

OSCILAÇÕES AMORTECIDAS E FORÇADAS

1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

2. OSCILADOR AMORTECIDO

2.1 - ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

2.2 - BALANÇO DE ENERGIA

2.3 - CONCLUSÕES FINAIS

3. OSCILAÇÕES FORÇADAS

3.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL

3.2 - SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA

3.3 - ANÁLISE DA SOLUÇÃO

3.4 - BALANÇO DE ENERGIA

Vamos considerar a oscilação de um corpo ligado à uma mola de uma maneira mais realista, sob a ação de uma força de dissipação e também de uma força externa periódica.

Exemplos:

- criança em um balanço, sendo empurrada por um adulto,
- circuito RLC, alimentado por um gerador de tensão AC.
- um edifício sacudido por um terremoto.
- o amortecedor de um carro trafegando por um piso irregular

No movimento de um pêndulo ou de um bloco suspenso por uma mola a principal contribuição para o amortecimento da oscilação é a resistência do ar.

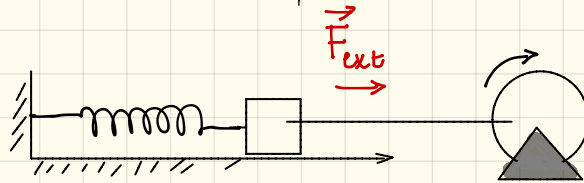
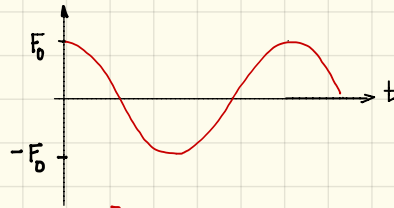
Essa força é proporcional à velocidade do corpo e sentido inverso;

$$F_{\text{diss}} = -b \frac{dx}{dt}$$

$b > 0$, e depende do meio (ar, líquido...) e da geometria do corpo.
unidades: N.s/m

Além dessa força vamos considerar uma força externa periódica com frequência angular ω .

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$$



1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

O balanço de forças se traduz pela equação:

$$\vec{F}_{\text{res}} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

dividindo por m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

$$\gamma = b/m$$

$\gamma \rightarrow$ unidades s^{-1}

Essa equação diferencial agora envolve a primeira derivada de $x(t)$ mas continua sendo linear.

Vamos usar a notação complexa e considerar uma função complexa $z(t)$:

$$x(t) = \text{Re}[z(t)]$$

e $z(t)$ obedece a eq. diferencial:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega_0^2 z - \gamma \frac{dz}{dt} + F(t) \quad (1)$$

2. OSCILADOR AMORTECIDO

Em primeiro lugar vamos analisar a situação em que a força externa é nula.

Na equação 1 $\rightarrow F(t) = 0$ $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega_0^2 z - \gamma \frac{dz}{dt}$

$\omega_0 =$ frequência angular natural do oscilador

Solução tentativa: $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

\rightarrow substituindo na eq. diferencial

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - \gamma \lambda e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} [\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2] = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Para que $x = e^{\lambda t}$ seja solução da equação diferencial λ deve satisfazer a equação de 2º grau:

$$\lambda = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Existem diferentes soluções que correspondem à diferentes tipos de movimento.

$$\text{Se } \frac{\gamma}{2} \geq \omega_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \rightarrow \text{Real}$$

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \rightarrow \text{Imaginário}$$

Cada uma dessas situações resulta em soluções e movimentos diferentes.

Vamos analisar separadamente cada uma dessas situações.

2.1. Análise das Soluções

i) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

Definimos: $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

Assim: $\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1} \omega$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$$

Solução geral da equação diferencial: combinação linear das duas soluções:

$$z(t) = A e^{\left[-\frac{\gamma}{2} + i\omega\right]t} + B e^{\left[-\frac{\gamma}{2} - i\omega\right]t}$$

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right]$$

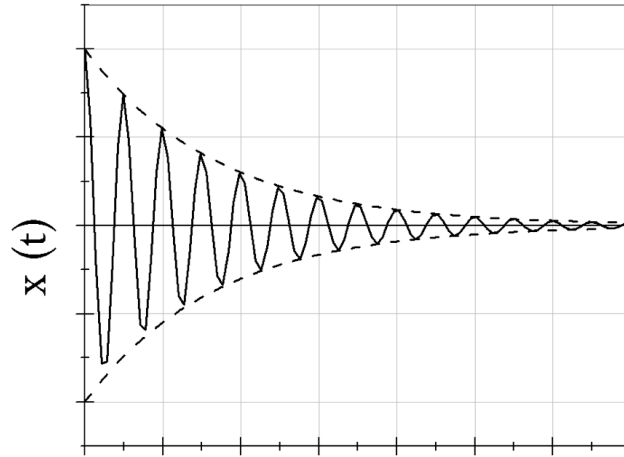
Tomando a parte real: $x(t) = \text{Re}[z(t)]$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[A \cos \omega t + B \sin \omega t \right]$$

A soma de dois cossenos de mesma frequência angular ainda é uma função cosseno e/ a mesma frequência angular. Essa expressão pode ser escrita de maneira equivalente:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)$$

A e ϕ são duas constantes ajustáveis de acordo com as condições iniciais.



oscilação periódica
amplitude que varia no tempo $a(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$

É importante notar que a frequência angular da oscilação é ω :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

A frequência angular da oscilação ω é menor que a frequência natural ω_0 .

Em resumo:

Para $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ → Amortecimento fraco

Solução → $x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)$

- O movimento é periódico com frequência $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

- A amplitude que decai com o tempo → $a(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$

ii) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

Definimos $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ → Real

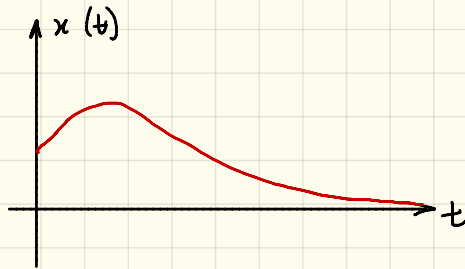
$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$$

Solução Geral: $x(t) = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t}$

$$x(t) = A e^{\left[-\frac{\gamma}{2} + \beta\right]t} + B e^{\left[-\frac{\gamma}{2} - \beta\right]t}$$

como $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ $\beta < \frac{\gamma}{2}$

$x(t)$ é a soma de duas exponenciais decrescentes



Não há movimento periódico.
O corpo retorna a posição de equilíbrio.

Para $\frac{\gamma}{2} > \omega_0 \rightarrow$ o amortecimento é super crítico.

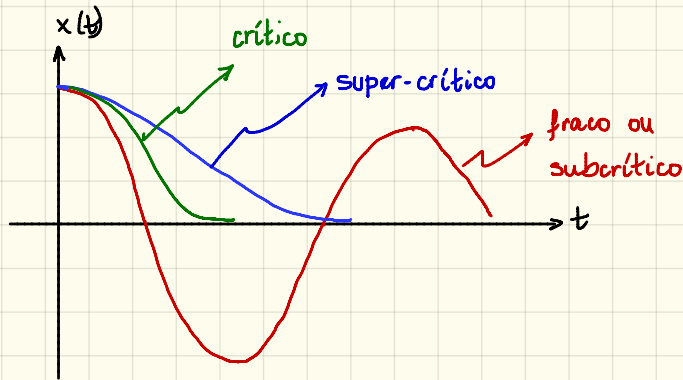
iii) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \rightarrow$ amortecimento crítico.

A solução geral é a solução para $\beta = 0 \rightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}t}$
mais a solução para $\beta > 0$, tomando o caso particular em que $\beta \rightarrow 0$.

Essa solução é dada por: $x(t) = e^{\frac{-\gamma}{2}t} [A + Bt]$

Nesse caso também não há movimento periódico. O corpo apenas retorna à posição de equilíbrio.

Essa solução decai mais rapidamente do que a solução com amortecimento super crítico, ou seja o corpo leva menos tempo para retornar à posição de equilíbrio.



EQUAÇÃO DIFERENCIAL: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

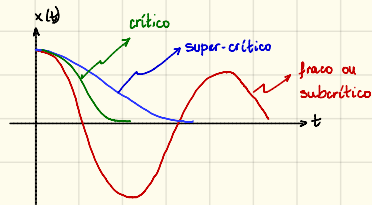
$$\gamma = \frac{b}{m}$$

SOLUÇÕES

Condição	Solução da Equação Diferencial	Amortecimento	Movimento
$\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$	fraco ou subcrítico	Periódico c/ frequência angular ω e amplitude decrescente
$\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t})$	super-crítico	retorno à posição de equilíbrio
$\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$	$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a + bt)$	crítico	retorno à posição de equilíbrio

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$



2.2. BALANÇO DE ENERGIA

$$\text{Energia Mecânica} = \text{Energia Cinética} + \text{Energia Potencial}$$

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) \quad K(t) = \frac{1}{2} m \frac{dx}{dt}^2$$

Vamos analisar o caso do amortecimento sub-crítico.

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi) - \omega A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \phi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m \left[\frac{\gamma^2 A^2 e^{-\gamma t}}{4} \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + A^2 \omega \gamma e^{-\gamma t} \underbrace{\sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)}_{2 \sin 2(\omega t + \phi)} \right]$$

Como a amplitude decai com o tempo, a energia mecânica também vai diminuindo.

Sabemos também que em cada ciclo a energia muda de forma

do potencial para cinética e vice-versa.

Vamos então determinar o valor médio da energia por ciclo, isto é no intervalo de tempo de um período, e como ela varia de um período para outro.

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t') dt'$$

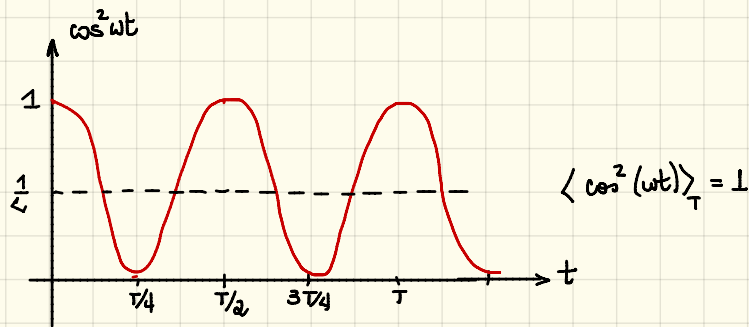
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} K(t') dt' + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U(t') dt'$$

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U(t') dt' = \frac{1}{T} \frac{kA^2}{2} \int_t^{t+T} e^{-\gamma t'} \cos^2(\omega t' + \phi) dt'$$

No intervalo de tempo de um período a função $\cos^2(\omega t' + \phi)$ varia mais rapidamente do que a função $e^{-\gamma t'}$, então podemos escrever a integral como:

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{T} \frac{kA^2}{2} \left(e^{-\gamma t} \right) \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t' + \phi) dt'$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t' + \phi) dt' = \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle_T \Rightarrow \text{Valor médio de } \cos^2 \omega t \text{ em 1 período}$$



$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\omega} k A^2 \left[\frac{1}{2} \right] e^{-\gamma t}$$

Para o cálculo de $\bar{k}(t)$ podemos usar o mesmo argumento e escrevemos:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \left[\frac{\gamma^2}{4} A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + 2 A^2 \omega \gamma e^{-\gamma t} \sin 2(\omega t + \phi) \right]$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma^2}{4} \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle_T}_{1/2} + \omega^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle_T}_{1/2} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} m \frac{\gamma^2}{4} e^{-\gamma t} \underbrace{\langle \sin 2(\omega t + \phi) \rangle_T}_0$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{2} \right) \left[\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2}_{\omega_0^2} \right]$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

Voltando à expressão de $\bar{E}(t)$

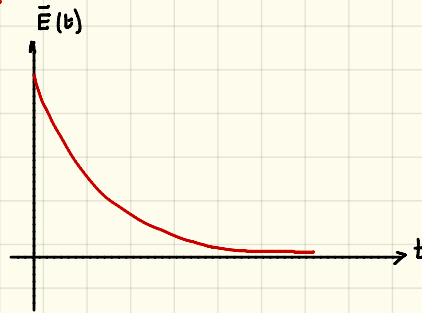
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{4} k A^2 e^{-\gamma t} + \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 e^{-\gamma t}$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \bar{E}(t) = \frac{1}{4} A^2 e^{-\gamma t} \left[k + m \frac{k}{m} \right] \Rightarrow$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-\gamma t} \Rightarrow E_0 = \text{Energia mecânica inicial} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\bar{E}(t) = E_0 e^{-\gamma t}$$

O gráfico ao lado mostra que o valor médio da Energia mecânica do oscilador decai com o tempo exponencialmente, com constante de decaimento $\gamma = b/m$.



2.3. Conclusões finais

Em uma oscilação livre o oscilador recebe uma energia inicial ao ser deslocado da posição de equilíbrio e passa a oscilar com sua frequência natural ω_0 .

$$\text{Massa mola} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{Pêndulo} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

Quando existe uma força dissipativa fraca, o movimento ainda é com frequência de oscilação ω ligeiramente menor que ω_0 ;

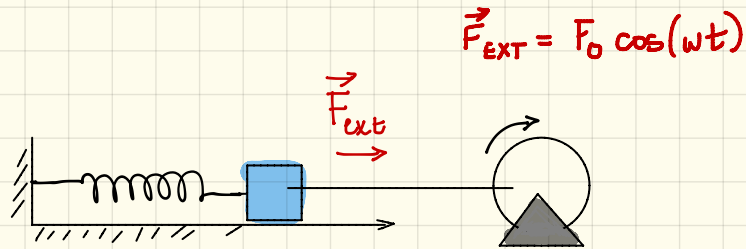
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \text{com} \quad \frac{\gamma}{2} < \omega_0$$

e a amplitude do movimento diminui com o tempo até que o movimento cessa e o oscilador atinge o estado de equilíbrio.

Se o fator de amortecimento γ é tal que $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ então o oscilador retorna a posição de equilíbrio diretamente sem oscilar.

3 - OSCILAÇÕES FORÇADAS

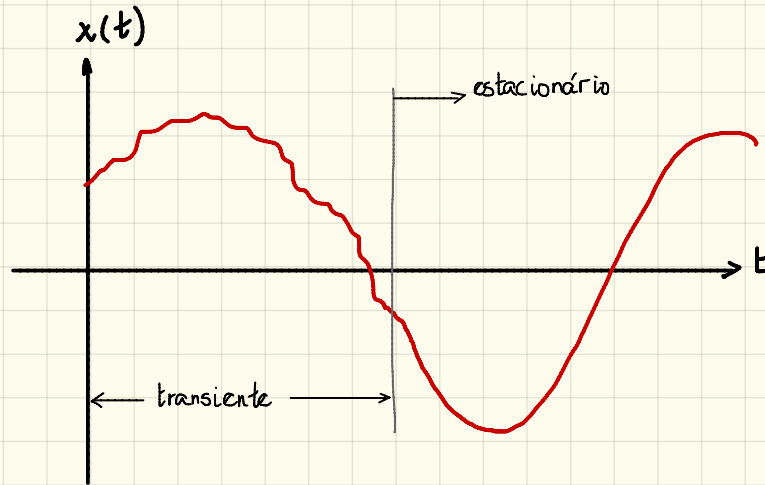
Vamos estudar o movimento de um oscilador quando ele está submetido à uma força externa e periódica.



Embora exista uma força dissipativa, a força externa realiza trabalho e a energia mecânica do oscilador é suprida com essa energia externa.

Quando o sistema está inicialmente em repouso e a força externa periódica é ligada o movimento que se segue durante um certo intervalo de tempo não é um movimento periódico, e depende das condições iniciais.

Esse movimento é transitório e tende a desaparecer e ser substituído por um movimento periódico que tem a mesma frequência angular da força externa.



Vamos analisar esse movimento periódico que se estabelece, que é chamado de regime estacionário.

3.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Considerando uma força dissipativa

$$F_{\text{Diss}} = -bv \quad b > 0$$

além da força externa, o balanço de forças é dado por:

$$\vec{F}_{\text{RES}} = -kx - bv + F(t)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

$$\gamma = b/m$$

A solução geral dessa equação é a soma do movimento transiente e do movimento periódico que tem a frequência da força externa.

Solução = transiente + estacionário.
Geral

Como o movimento transiente desaparece e o movimento que persiste é o movimento periódico, do regime estacionário vamos analisar a solução da equação diferencial que corresponde à esse regime.

ou seja $x(t)$ deve ser uma função do tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

3.2. SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA

Usando a notação complexa podemos escrever a equação diferencial para uma função $z(t)$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z + \gamma \frac{dz}{dt} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Buscamos uma solução tal que:

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] \Rightarrow z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Vamos então substituir $z(t)$, dz/dt e d^2z/dt^2 na equação diferencial para verificar se essa função é solução e sob quais condições.

$$\frac{dz}{dt} = i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega z(t)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (i\omega)^2 A e^{i(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 z(t)$$

Substituindo na equação diferencial:

$$-\omega^2 z(t) + \omega_0^2 z(t) + \gamma i\omega z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$A \cancel{e^{i\omega t}} \cdot e^{i\varphi} \cdot [\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega] = \frac{F_0}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right] \rightarrow \text{Imaginário}$$

Precisamos determinar a parte real e a parte imaginária desse número.

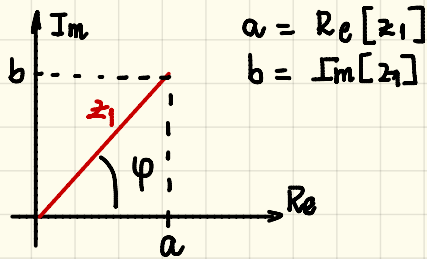
Para isso vamos multiplicar e dividir a expressão acima pelo conjugado complexo do denominador:

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Vamos chamar de z_1 o número complexo: $z_1 = A e^{i\varphi}$

No plano complexo esse número é representado por:



$$a = \operatorname{Re}[z_1]$$

$$b = \operatorname{Im}[z_1]$$

A = módulo de z_1

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

Parte real de $z_1 \Rightarrow a = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$

Parte imaginária de $z_1 \Rightarrow b = \frac{F_0}{m} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$

Então agora podemos calcular $A^2 = a^2 + b^2$

$$A^2 = \left[\frac{F_0}{m} \right]^2 \frac{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{-\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

3.3. ANÁLISE DA SOLUÇÃO

Vemos que a amplitude A e a fase dependem da frequência angular da força externa:

$$A = A(\omega)$$

$$\varphi = \varphi(\omega)$$

Para $\gamma \neq 0$ vemos que quando $\omega \rightarrow \omega_0$, isto é, quando a frequência angular da força externa é próxima da frequência natural do oscilador a amplitude do movimento tende a aumentar.

Vamos considerar $\gamma \ll \omega_0 \rightarrow$ amortecimento fraco.

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

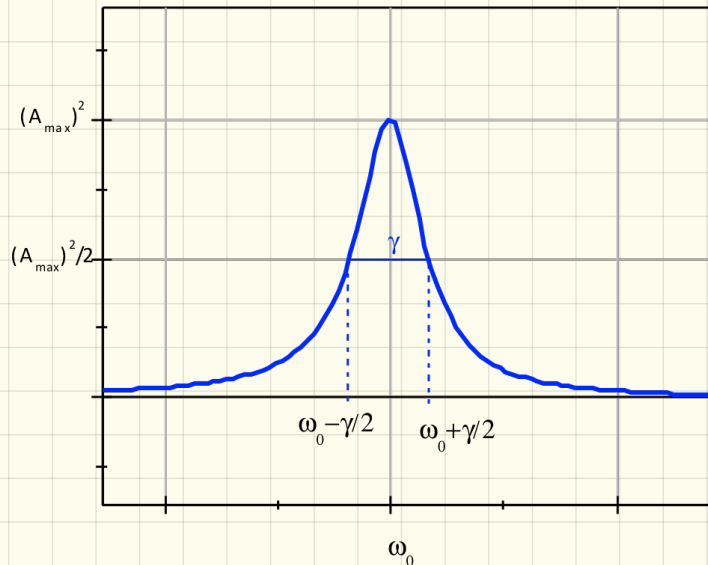
com
 $\omega = \omega_0$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

A amplitude é máxima para $\omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow$ Ressonância

Na figura abaixo vemos o gráfico de $A(\omega)$ mostrando que a amplitude de oscilação aumenta quando $\omega \rightarrow \omega_0$ e que a largura do pico de ressonância é igual a γ

Quanto menor o valor de γ mais estreito será o pico de ressonância. No limite:



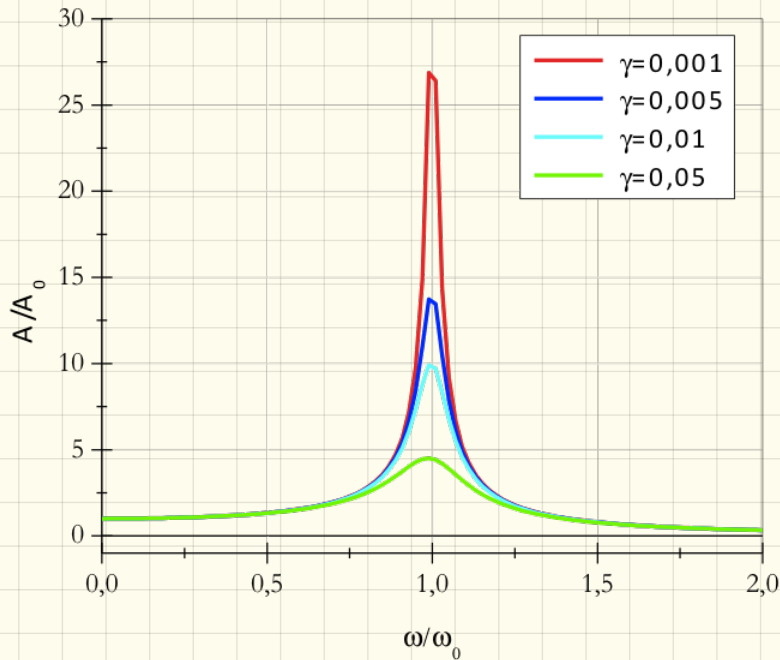
Definimos o fator $\Rightarrow Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}$

onde: $A(0) = A(\omega=0) \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

$$Q = \frac{F_0}{m\delta\omega_0} \cdot \frac{m\omega_0^2}{F_0} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\delta}$$

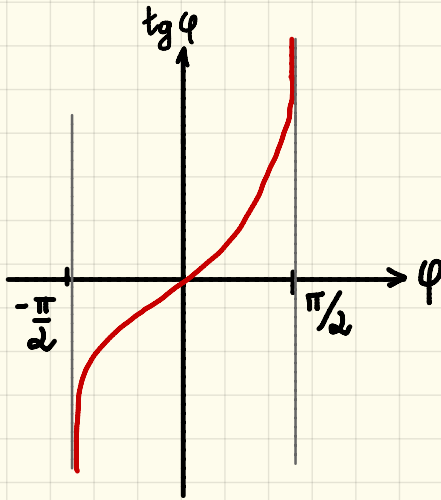
Q mede a amplificação na ressonância.

Quanto menor o valor do fator de amortecimento δ maior será o fator de amplificação.



Vamos analisar o que acontece com φ quando ω varia.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left[\frac{-\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$



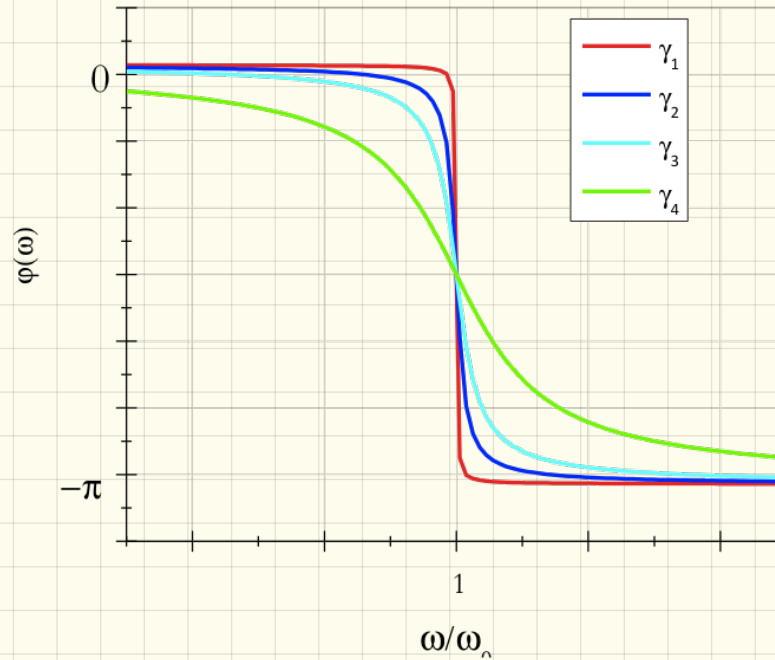
Quando $\omega \rightarrow \omega_0$ $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow -\infty$ $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\omega \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow 0$

$\omega \rightarrow \infty$ $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow +\frac{1}{\omega} \approx 0_+$ $\varphi \rightarrow -\pi'$

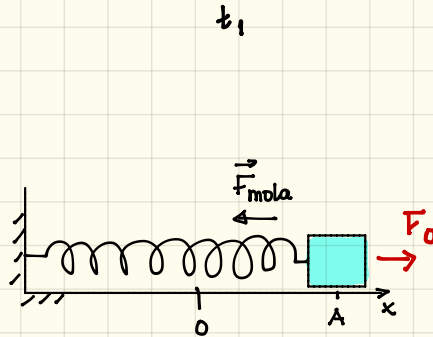
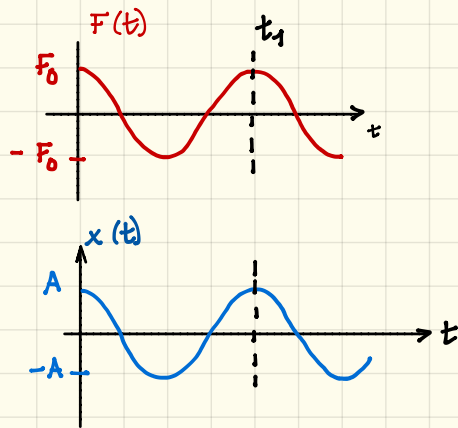
Essa mudança é praticamente descontínua quando $\gamma \rightarrow 0$ como é mostrado na figura abaixo.

$$\gamma_4 > \gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1$$



Quando $\omega \ll \omega_0$ e $\varphi = 0$

$$\text{se } F = F_0 \cos \omega t \Rightarrow x = A \cos \omega t$$



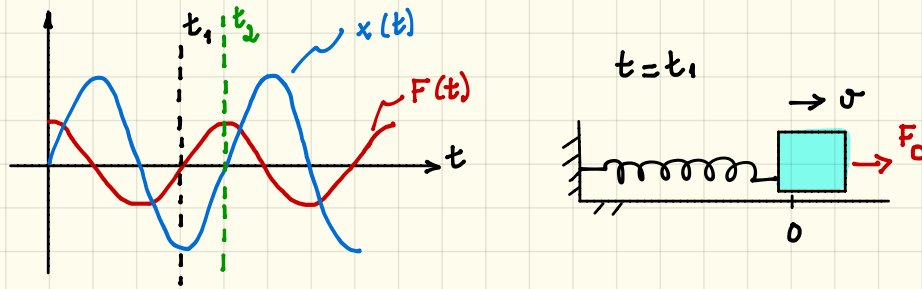
Vemos pelos gráficos de $x(t)$ e $F(t)$ que quando o corpo passa pelas posições de máxima elongação ou compressão da mola, a força exercida pelo motor também é máxima.

Tomemos o instante t_1 assinalado nos gráficos. Nesse instante $x = A$, ou seja, a mola tem o máximo de elongação e a força tem valor máximo, igual a F_0 .

Nesse instante a força exercida pela mola tem sentido negativo, enquanto a força exercida pelo motor tem sentido positivo.

Na ressonância, quando $\omega \cong \omega_0$ e $\psi = -\pi/2$, temos:

$$x(t) = A(\omega_0) \cos(\omega_0 t - \pi/2) = A(\omega_0) \sin(\omega_0 t)$$



Pelo gráfico vemos que na ressonância a força passa por um máximo quando a partícula passa pela posição de equilíbrio.

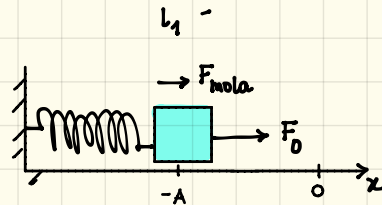
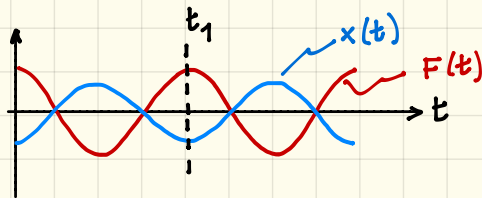
Para o instante t_2 , indicado no gráfico, a partícula passa por $x=0$, com velocidade positiva. Nesse instante o módulo da velocidade é máximo e a força também é máxima e tem o mesmo sentido de v .

Justamente quando a força exercida pela mola é nula a força do motor atua no sentido de empurrar o corpo para que ele se afaste da posição de equilíbrio.

Nos pontos de máximo afastamento da posição de equilíbrio, a força externa é nula.

Quando $\omega \gg \omega_0$ e $\varphi = -\pi$

$$x(t) = A/\omega \cos(\omega t - \pi) = -A/\omega \cos \omega t$$



A força exercida pelo motor é máxima quando a mola passa por um máximo de elongação ou de compressão.

No instante t_1 , indicado na figura, a mola está comprimida ao máximo, e a tanto a força do motor quanto a força da mola atuam no sentido de devolver o bloco à posição de equilíbrio.

Comparando as três situações vemos que:

quando $\varphi = 0$ a força do motor é máxima quando a força da mola também é máxima, mas com sentido oposto.

quando $\varphi = -\pi$, a força do motor é máxima nos pontos de máximo afastamento, com sentido de levar o corpo p/ a posição de equilíbrio

Na ressonância o trabalho realizado pelo motor transfere mais energia para o oscilador, contribuindo para o aumento da amplitude.

3.4.- BALANÇO DE ENERGIA

A energia mecânica do oscilador é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Estamos interessados na variação da energia, pois sabemos que ela não é constante:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{2} kx \frac{dx}{dt} + \frac{2}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[kx + m \frac{d^2x}{dt^2} \right] \frac{dx}{dt}$$

No regime estacionário: $x(t) = A(\omega) \cdot \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$\frac{dx}{dt} = -A(\omega) \cdot \omega \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) = -\omega^2 x(t)$$

Voltando à expressão de dE/dt :

$$\frac{dE}{dt} = \left[kx + m \frac{d^2x}{dt^2} \right] \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$k = \omega_0^2 m$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[\omega_0^2 m x - m \omega^2 x \right] \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = -m\omega \left[\omega_0^2 - \omega^2 \right] x \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \text{Tomando a média em um período}$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -m\omega \left[\omega_0^2 - \omega^2 \right] \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle$$

$$\left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = -\omega A^2 \underbrace{\left\langle \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \right\rangle}_0$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{a energia média não varia}$$

Isso pode ser visto ainda de outra maneira:

Retomando a equação diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

$$kx + m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_v \left[\underbrace{-b\frac{dx}{dt}}_{F_{\text{diss}}} + \underbrace{F(t)}_{F_{\text{ext}}} \right]$$

$$-b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \text{Potência dissipada} = \frac{dW_{\text{diss}}}{dt}$$

$$F(t) \cdot \frac{dx}{dt} = \text{Potência fornecida} = P(t)$$

A variação da energia no oscilador é o balanço entre a energia fornecida por um fator externo e a energia dissipada por atrito.

No regime estacionário, em um período, a potência fornecida é igual a potência dissipada.

$$\bar{P}_{\text{diss}} = -b \left\langle \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\rangle_T$$

$$\bar{P}_{\text{diss}} = -b \cdot (-A\omega)^2 \underbrace{\left\langle \sin^2[wt + \varphi] \right\rangle_T}_{1/2} = \frac{bA^2\omega^2}{2}$$

usando $b = \gamma m$ podemos escrever:

$$\overline{P}_{\text{Diss}} = \overline{P}_{\text{forN}} = \frac{1}{2} \gamma m \omega^2 A^2(\omega)$$

Vemos que a potência dissipada ou fornecida depende da frequência angular ω da força externa

Como $\overline{P}_{\text{Diss}}$ é proporcional a $A^2(\omega)$ o gráfico de $\overline{P}(\omega)$ é muito semelhante ao gráfico de $A(\omega)$, e será mais estreito e mais alto para valores de γ cada vez menores.