PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

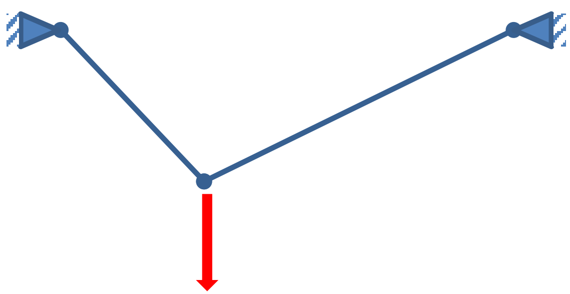
Arcos e Cabos – I

(Aula 5 - 24/09/2018)

Professores
Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Antônio Bittencourt Jr.

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

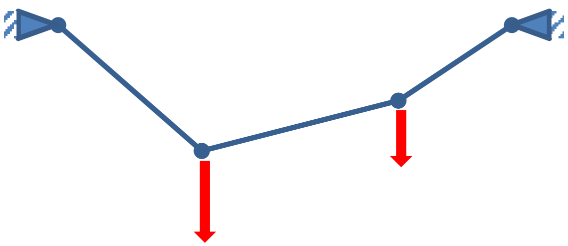
Como os cabos não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ Uma força transversal concentrada provoca uma mudança abrupta da direção do eixo do cabo!

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

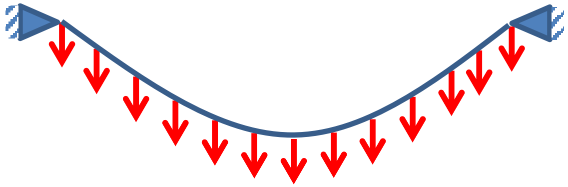
Como não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



❖ O cabo se ajusta às forças concentradas, assumindo uma geometria poligonal

CABOS: estruturas lineares e flexíveis, capazes de resistir exclusivamente à forças normais de tração.

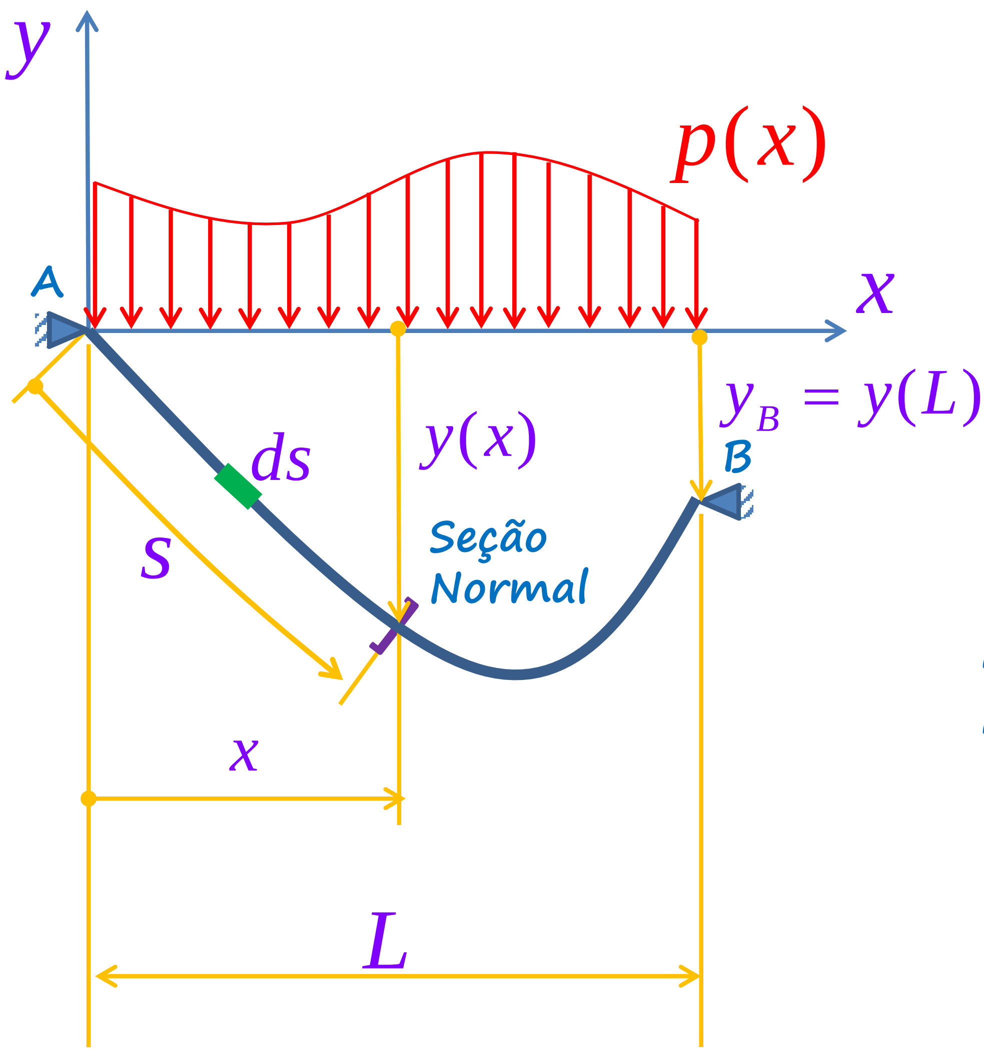
Como não desenvolvem forças cortantes nem momentos fletores, somente são capazes de equilibrar cargas transversais ajustando a sua geometria:



- Forças distribuídas provocam variações contínuas de direção do eixo do cabo, ou seja, o cabo equilibra esforços transversais ajustando a sua CURVATURA

Cabos sob carregamento contínuo

Notação:



x : Abscissa cartesiana

s : Abscissa curvilínea

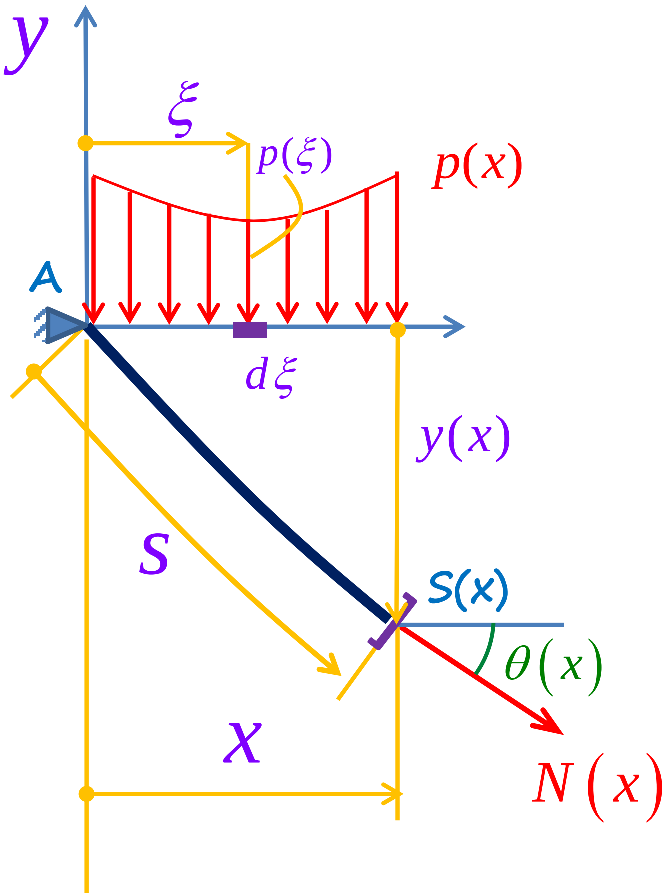
L : Vão

ℓ : comprimento do cabo

Um ponto do eixo do cabo pode ser identificado tanto por x como por s!

$$\ell = \int_0^{s(L)} ds = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx} \right) dx$$

Equilíbrio de momentos de um segmento de cabo:



Os momentos fletores são sempre nulos, ou seja:

$$M(x) = M(s(x)) = 0 \begin{cases} \forall x \in [0, L] \\ \forall s \in [0, \ell] \end{cases}$$

As forças cortantes também são sempre nulas, pois

$$V(x) = V(s(x)) = \frac{dM}{dx} = 0 \ , \quad \forall x$$

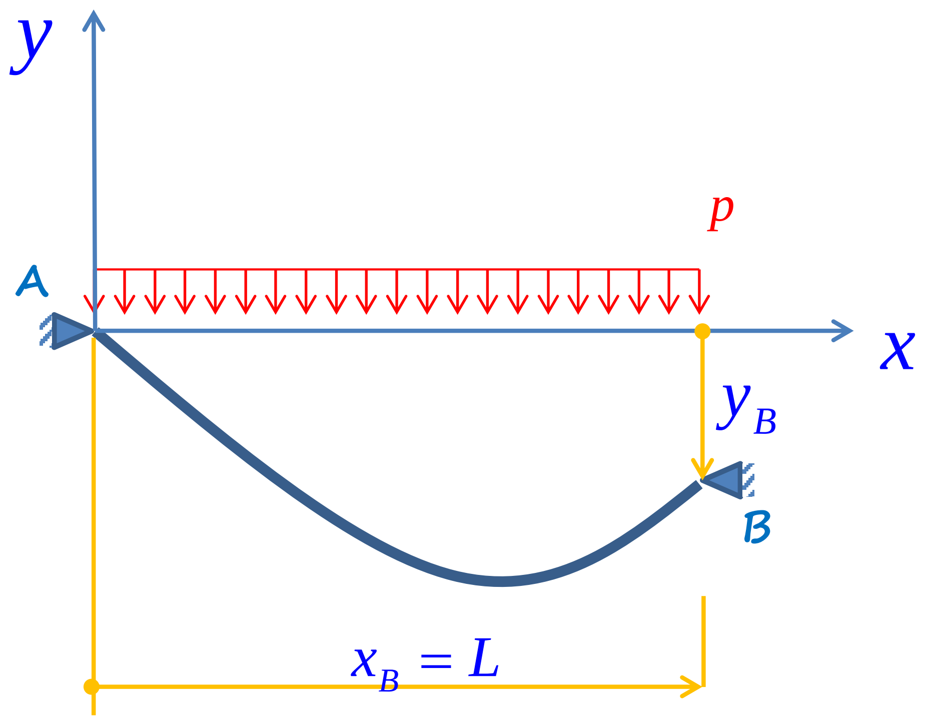
Logo o único esforço solicitante é a força normal N(x), tangente ao eixo do cabo!

$$\sum M_{(A)} = \left(N(x)\cos\theta\right)\cdot y(x) - \left(N(x)\sin\theta\right)\cdot x - \int_0^x \left(p(\xi)\cdot\xi\right) d\xi = 0 \ , \forall x \in [0, L]$$

Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

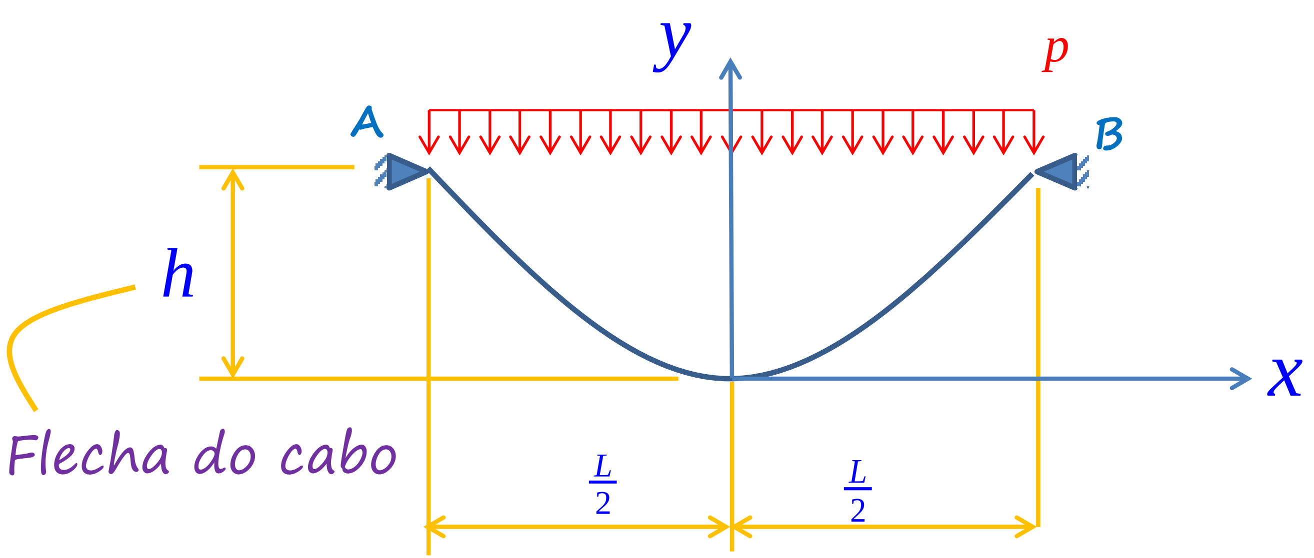
Caso geral: apoios desnivelados:



Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

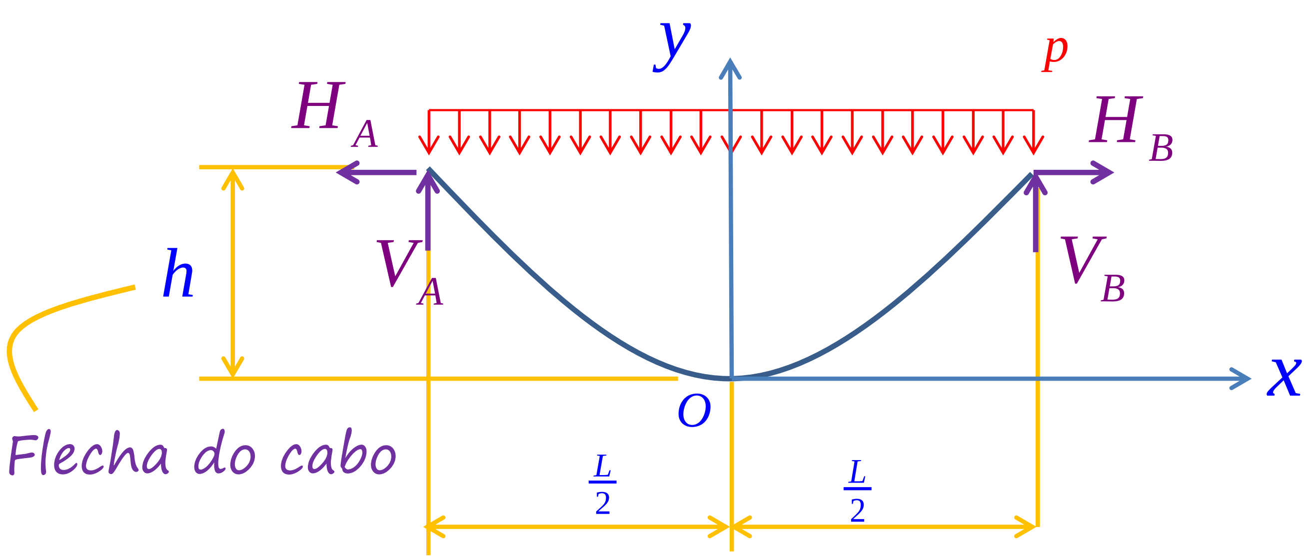
Caso particular: apoios nivelados



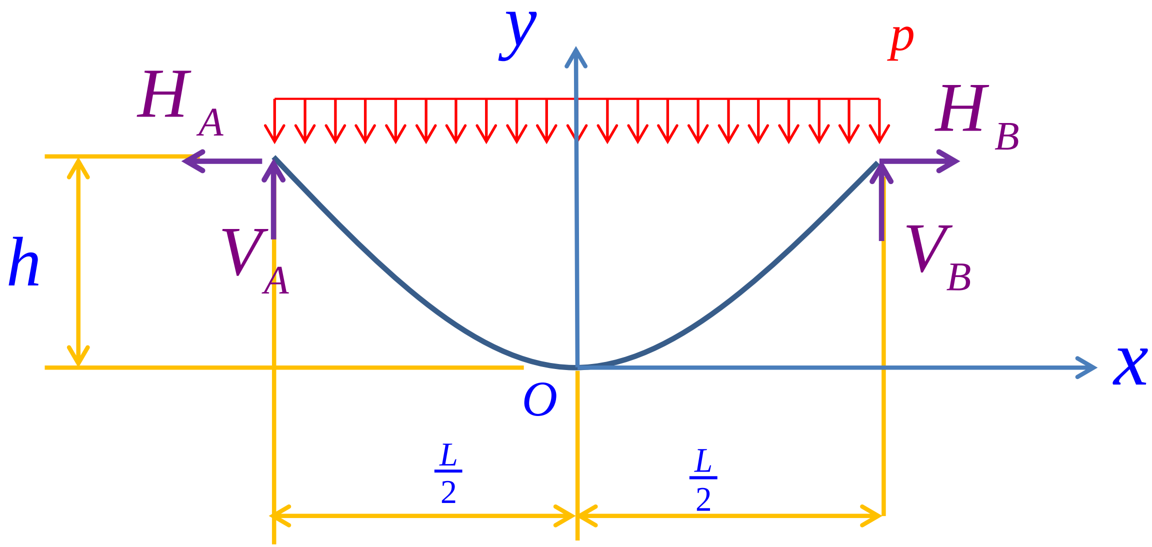
Cabo sujeito à carga vertical uniformemente distribuída:

"CABO PARABÓLICO"

Diagrama de corpo livre:



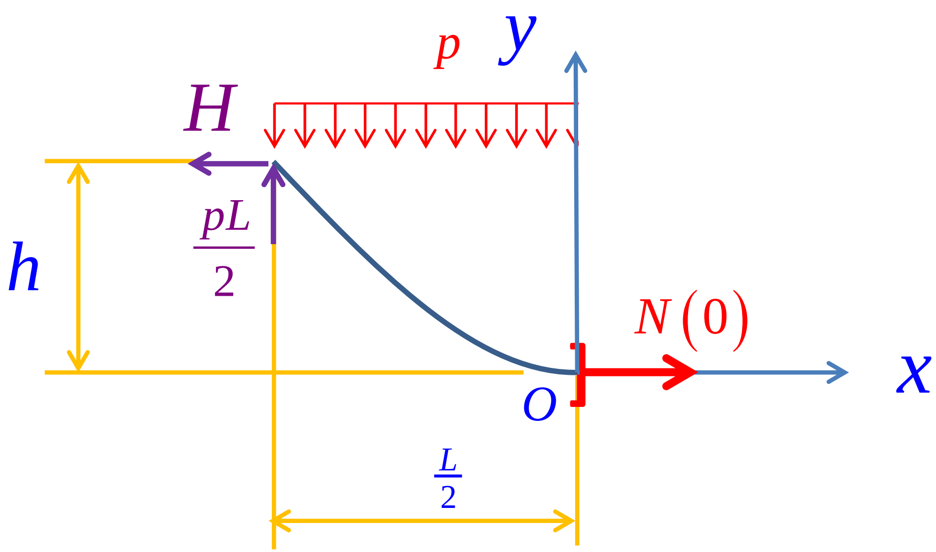
Equilíbrio do cabo parabólico:



$$\sum F_X = H_B - H_A = 0 \quad \therefore \quad \boxed{H_A = H_B = H}$$ "Empuxo"

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_Y = V_A + V_B - pL = 0 \\ \sum M_{(A)} = V_B L - \dfrac{pL^2}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{V_A = V_B = \frac{pL}{2}}$$ Simetria, OK!

Cortando no ponto O, e fazendo o equilíbrio da parte da esquerda:



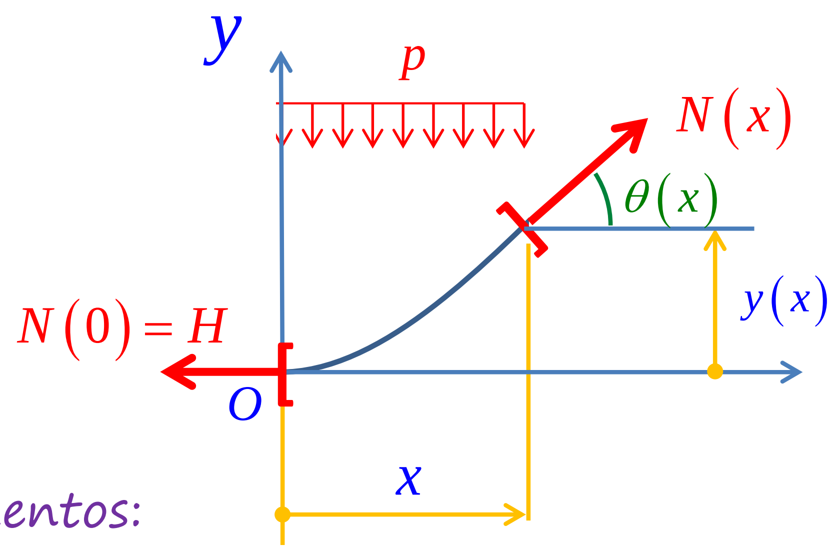
Cortante para x=0: $V(0)=0$

$$\sum M_{(O)} = 0 \quad \therefore \quad Hh - \frac{pL}{2}\cdot\frac{L}{2} + \frac{pL}{2}\cdot\frac{L}{4} = 0$$

$$\boxed{H = \frac{pL^2}{8h}}$$ <u>"Fórmula do empuxo"</u>

$$\sum F_X = -H + N(0) = 0 \quad \therefore \quad N(0) = H$$

Cortando em uma abscissa qualquer, x>0:

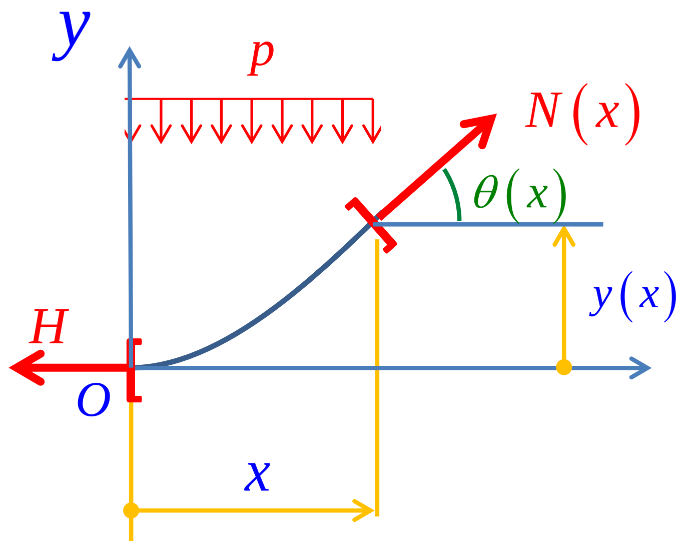


Equilíbrio de Momentos:

$$\sum M_{(\mathrm{SN}(x))} = 0 \quad \therefore \quad -Hy + px \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \therefore \quad y = \frac{px^2}{2H}$$

Mas $H = \dfrac{pL^2}{8h}$ logo $\boxed{y = \left(\dfrac{4h}{L^2}\right)x^2}$ Uma parábola! (CQD)

Cortando em uma abscissa qualquer, x>0:



Equilíbrio Horizontal:

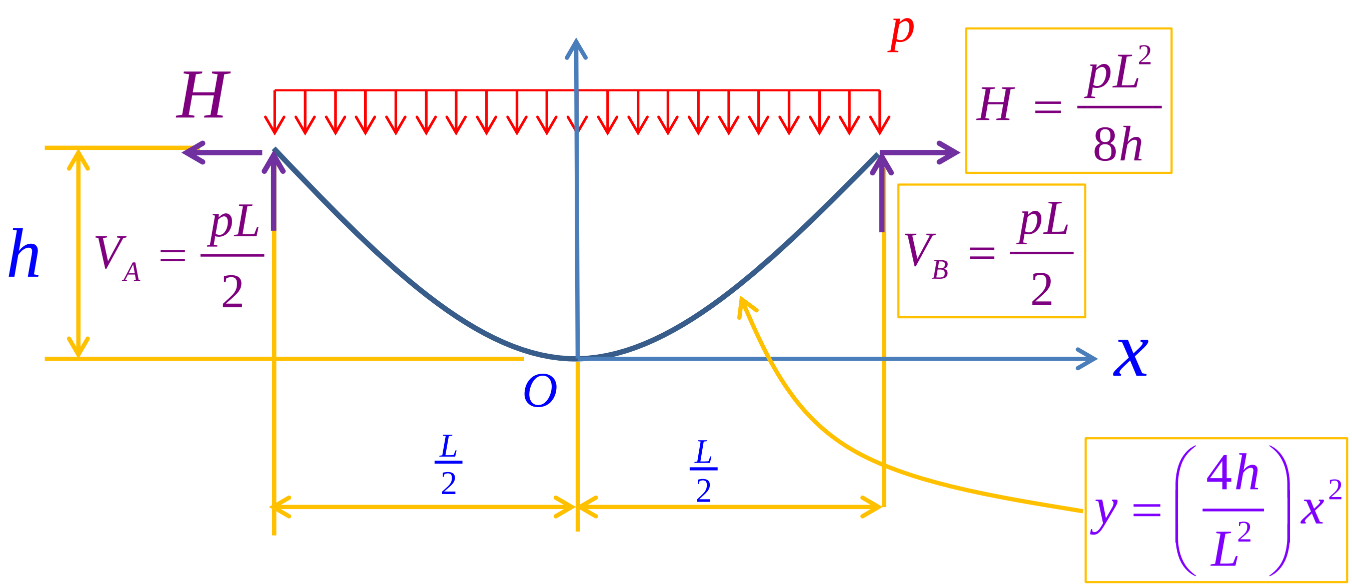
$\therefore \quad N(x)\cos\theta = H$, constante!

$\therefore$ A componente horizontal da força no cabo parabólico é constante e igual ao empuxo!

$$N(x) = \frac{H}{\cos\theta}$$ $\therefore$ N(x) é máxima nos apoios, onde cos(θ) é mínimo

$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + V_A^2} \qquad N_{\max} = \frac{pL}{2}\sqrt{1+\left(\frac{L}{4h}\right)^2}$$

Em resumo, para o cabo parabólico (com apoios nivelados):



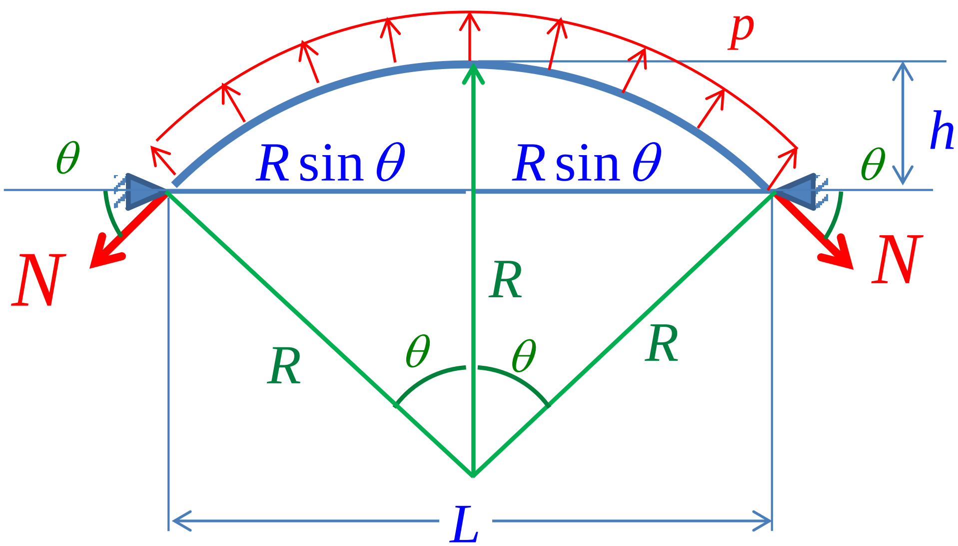
Para h=L/10 (típico): $N_{\max} = 1,34\,pL = 2,68V_A$

Comprimento do cabo parabólico:

Tem expressão exata, mas complicada...
É útil a aproximação:

$$\ell \simeq L + \frac{8h^2}{3L}$$

Cabo sujeito à pressão transversal uniforme:



"CABO CIRCULAR"

A simetria de qualquer seção exige que a curvatura seja constante!

Logo o Raio de curvatura é constante!

$$\boxed{R = \frac{L^2}{8h} + \frac{h}{2}}$$

Logo a força normal N em qualquer seção é constante!

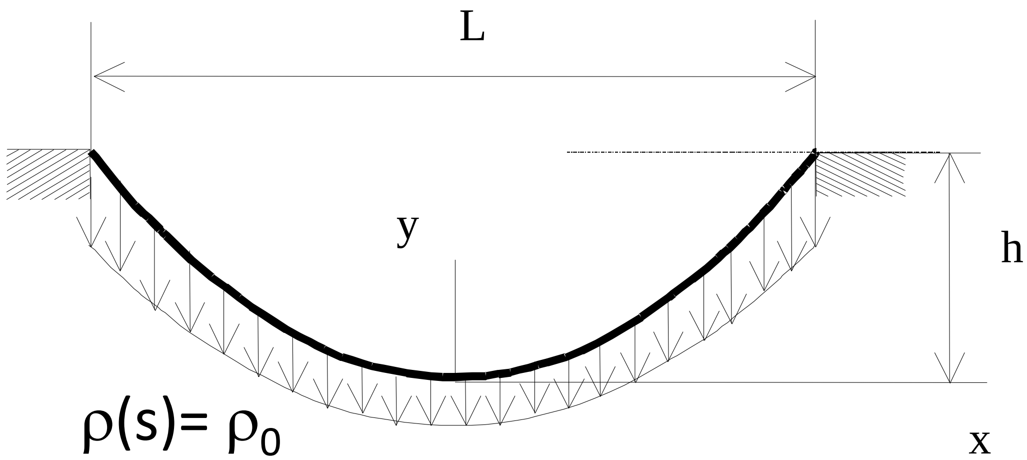
Equilíbrio vertical : $\quad 2pR\sin\theta - 2N\sin\theta = 0\,, \quad \forall\theta$

$$\boxed{N = pR}$$

Comprimento do cabo circular: $\boxed{\ell = 2R\theta}$

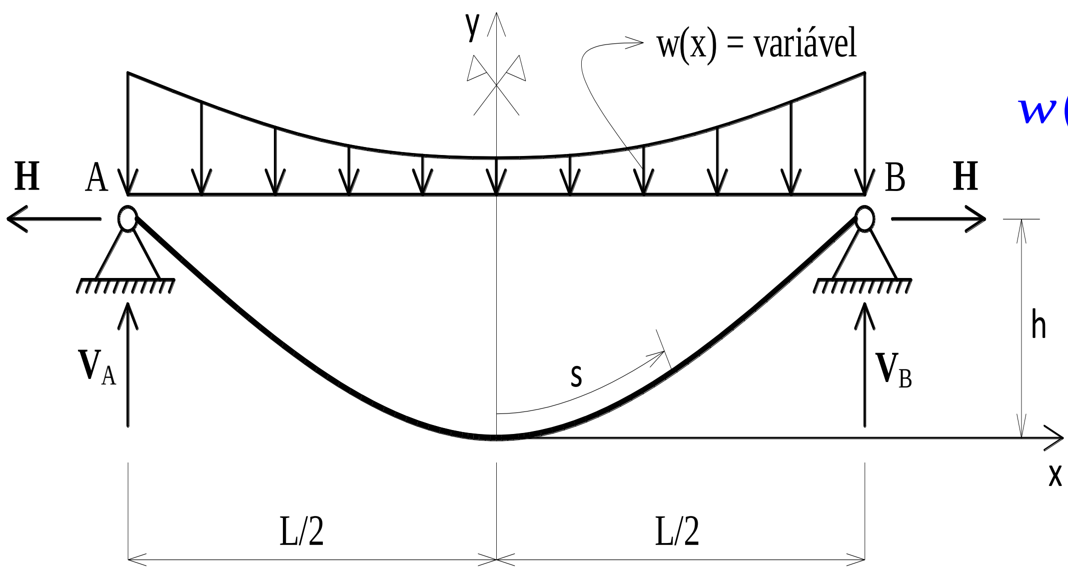
Onde: $\boxed{\cos\theta = \frac{R-h}{R}}$ Ou seja, $\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R}\right)}$

Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO



Peso próprio por unidade de comprimento (kN/m): ρ_0

Cabo sujeito ao peso próprio: CABO CATENÁRIO



$$w(x) = \frac{\rho_0}{\cos\theta(x)}$$

Geometria do cabo catenário:

$$y(x) = \frac{H}{\rho_0}\left[\cosh\frac{\rho_0}{H}x - 1\right]$$

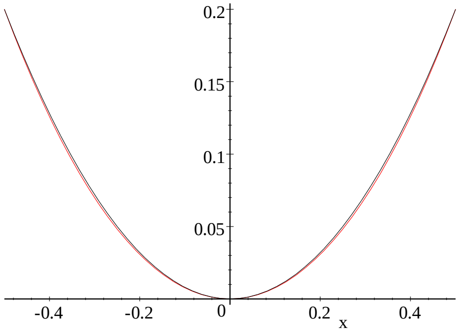
(Vide artigo "Sobre Cabos e Cordas", na página da disciplina!)

Para h<=L/10, o cabo catenário e o cabo parabólico praticamente se confundem!

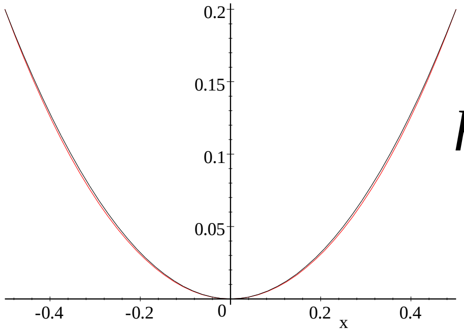
Comprimento do cabo catenário:

$$\ell = \frac{2H}{\rho_0}\sinh\left(\frac{\rho_0 L}{2H}\right)$$

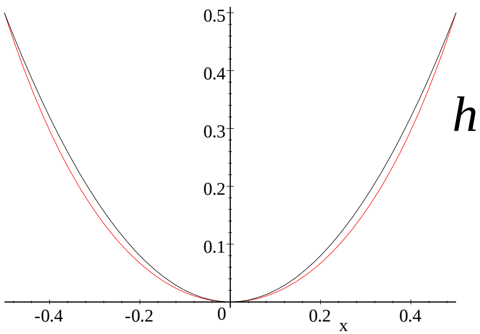
Comparação entre a catenária e a parábola:



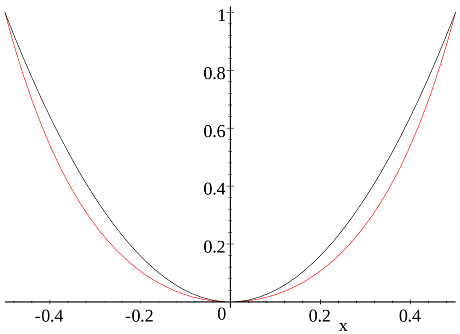
$$h = \frac{L}{5}$$



$$h = \frac{L}{3}$$



$$h = \frac{L}{2}$$



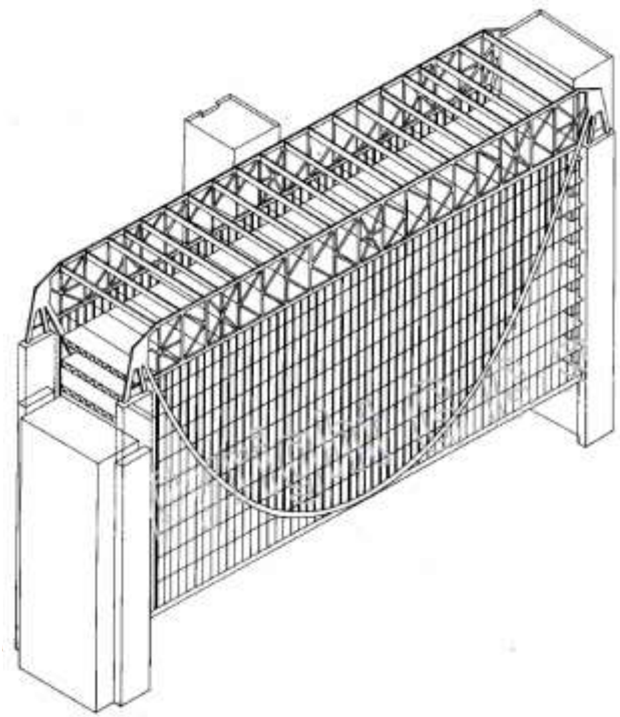
$$h = L$$

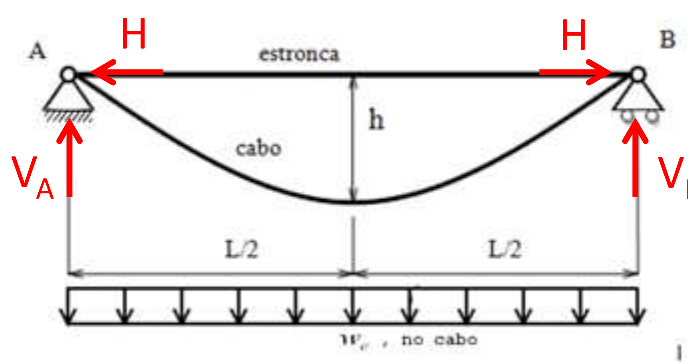
Note-se que a escala do eixo está sempre exagerada, exceto no caso h=L

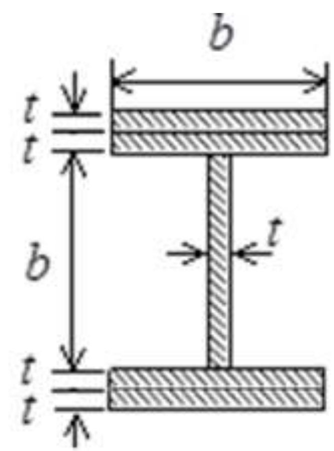
Para pequenas flechas a catenária e a parábola se confundem!

Exemplo (PEF2602-P1-Q1-2010): A figura mostra o prédio do 'Federal Reserve Bank', localizado em Minneapolis, EUA. Cada um dos 11 pisos tem vão transversal de 18m, e a carga total dos pisos é transferida para dois "cabos parabólicos" (constituídos, na prática, por perfis metálicos), por meio de montantes (trabalhando à compressão, nos trechos acima dos cabos) e por tirantes (trabalhando à tração, nos trechos abaixo dos cabos). Os cabos têm vão L=84m e flecha h=30m , e são ancorados ao topo de duas torres laterais. As reações verticais das ancoragens são transferidas às torres, enquanto o empuxo é equilibrado por duas estroncas treliçadas, localizadas no topo do prédio.

- Considere uma carga total, uniformemente distribuída sobre cada um dos 11 pisos, $q=2{,}5\ kN/m^2$ e determine a carga w (em kN/m), uniformemente distribuída, agindo em cada um dos cabos parabólicos;
- Determine o empuxo horizontal H e as reações apoios A e B de cada cabo, indicados no modelo estrutural esquematizado abaixo;
- Determine a máxima tração N_{max} em cada cabo;
- Considere que a seção transversal dos cabos seja composta por três chapas de aço de espessura t=30mm e largura b. Admitindo um coeficiente de segurança s=2 e um aço com tensão de escoamento tração σ_e=450MPa, determine a largura de chapa necessária.







$$\begin{cases} q = 2,5kN/m^2 \\ d = 18m; \quad L = 84m; \quad h = 30m \\ n = 11 \end{cases} \qquad w = n\frac{qd}{2} = 11\frac{2,5\times 18}{2} = 247,5kN/m$$

Reações de apoio

$$H_A = H$$

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} = \frac{247,5\times 84}{2} = 10.395,0kN$$

O empuxo do cabo é sustentado pela estronca, que trabalha comprimida, e vale

$$H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{247,5\times 84^2}{8\times 30} = 7.276,5kN$$

A máxima força normal ocorre nos apoios e vale

$$N_{\max} = \sqrt{V_A{}^2 + H^2} = \sqrt{10.395^2 + 7.276,5^2} = 12.688,7kN$$

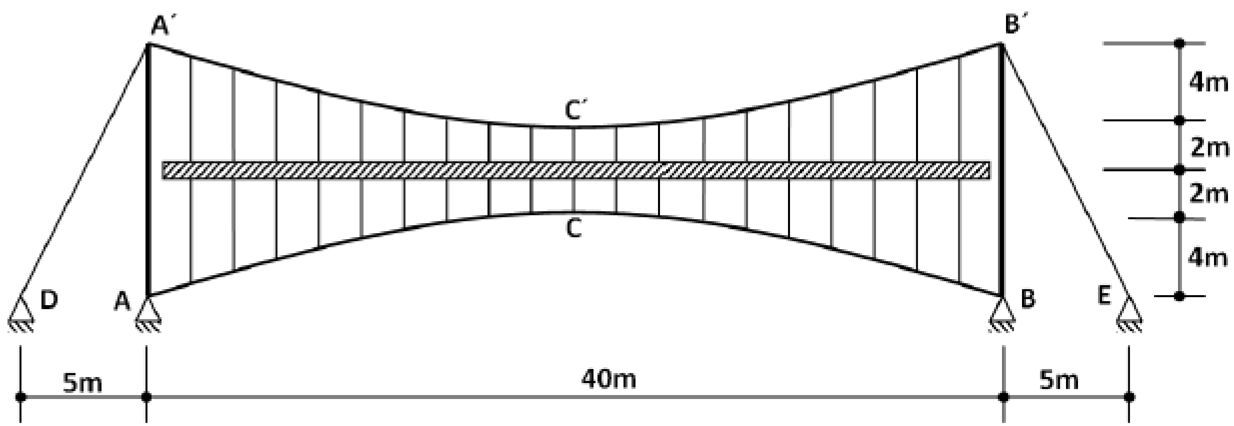
$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_c} \le \frac{\sigma_e}{s} \qquad A_c = 5bt \ge \frac{sN_{\max}}{\sigma_e}$$

$$b \ge \frac{sN_{\max}}{5t\sigma_e} = \frac{2\times 12.688,7\times 10^3}{5\times 30\times 10^{-3}\times 450\times 10^6} = 0,376m$$

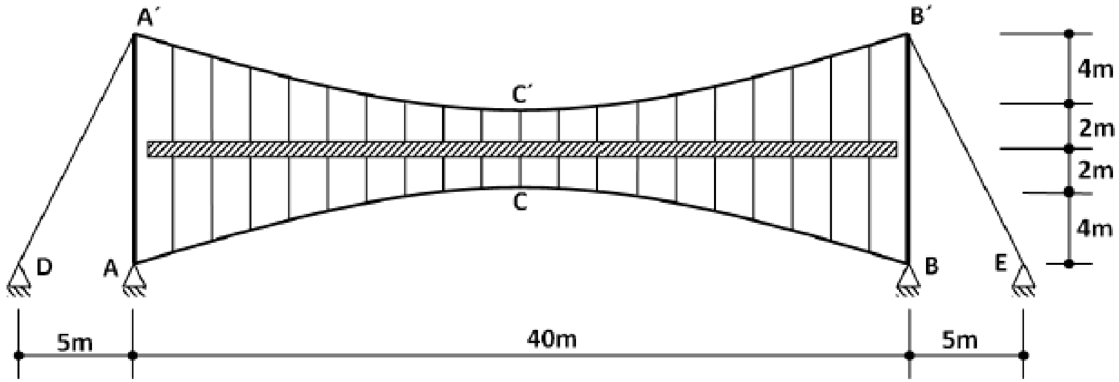
1ª Questão (5,0): A figura mostra um '*deck*' horizontal, de peso específico 0,5kN/m², comprimento 40m e largura b (normal ao plano da figura) definida em função do último algarismo de seu número USP (n), conforme a expressão:

$$b = \begin{cases} \boxed{8 \text{ metros},} & \text{se } n \text{ for par} \\ 12 \text{ metros}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

O deck é suportado ao longo dos lados maiores por dois 'cabos-treliça', cada um deles composto por um cabo inferior ACB e um cabo superior A'C'B', ambos de flecha 4m, sendo estes cabos ligados por tirantes verticais, espaçados de 2m.



Antes da instalação do deck, impõe-se a todos os tirantes uma carga de protensão uniforme, $T_0 = 8kN$, de sorte que ambos os cabos que compõe cada cabo-treliça, assim como os estais DA' e EB', restam tracionados, enquanto que as colunas AA' e BB' restam comprimidas. Em seguida, instala-se o deck, sendo o seu peso repartido igualmente entre os cabos superiores e inferiores, ou seja, ocorre um acréscimo da carga transferida pelos tirantes para o cabo superior, de igual valor ao decréscimo da carga transferida pelos tirantes para o cabo inferior de cada cabo-treliça.



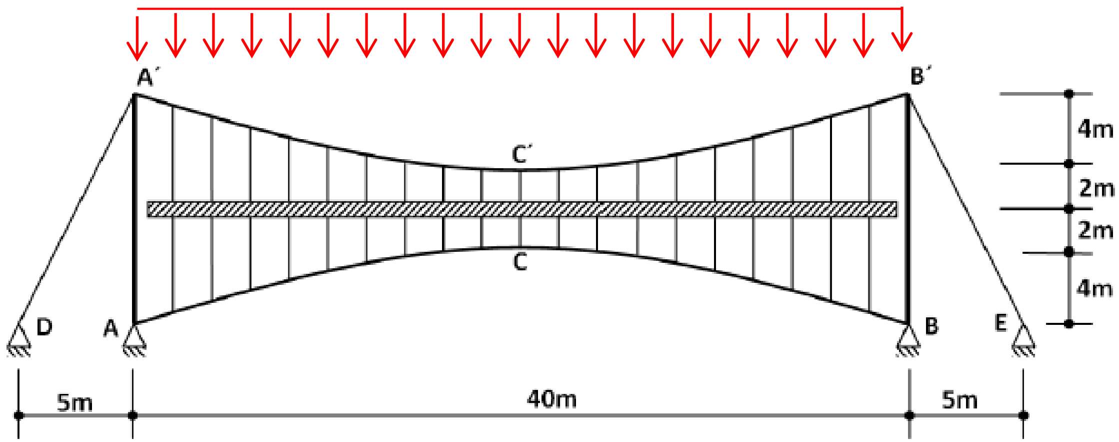
Pede-se determinar:

(a) O empuxo horizontal H_0 e a tração máxima N^0_{max} em ambos os cabos, quando se aplica a carga de protensão T_0 aos tirantes, sem a presença do deck;

(b) A tração N^0_{est} nos estais, a compressão N^0_{col} nas colunas e as reações no apoio A, nesta mesma situação;

(c) Os empuxos horizontais H^1_{sup} e H^1_{inf}, e as trações máximas $N^{1,max}_{sup}$ e $N^{1,max}_{inf}$, respectivamente no cabo superior e no cabo inferior, após a instalação do deck;

(d) A tração N^1_{estai}, a compressão N^1_{col} nas colunas e as reações no apoio A, nesta segunda situação.

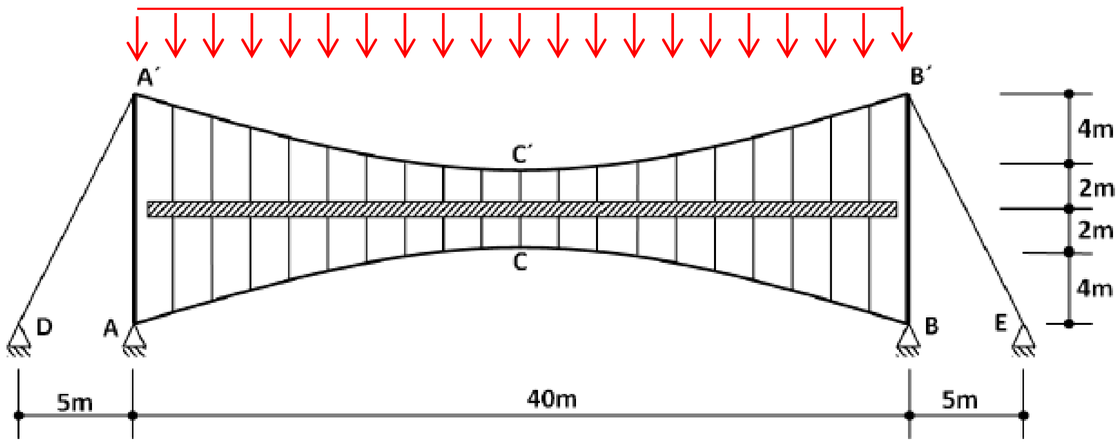


<u>(a/b) Sem o deck, ambos os cabos ficam igualmente solicitados.</u> Admitindo um número muito grande de tirantes com espaçamento d, o problema pode ser aproximado por um cabo parabólico sujeito a uma carga uniformemente distribuída ω_0

$$\omega_0 = \frac{T_0}{d} = \frac{8}{2} = 4kN/m$$

$$H_0 = \frac{\omega_0 L^2}{8h} = \frac{4 \times 40^2}{8 \times 4} = 200kN \qquad V_0 = \frac{\omega_0 L}{2} = \frac{4 \times 40}{2} = 80kN$$

$$N_{\max}^0 = \sqrt{H_0^2 + V_0^2} = \sqrt{200^2 + 80^2} = 215,41kN$$



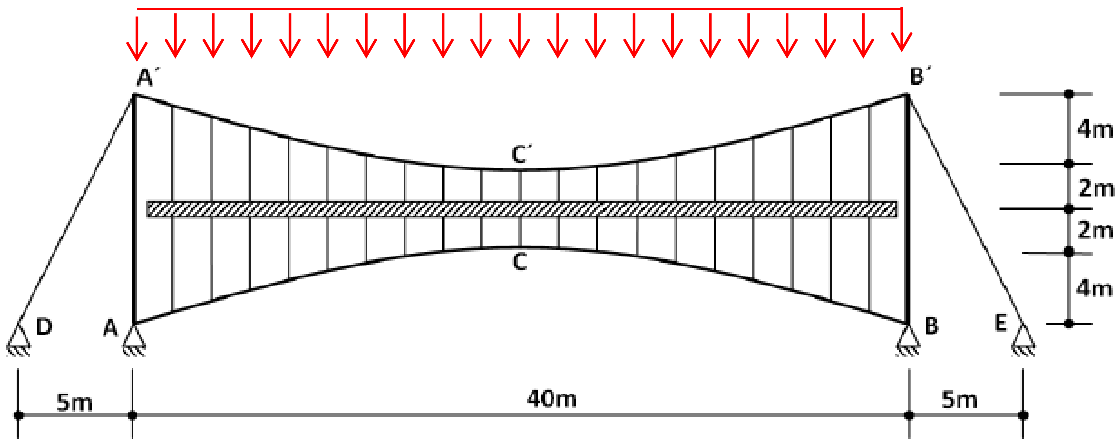
Indicando o ângulo que o estai DA' faz com a vertical AA' por α :

$$\sin\alpha = DA / DA' = 5 / \sqrt{5^2 + 12^2} = 5/13 \quad ; \quad \cos\alpha = AA' / DA' = 12/13$$

O equilíbrio de momentos da coluna AA' em torno do ponto A fornece a tração no estai DA':

$$N_{est}^{0} \sin\alpha \times AA' - H_0 \times AA' = 0$$

$$N_{est}^{0} = \frac{H_0}{\sin\alpha} = \frac{13}{5} 200 = 520kN$$



A <u>compressão na coluna</u> AA' equilibra as componentes verticais das trações no estai e no cabo superior:

$$N_{col}^{0} = -\left(N_{est}^{0}\cos\alpha + V_0\right) = -\left(520\times\frac{12}{13}+80\right) = -560kN$$

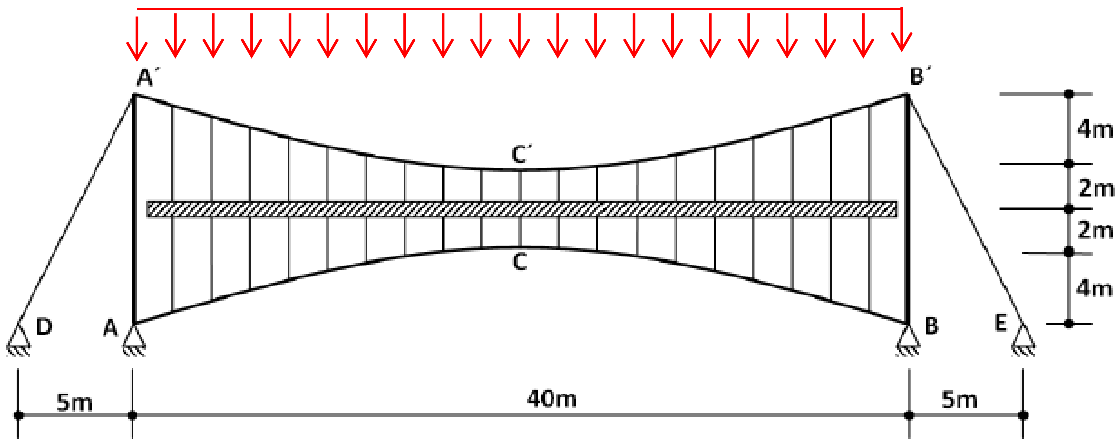
A <u>reação vertical no apoio A</u> é para cima, e vale:

$$V_A^0 = -N_{col}^0 - V_0 = 480kN$$

(ou seja, igual à componente vertical da tração no estai!)

A <u>reação horizontal no apoio A</u>, deve equilibrar o empuxo no cabo inferior,

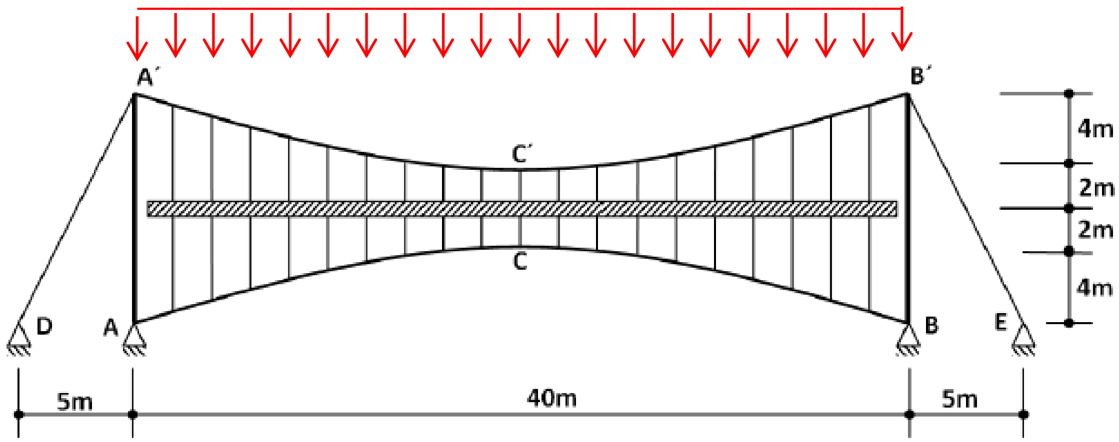
ou seja, $H_A^0 = -200kN$ (para a esquerda!)



(c/d) Com o deck: Admitindo que os cabos tenham a mesma rigidez, a carga distribuída no cabo superior cresce, e a carga no cabo inferior decresce do mesmo valor. Como o deck se apoia em dois cabos-treliças, dispostos ao longo dos lados maiores,

$$\Delta\omega = \frac{\gamma b}{2} \qquad \boxed{b = 8 \text{ metros}} \quad \therefore \quad \Delta\omega = \frac{0,5\times 8}{2} = 2,0kN/m$$

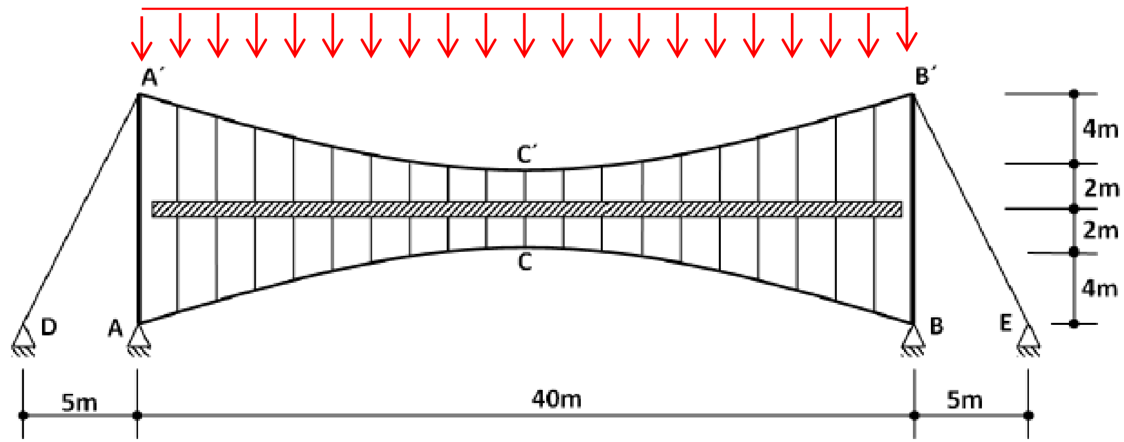
$$\omega_{sup}^{1} = \omega_0 + \Delta\omega = 4 + 2 = 6kN/m \quad \begin{cases} H_{sup}^{1} = \dfrac{\omega_{sup}^{1}L^2}{8h} = \dfrac{6\times 40^2}{8\times 4} = 300kN \\[2ex] V_{sup}^{1} = \dfrac{\omega_{sup}^{1}L}{2} = \dfrac{6\times 40}{2} = 120kN \end{cases}$$



$$N^1_{sup} = \sqrt{\left(H^1_{sup}\right)^2 + \left(V^1_{sup}\right)^2} = \sqrt{300^2 + 120^2} = 323{,}11kN$$

$$N^1_{est} = \frac{H^1_{sup}}{\sin\alpha} = \frac{13}{5}300 = 780kN$$

$$N^1_{col} = -\left(N^1_{est}\cos\alpha + V^1_{sup}\right) = -\left(780 \times \frac{12}{13} + 120\right) = -840kN$$



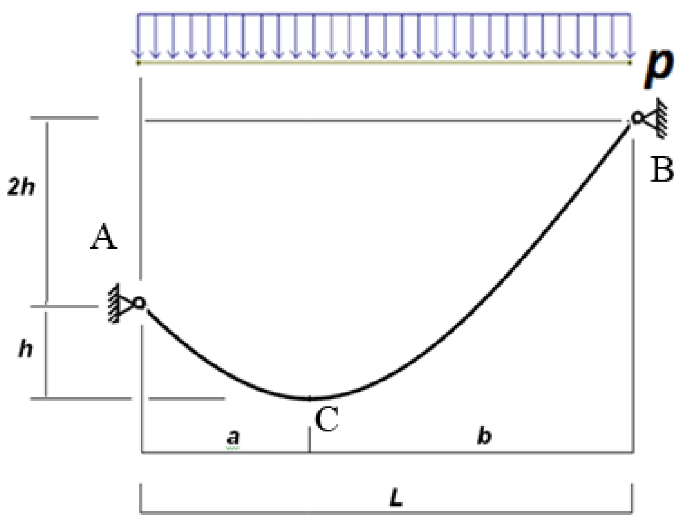
$$\omega_{inf}^{1} = \omega_0 - \Delta\omega = 4 - 2 = 2kN/m \quad \begin{cases} H_{inf}^{1} = \dfrac{\omega_{inf}^{1} L^2}{8h} = \dfrac{2\times 40^2}{8\times 4} = 100kN \\[2ex] V_{inf}^{1} = \dfrac{\omega_{inf}^{1} L}{2} = \dfrac{2\times 40}{2} = 40kN \end{cases}$$

$$N_{inf}^{1} = \sqrt{\left(H_{inf}^{1}\right)^2 + \left(V_{inf}^{1}\right)^2} = \sqrt{100^2 + 40^2} = 107,70kN$$

$$V_A^1 = -N_{col}^1 - V_{inf}^1 = 840 - 40 = 800kN \ \text{(para cima!)}$$

$$H_A^1 = -H_{inf}^1 = -100kN \ \text{(para a esquerda)}$$

Nome: ______________________ Nº USP: __________



4ª Questão (2,0): Determine a máxima tração no cabo da figura ao lado, sujeito a um carregamento vertical uniformemente distribuído $p=\left(30+\frac{m}{2}\right)kN/m$, onde m é o penúltimo algarismo não-nulo de seu número USP. São dados $L=30m$ e $h=2m$.

Gabarito -4A

Equilíbrio de momentos do trecho AC em torno de A: $$Hh=\frac{pa^2}{2} \Rightarrow H=\frac{pa^2}{2h}$$

Equilíbrio de momentos do trecho CB em torno de B: $$3Hh=\frac{p(L-a)^2}{2} \Rightarrow H=\frac{p(L-a)^2}{6h}$$

$$\frac{pa^2}{2h}=\frac{p(L-a)^2}{6h} \Rightarrow 3a^2=(L-a)^2 \Rightarrow 2a^2+2La-L^2=0 \Rightarrow a=\left(-1\pm\sqrt{3}\right)\frac{L}{2}$$

Toma-se a raiz positiva: $a=\left(-1+\sqrt{3}\right)\frac{L}{2}=0,36603L$ Para L=30m: $\boxed{a=10,981m}$

Logo: $\boxed{H=\frac{pa^2}{2h}=30,15p}$

Nota: há outras formas de resolver esta questão, por exemplo, impondo que o empuxo no ponto C seja o mesmo, considerando o trecho da esquerda ou da direita, ou buscando os coeficientes da parábola que passa pelos pontos A B e C.

Equilíbrio vertical: $\sum_V = V_A + V_B - pL = 0$

Equilíbrio de momentos em relação ao apoio A: $\sum M_{(A)} = LV_B - \frac{pL^2}{2} - 2Hh = 0$

$$V_B = \frac{pL}{2} + \frac{2h}{L}H \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{pL}{2} - \frac{2h}{L}H \quad \Rightarrow$$ A máxima tração ocorre no apoio B!

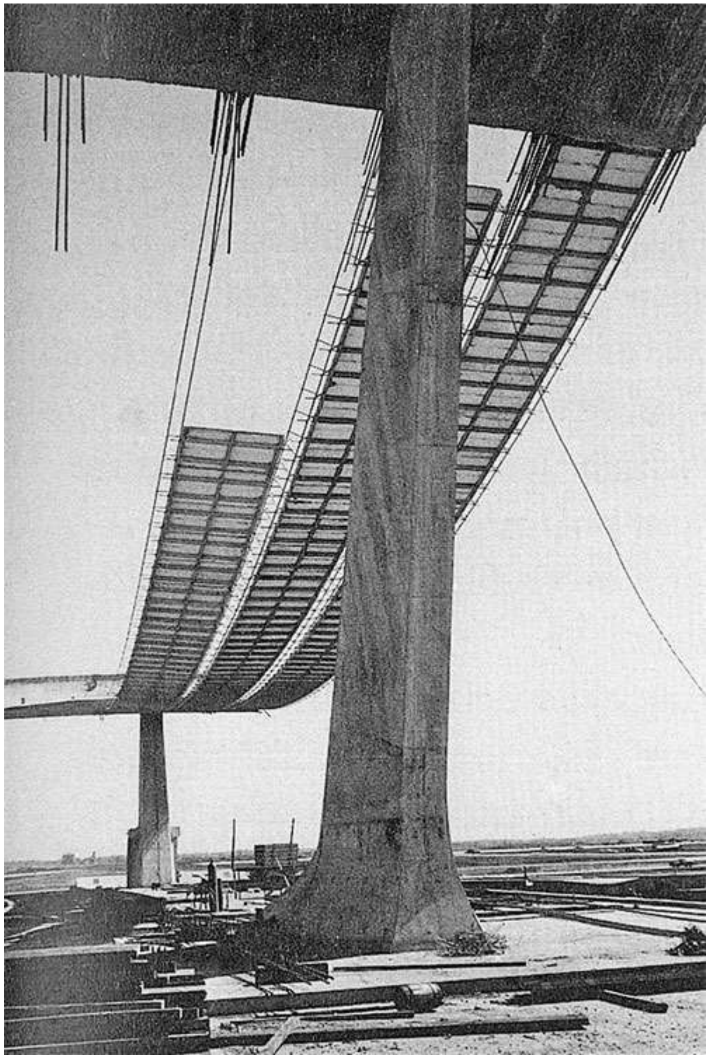
Substituindo valores
(L=30m, h=2m, a=10,981m):

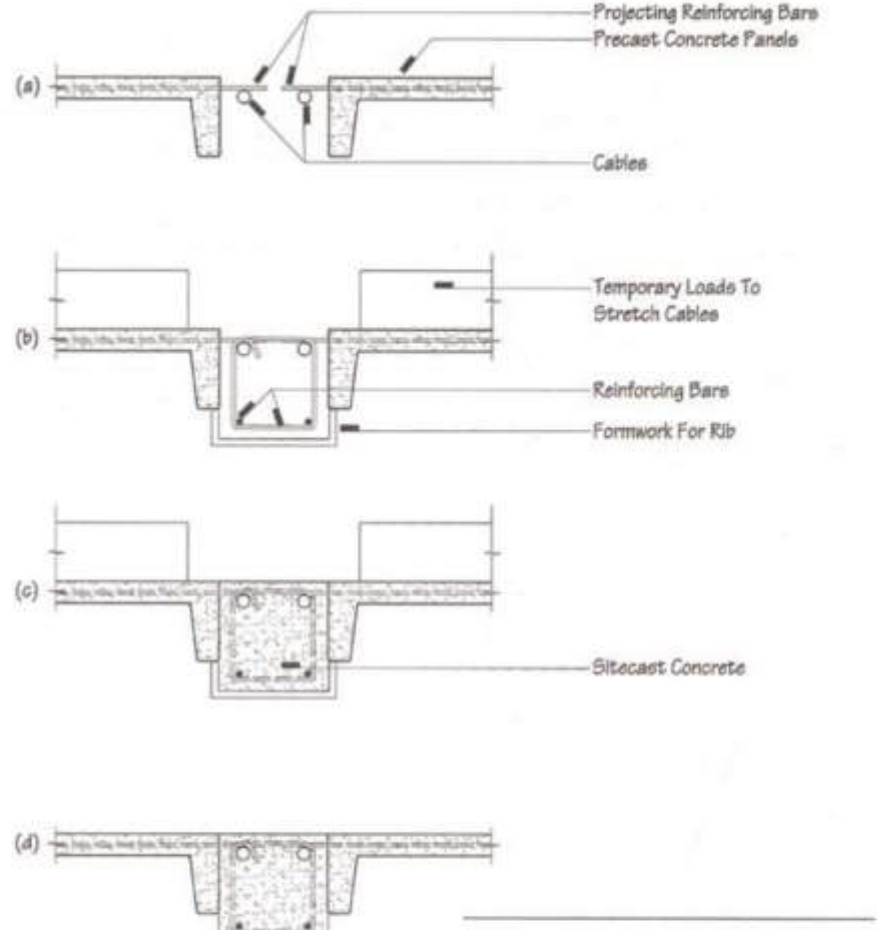
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} H = 30,15p \\ V_B = 19,02p \\ V_A = 10,98p \end{array}\right\}} \Rightarrow \boxed{N_{max} = \sqrt{H^2 + V_B^2} = 35,64p}$$

<u>Exercício:</u> A Figura 1 mostra a cobertura do Aeroporto Dulles, em Washington (Arq. Eero Saarinen, 1958), a qual consiste de uma casca de concreto protendido, obtida por meio de um engenhoso sistema construtivo, ilustrado na Figura 2. A cobertura tem geometria cilíndrica, com uma geratriz catenária, razoavelmente aproximada por uma parábola, funicular, portanto, a um carregamento vertical uniformemente distribuído. O peso próprio da estrutura é da ordem de w_{pp}=6kN/m². As cargas adicionais (neve e outros carregamentos) atingem w_{ad}=4kN/m². Os cabos de protensão estão espaçados de 3m, e ancoram-se a vigas de borda que transferem as cargas para os topos de colunas inclinadas, engastadas nas bases, afastadas entre si de 12m. A cobertura tem um vão transversal de 50m, medindo 192m na direção transversal.

Figura 1

Considerando o esquema estrutural da Figura 3, determine a altura y_C que define a menor cota da cobertura (ponto C). Determine as reações de ancoragem dos cabos de protensão nas vigas de borda (pontos A e B). Determine as cargas resultantes nos topos das colunas, e o momento fletor nas ancoragens das colunas maiores (ponto D), quando atuar a carga $w_{pp}+w_{ad}$. Desconsidere o peso da coluna. Compare o momento fletor na base das coluna inclinada com o momento que resultaria do uso de colunas verticais (ou seja, dispostas segundo o eixo BE, e engastadas em E).





◀ *Figure 11.30*
How the deck was attached to the Dulles roof.

Figura 2

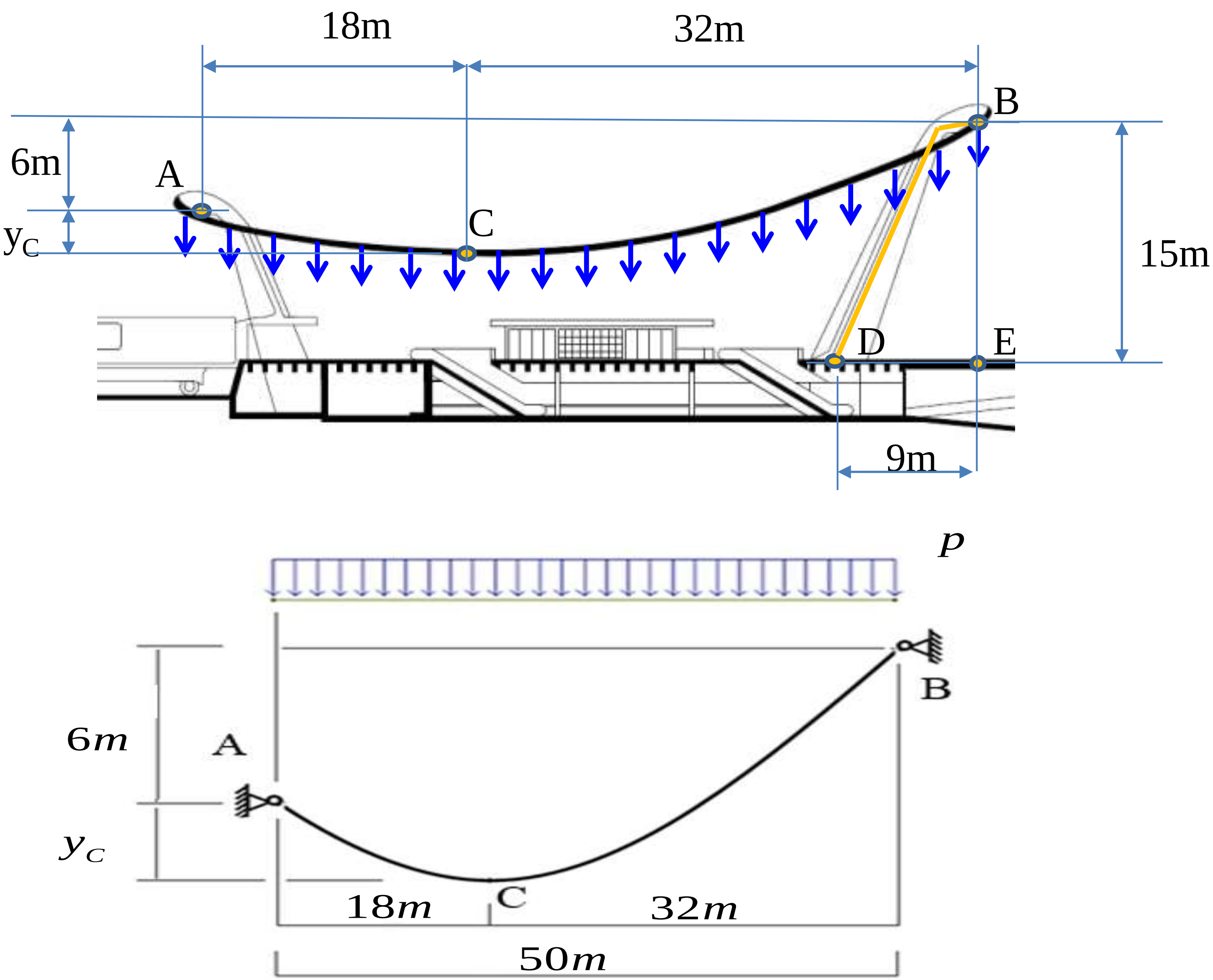


Figura 3