo na Equação Média de Reynolds:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{eff}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Onde:

$$P_{eff} = P + \rho \frac{2}{3} k \quad ; \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_t$$



## Equação de k

Multiplicando a equação de Navier – Stokes  $\frac{Du_i}{Dt}$

pela flutuação  $u'_i$  e fazendo a média resulta :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\overline{u'_i u'_i u'_j}}{2} - \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

onde  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rightarrow$  (produção de k)

$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \rightarrow$  dissipação de k

## Equação modelada para $k$

$$\frac{Dk}{Dt} = \text{Difusão de } k + \text{Produção de } k - \text{Dissipação de } k$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho \varepsilon$$

Onde  $\sigma_k$  é uma constante.

## Equação de $\varepsilon$

Derivando a equação de Navier – Stokes com respeito a  $x_k$ ,

multiplicando por  $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  e fazendo a média:

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -2\nu \left( \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\nu \overline{u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} - 2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \nu \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - 2 \frac{\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m}} \right) \end{aligned}$$

## Equação modelada de $\varepsilon$ (1)

Obviamente, mera inspeção visual permite concluir que a equação do *slide* anterior não serve para nada. Assim:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \text{Difusão de } \varepsilon + \text{Produção de } \varepsilon - \text{Dissipação de } \varepsilon$$

Supomos que a produção de  $\varepsilon$  é proporcional à produção de  $k$  multiplicada por  $\varepsilon/k$ . O mesmo raciocínio é feito para a dissipação de  $\varepsilon$ .

## Equação modelada de $\varepsilon$ (2)

Resulta:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Onde  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

## Viscosidade Turbulenta (Eddy Viscosity)

$\mu_t$  é determinado por análise dimensional a partir das grandezas usadas para caracterizar a turbulência . Logo:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{Onde } C_\mu \text{ é uma constante.}$$

# Modelo k- $\varepsilon$ *standard*

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Onde :  $P_k = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$        $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

Temos portanto cinco constantes:  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .

## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (1)

Na camada logarítmica, para  $30 < y^+ < 400$ , medidas de  $k$  permitem inferir que os efeitos de convecção e difusão são desprezíveis. A equação de  $k$  se reduz à igualdade entre produção e dissipação. Considerando que nessa região a única tensão turbulenta importante é  $\overline{u'v'}$  :

$$P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon$$

$$\text{mas, como } \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\overline{u'v'}}{\nu_t} = \frac{\overline{u'v'} \varepsilon}{C_\mu k^2}, \text{ resulta:}$$

$$\left( \frac{\overline{u'v'}}{k} \right)^2 = C_\mu ; \text{ de medições } \underline{\underline{C_\mu = 0.09}}$$



## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (2)

No escoamento á jusante de uma grade que provoque uniformidade do mesmo, a produção de turbulência se torna desprezível. Desprezando efeitos difusivos, as equações de  $k$  e  $\varepsilon$  ficam:

$$U \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad ; \quad U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Medidas de  $k$  nesse caso sugerem que  $k = \beta/x$ , onde  $\beta$  é uma constante. Substituindo esse resultado nas equações acima, resulta:

$$\underline{\underline{C_2 \approx 2}}$$

## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (3)

Na camada logarítmica, temos:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \text{ onde } U^+ = \frac{U}{U^*} \text{ e } y^+ = \frac{\rho U^* y}{\mu}$$

$U^*$  é a chamada velocidade de atrito:  $U^* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$

$\kappa$  é a chamada constante de Von Kármán,  $\kappa \approx 0.41$ , e  $E$  depende da rugosidade,  $E \approx 9.0$  para parede lisa. Com a lei logarítmica obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^*}{\kappa y}$$

## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (4)

Percebe-se também que, para  $30 < y^+ < 400$ , a tensão de Reynolds é constante e aproximadamente igual à tensão viscosa na parede. Da relação entre a tensão de Reynolds e  $k$ , derivada anteriormente da condição de equilíbrio local (produção de turbulência igual à dissipação):

$$\left( \frac{\overline{u'v'}}{k} \right)^2 = C_\mu \rightarrow k = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{C_\mu}} \rightarrow k = \frac{\tau_w / \rho}{\sqrt{C_\mu}} \rightarrow k = \underline{\underline{\frac{U^{*2}}{\sqrt{C_\mu}}}}$$

## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (5)

Voltando à condição de equilíbrio local na camada logarítmica:

$$\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon$$

*mas, lembrando que  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  e que  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^*}{\kappa y}$ ,*

*com o resultado obtido para k :*

$$\underline{\underline{\varepsilon = \frac{U^{*3}}{\kappa y}}}$$

## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (6)

Voltando à camada logarítmica, considerando que o transporte convectivo e a difusão longitudinal são desprezíveis, e aplicando a condição de equilíbrio local entre produção e dissipação de turbulência, a equação de  $\varepsilon$  fica:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + (C_1 - C_2) \frac{\varepsilon^2}{k} = 0$$

Substituindo as expressões obtidas nos dois últimos *slides* para  $k$  e  $\varepsilon$ , obtemos finalmente:

$$\underline{\underline{C_1 = C_2 - \frac{k^2}{\sqrt{C_\mu} \sigma_\varepsilon}}}$$

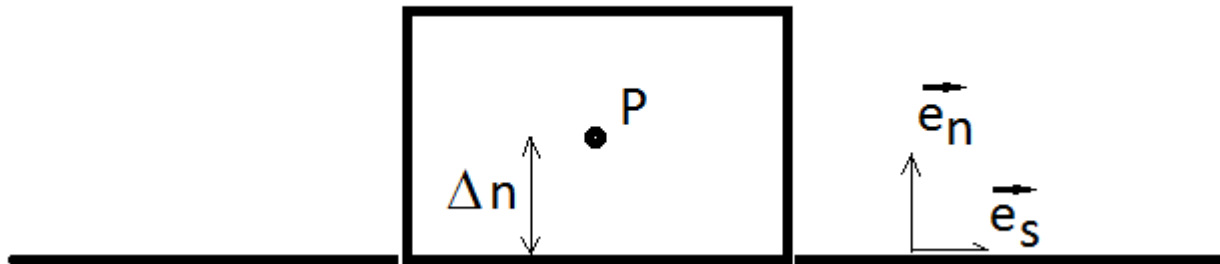
## Determinação das Constantes do Modelo k-ε (7)

Alguns experimentos computacionais permitiram uma otimização do valor das constantes segundo a tabela:

$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_1$	$C_2$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92

# Condições de Contorno

Finalmente, é preciso lembrar que o modelo *k - ε standard* não vale na sub-camada viscosa. É um modelo válido apenas para altos Re, onde  $Re = v_t / \nu$ . Assim, o nó mais próximo da parede deve ficar dentro da camada logarítmica, para  $30 < y^+ < 400$  (idealmente,  $30 < y^+ < 100$  a  $200$ ).



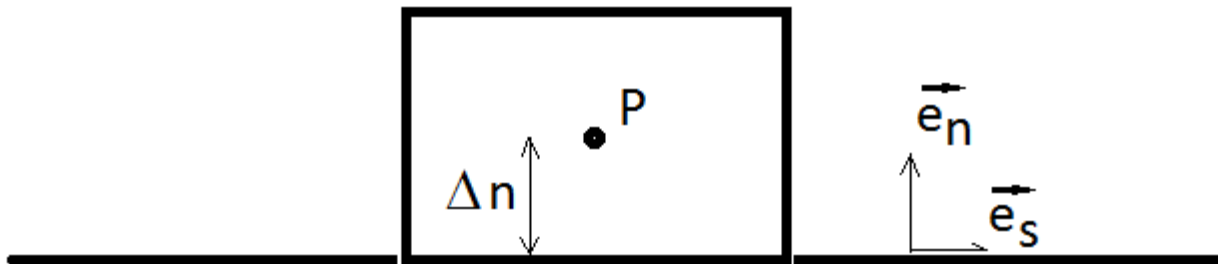
$$y^+ = \frac{U^* \Delta n}{\nu}$$

# Condições de Contorno

Para a primeira célula nas imediações de uma parede, temos:

$$\nu_{wall} = \frac{U^{*2} \cdot \Delta n}{(\vec{U}_P - \vec{U}_{wall}) \cdot \vec{e}_s} \quad \left. \frac{\partial k}{\partial n} \right|_{wall} = 0 \quad \varepsilon_P = \frac{U^{*3}}{\kappa \Delta n}$$

Ou seja, calcula-se uma viscosidade efetiva na parede para que a tensão calculada pela diferença de velocidade seja igual à tensão resultante do perfil logarítmico. Usa-se uma condição de Neumann para a energia cinética devido ao efeito da subcamada viscosa.





# Bibliografia

B. E. Launder, D. B. Spalding, “Lectures in Mathematical models of turbulence”, Academic Press, 1972.

W. Rodi, “Turbulence models and their application in hydraulics”, state-of-the-art paper, IAHR, 1980.

D. C. Wilcox, “Turbulence Modeling for CFD”, 2nd Edition, DCW Industries, 2000.