1. EXEMPLOS DE OSCILADORES

2. SISTEMA MASSA-MOLA

Força Elástica
Trabalho e Energia Potencial
Energia Mecânica

3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

4. DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

Solução Numérica
Solução Analítica
Discussão da solução da equação diferencial

5. BALANÇO DE ENERGIA

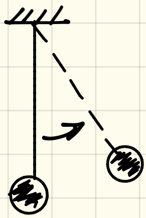
6. SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS

1. EXEMPLOS DE OSCILADORES

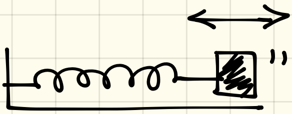
Movimento periódico, que se repete com um intervalo de tempo definido

Exemplos:

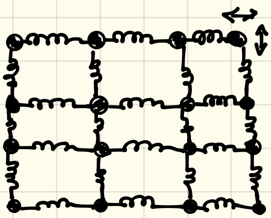
Pêndulo



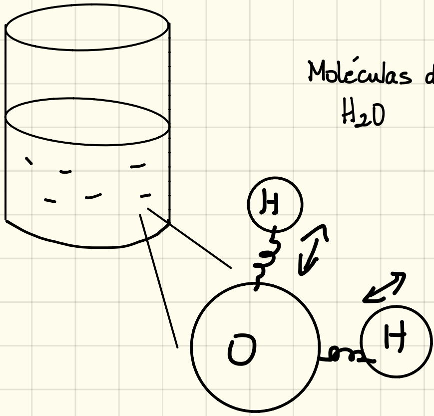
Massa-Mola

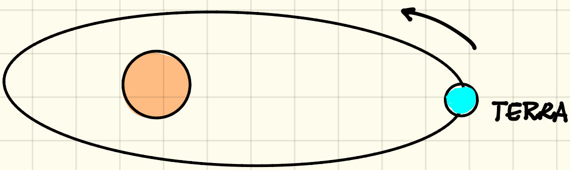


Átomos e Moléculas



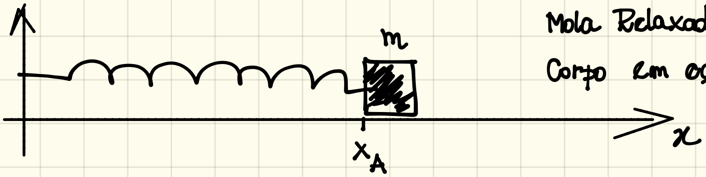
Moléculas de H_2O





2. SISTEMA MASSA - MOLA

Vamos estudar um sistema simples: Mola

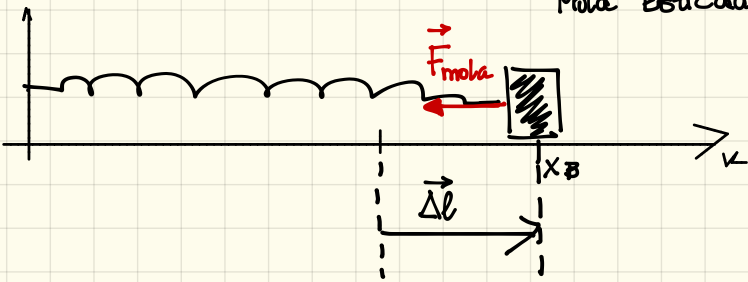


Mola Relaxada

Corpo em equilíbrio

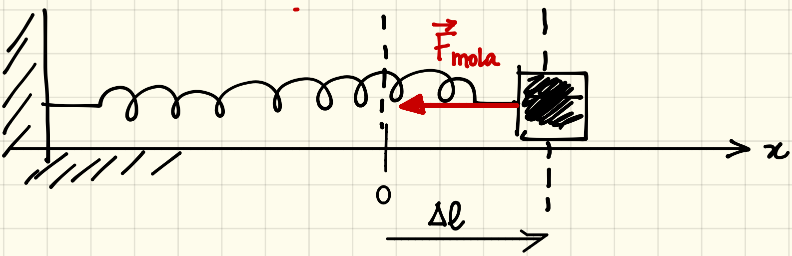
$\vec{F}_{RES} = 0$

Mola Esticada



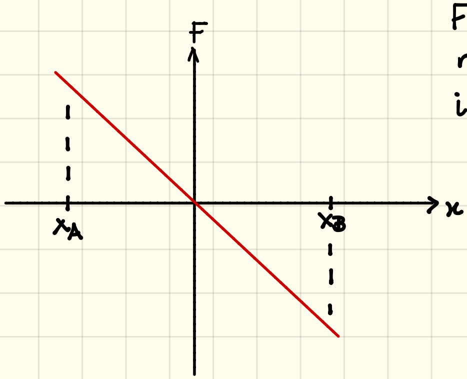
- Força exercida pela mola sobre o corpo não é constante
- Tem sentido oposto a $\Delta \ell$
- $|\vec{F}_{mola}|$ é proporcional à $|\Delta \ell| = |x_B - x_A|$

Podemos escolher a origem do eixo x em $x_A \rightarrow x_A = 0$



FORÇA ELÁSTICA

$\vec{F}_{mola} = -k\vec{x}$ $\quad x =$ deformação da mola $= \vec{\Delta \ell}$



F(x)
reta passando por x=0
inclinação da reta = k

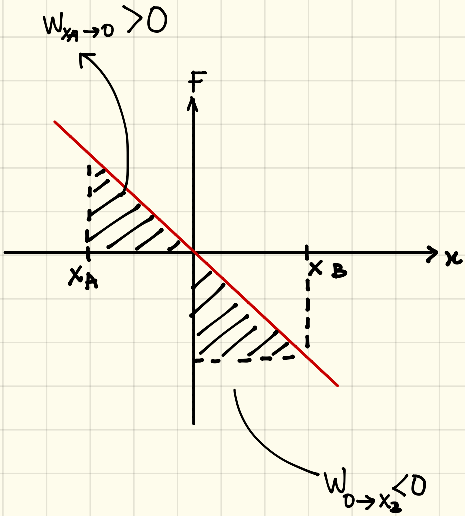
TRABALHO E ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

A força exercida pela mola realiza trabalho quando o corpo se desloca de uma posição x_A até x_B

$$W_{mola} = \int_{x_B}^{x_A} F(x)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} (-k\,x)\,dx = -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx$$

$$W_{mola} = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{k}{2}\left[x_B^2 - x_A^2\right]$$

$W_{mola} \equiv$ "Área" sob a curva F(x) entre os pontos A e B.



Trecho $x_A \to 0$ $\begin{cases} \vec{F} \; \rightarrow \\ \Delta x \; \rightarrow \end{cases}$

$$\vec{\Delta W} = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$$

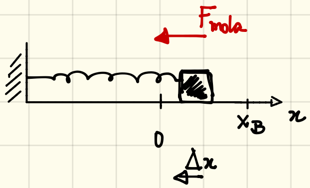
$\vec{F}$ e $\vec{\Delta x}$ tem mesma direção e mesmo sentido: $\Delta W > 0$

Trecho $0 \to x_B$ $\begin{cases} \vec{F} \; \leftarrow \\ \vec{\Delta x} \; \rightarrow \end{cases}$

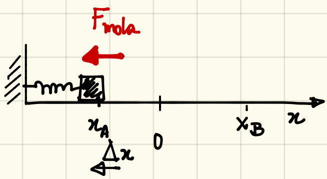
$\vec{F}$ e $\vec{\Delta x}$ tem mesma direção mas sentidos opostos: $\Delta W < 0$

A força exercida pela mola é uma força conservativa. se tomarmos um percurso fechado; $x_A \to x_B \to x_A$, o trabalho realizado pela força $\vec{F}_{mola}$ é igual a zero.

$$W_{x_A \to x_B \to x_A} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx + \int_{x_B}^{x_A} F(x)\,dx$$



$$\Delta W_{x_B \to 0} > 0$$
$$\Delta W_{x_B \to 0} = -\Delta W_{0 \to x_B}$$



$$\Delta W_{0 \to x_A} > 0$$
$$\Delta W_{0 \to x_A} = -\Delta W_{x_A \to 0}$$

Em cada trecho o sinal do trabalho se inverteu

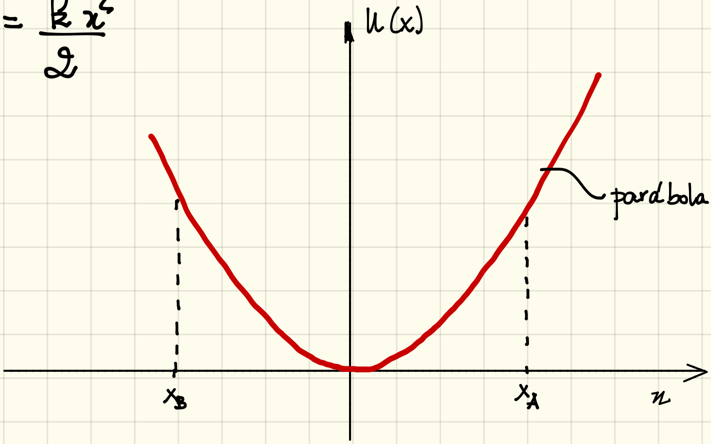
$$W_{x_B \to x_A} = -W_{x_A \to x_B}$$

$$W_{x_A \to x_B \to x_A} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx - \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = 0$$

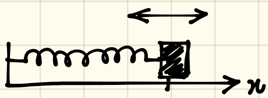
Portanto $\vec{F}_{mola}$ é uma força conservativa e existe uma função $U(x)$ tal que:

$$U(x_B) - U(x_A) = -\int_A^B F(x)\,dx$$

$$U(x) = \frac{k x^2}{2}$$



Quando o corpo é abandonado a partir do repouso c/ a mola esticada o corpo passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio.



Ao passar pela posição de equilíbrio a velocidade é máxima, embora a força exercida pela mola seja = 0.

Houve transformação da energia potencial elástica acumulada na mola em energia cinética.

Energia Mecânica Inicial: $E_{mec} = U_{mola}$

ENERGIA MECÂNICA

Na posição de equilíbrio → E_{mec} = Energia Cinética

Energia potencial da mola: $U = \frac{kx^2}{2} = 0$

Se não há força de atrito a energia mecânica é conservada:

$$E_{MEC}(x_B) = E_{mec}(x_A)$$

Se x_B é o ponto onde a mola passa pelo máximo de compressão, a velocidade do bloco nessa posição é igual a zero;

$$K(x_B) = 0$$

$$E_{MEC}(x_B) = \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k x_A^2$$

Então o bloco oscila simétricamente em torno da posição $x=0$, que é a posição de equilíbrio.

Para qualquer posição x podemos escrever a energia

$$E_{MEC} = K(x) + U(x)$$

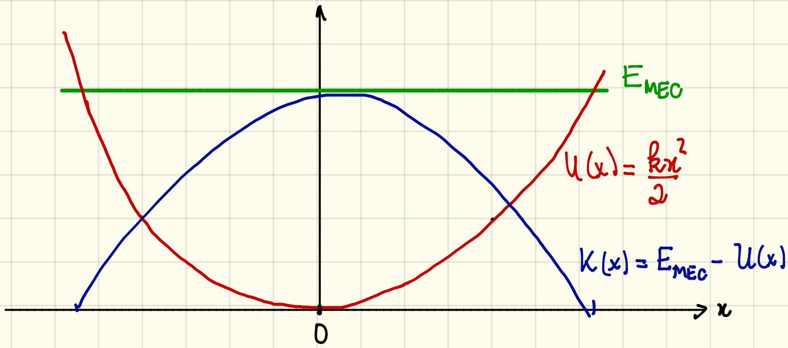
Como a energia mecânica é constante, se conhecemos a posição do bloco e a velocidade no instante $t=0$;

Em $t=0$ $\quad x(0)=x_0$ e $v(0)=v_0$

$E_{MEC}=E_0=\text{cte} \qquad E_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2$

sendo m a massa do bloco ligado à mola.

Então: $\quad K(x)=E_{MEC}-U(x)$



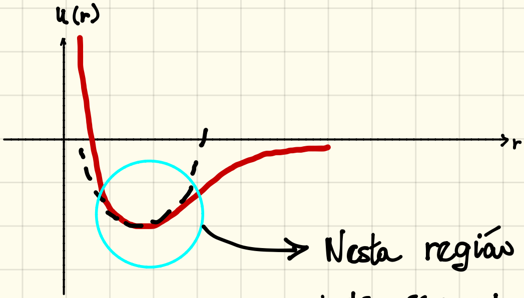
O ponto $x=0$ representa um mínimo do potencial $U(x)$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0 \qquad F(x)=-\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0$$

Esse ponto é chamado de ponto de equilíbrio estável porque se o bloco for ligeiramente afastado dessa posição, a força exercida pela mola tende a trazê-lo de volta p/ essa posição.

O corpo passa a executar um movimento de oscilação em torno da posição de equilíbrio

Existem na natureza muitos sistemas onde as partícula interagem por meio de um potencial que em algumas situações pode ser aproximado por um potencial do tipo massa-mola.



Nesta região o potencial U(r) pode ser aproximado por uma parábola.

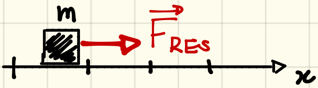
Potenciais U(r) com essa forma funcional descrevem a a interação entre partículas em uma solução (coloides), átomos em uma molécula, asteroide orbitando um planeta, entre o elétron e o núcleo...

Daí o interesse em estudar osciladores, que embora sejam simples podem ser usados como modelos para o estudo de problemas mais complexos.

3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Quando estudamos o movimento retilíneo queremos obter a equação que descreve a posição da partícula em função do tempo, conhecendo-se as forças que atuam sobre ela.

Vamos considerar inicialmente a situação mais simples de uma força resultante constante;



$$\vec{F} = cte \rightarrow \vec{a} = cte \longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Integrando essa equação obtivemos a velocidade da partícula $\vec{v}(t)$.

Como estamos considerando o movimento apenas em uma dimensão vamos simplificar a notação:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v = \int a(t)\,dt$$

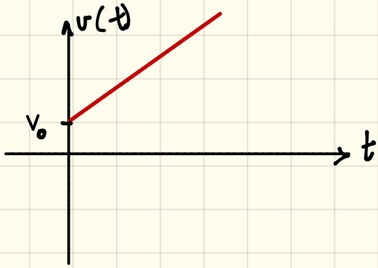
Solução $\Rightarrow v = at + cte$

Ao integrar uma vez essa equação temos uma constante

Essa constante tem a dimensão de velocidade, isto é m/s.

Conhecendo-se a velocidade da partícula em um certo instante $t_0 \to v(t_0) = v_0$

$v = v_0 + at$



Podemos agora continuar essa operação para obter a função $x(t)$.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow dx = (v_0 + at)\,dt$$

$$x(t) = \int (v_0 + at)\,dt$$

Solução: $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + cte$ dimensão de posição

se em t_0 conhecemos a posição $\Rightarrow x(t_0) = x_0$

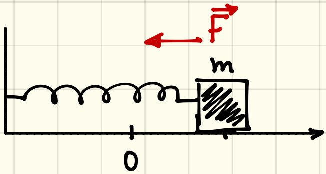
Então temos: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Essa equação foi obtida a partir da integração de uma equação diferencial de segunda ordem:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = cte$$

Como $a = cte$ conseguimos realizar a integração e obter a solução.

No caso do corpo ligado à uma mola: $F = -kx \neq cte$



$$a = \frac{F}{m}$$

Então: $a = -\frac{kx}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Agora não é possível realizar analiticamente a integração.

Essa equação diferencial é linear e de segunda ordem.

- Linear porque todos os termos envolvendo a função ou suas derivadas tem expoente 1.

- De 2ª ordem porque contém a derivada segunda.

4. DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

Para descrever o movimento do corpo ligado à mola precisamos obter a posição do objeto em cada instante, ou seja é necessário obter a função $x(t)$.

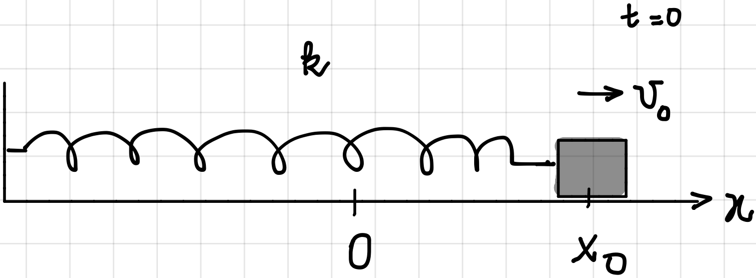
Existem diferentes estratégias para obter $x(t)$, uma delas é utilizar métodos numéricos, que podem ser implementados em uma planilha ou em um computador. A outra estratégia é tentar obter a função $x(t)$ de forma que essa função satisfaça a equação diferencial. Essa segunda estratégia fornece uma solução analítica. Nem todas equações diferenciais podem ser resolvidas dessa maneira.

Veremos a seguir os detalhes de cada um dos métodos aplicados à equação diferencial que descreve o movimento do sistema massa-mola.

I - Solução Numérica

Vamos considerar um corpo de massa m, ligado a uma mola de constante k.

Em um dado instante t_0, a mola está deformada e o o corpo está na posição x_0 e é liberado com velocidade v_0.

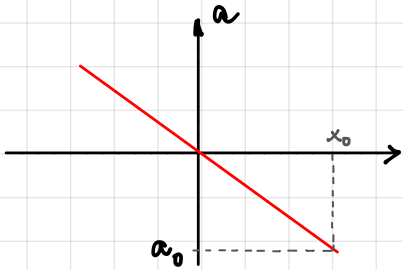


Temos um conjunto de parâmetros conhecidos:

k, m e condições iniciais: $t_0 \begin{cases} x_0 \\ v_0 \end{cases}$

Vimos que a aceleração do corpo depende da deformação da mola, e varia com x:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} \Rightarrow$$



Para o instante t_0, podemos calcular a aceleração; a_0

$$a_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{kx_0}{m}$$

Consideremos agora um intervalo de tempo pequeno Δt, de tal forma, que nesse intervalo a aceleração seja aproximadamente constante. Assim, podemos calcular a variação da velocidade nesse intervalo de tempo; Δv

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a.\Delta$$

com $\Delta t = t_1 - t_0$ e $\Delta v = v_1 - v_0$

$v_1 =$ velocidade do corpo no ins te t_1, $\Rightarrow t_1 = t_0 + \Delta t$

A velocidade v_1 representa a velocidade instântanea no instante $t = t_1$, que é dada por:

Lembrando que a velocidade instantânea em um certo instante t é dada por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]$$

Então, no instante t_1, a velocidade instantânea $v(t_1)$ será:

$$v_1 = v(t_0 + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \right]$$

$$v_1 \Delta t = x(t_1) - x(t_0) \Rightarrow x(t_1) = x_0 + v_1 \Delta t$$

Então, usando as informações sobre as condições iniciais x_0, v_0 e aceleração a_0, obtivemos a posição (x_1) e a velocidade para um instante posterior $t_1 = t_0 + \Delta t$

Esse procedimento pode ser repetido usando os valores de x_1 e v_1 para calcular a aceleração a_1 e a posição e e a velocidade para um instante posterior $t_2 = t_1 + \Delta t$, e assim por diante, para instantes $t_3 = t_2 + \Delta t$ ...

Repetindo esse procedimento obtém-se valores de x, v, e a para um dado instante t; como na tabela abaixo.

$$\begin{array}{cccc} t_0 & v_0 & x_0 & a_0 \\ t_1 & v_1 & x_1 & a_1 \\ t_2 & v_2 & x_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n & v_n & x_n & a_n \end{array} \Rightarrow \text{GRÁFICO} \quad \begin{array}{l} a(t) \\ v(t) \\ x(t) \end{array}$$

Esse procedimento pode ser realizado facilmente com uma planilha de Cálculo (EXCEL, por exemplo).

Na 1ª. linha da tabela: $\begin{cases} t_0,\ v_0 \text{ e } x_0 \text{ são dados} \\ a_0 = kx_0/m \end{cases}$

$$2^{\underline{a}}\ \text{Linha:} \begin{cases} t_1 = t_0 + \Delta t \\ v_1 = v_0 + a_0 \Delta t \\ x_1 = x_0 + v_1 \Delta t \\ a_1 = kx_1/m \end{cases}$$

$$3^{\underline{a}}\ \text{linha} \begin{cases} t_2 = t_1 + \Delta t \\ v_2 = v_1 + a_1 \Delta t \\ x_2 = x_1 + v_2 \Delta t \\ a_2 = kx_2/m \end{cases} \quad \cdots$$

A solução numérica permite a obtenção de valores para $x(t)$ mas não nos fornece a função que descreve esses valores.

II - Solução Analítica

Temos a equação diferencial que descreve o movimento de um corpo ligado a uma mola:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

onde k e m são constantes e conhecidos, e $(k/m) > 0$.

Devemos então procurar uma função $x(t)$ que satisfaça a equação diferencial; isto é, uma função tal que sua 2ª derivada seja igual a própria função com sinal negativo, multiplicada por uma constante.

Algumas funções são candidatas à solução; a função exponencial e funções seno e cosseno, que podemos escrever de maneira genérica como:

$$x(t) = A\cos(Bt)$$

$$x(t) = A\,\text{sen}(Bt)$$

$$x(t) = Ae^{Bt}$$

com A, B constantes. arbitrárias reais.

Vamos testá-las!

Para testar se essas funções satisfazem a equação diferencial, calculamos a 2ª derivada da função, substituímos a expressão obtida na equação diferencial e verificamos em que condições a equação diferencial é satisfeita.

1) Teste para $x(t) = A\cos(Bt)$

$$\frac{dx}{dt} = -AB\,\text{sen}(Bt) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -AB^2\cos(B$$

Na equação diferencial vamos substituir $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $x(t)$:

Eq. dif.: $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x(t)$$

$$-AB^2\cos(Bt) = -\frac{k}{m}\,A\cos(Bt)$$

Simplificando: $$-\cancel{A}B^2\cancel{\cos(Bt)} = -\frac{k}{m}\,\cancel{A}\cancel{\cos(Bt)} \Rightarrow B^2 = k/m$$

Então a função $x(t) = A\cos(Bt)$; com $B^2 = k/m$ é solução!

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

2) Teste para $x(t) = A\,\text{sen}(Bt)$

$$\frac{dx}{dt} = AB\cos(Bt), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -AB^2\,\text{sen}(Bt)$$ $\longrightarrow$ substituindo na eq. dif.

Eq. dif.: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\, x(t)$

$$\underbrace{-AB^2 \operatorname{sen}(Bt)} = -\frac{k}{m} \underbrace{A \operatorname{sen}(Bt)} \quad \Longrightarrow \quad B^2 = \frac{k}{m}$$

Então $x(t) = A\operatorname{sen}(Bt)$ com $B^2 = k/m$ é solução da eq. diferencial:

$$x(t) = A\operatorname{sen}\left(\sqrt{k/m}\; t\right)$$

3) Teste para $x(t) = A e^{Bt}$

$\dfrac{dx}{dt} = AB e^{Bt}$ $\qquad$ $\dfrac{d^2x}{dt^2} = AB^2 e^{Bt}$ $\quad \Rightarrow$ substituindo na eq. dif.

Eq. dif.: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\, x(t)$

$$\underbrace{AB^2 e^{Bt}} = -\frac{k}{m} \underbrace{A e^{Bt}} \quad \Longrightarrow \quad B^2 = -\frac{k}{m}$$

Mas: $(k/m) > 0$ então $B^2 < 0$!

Isso só é possível se B for um número imaginário.

Solução Geral

Vimos que as funções seno e cosseno são soluções possíveis para a equação diferencial.

A equação diferencial que descreve o movimento do corpo ligado a mola é uma equação diferencial linear e de segunda ordem.

Uma propriedade importante das equações diferenciais lineares é que se encontramos mais de uma solução p/ a equação, a solução geral é uma combinação linear das soluções particulares.

Prova

Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas funções soluções da equação diferencial. A solução geral será a função

$$x(t) = ax_1 + bx_2 \quad ; \quad a, b \text{ constantes } \in \mathbb{R}.$$

se x_1 e x_2 são soluções, então cada uma delas satisfaz a equação diferencial linear.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_2$$

multiplicamos por a

multiplicamos por b

$$a\frac{d^2x_1}{dt^2} = -a\frac{k}{m}x_1$$

$$b\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_2$$

→ Somando as duas equações membro a membro

$$a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left[ax_1 + bx_2\right]$$

$$a\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[ax_1\right] \quad e \quad b\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[bx_2\right]$$

pois a e b são constantes

O lado esquerdo da equação pode ser escrito como:

$$\frac{d^2}{dt^2}(ax_1) + \frac{d^2}{dt^2}(bx_2) = -\frac{k}{m}(ax_1 + bx_2)$$

soma das derivadas = derivada da soma

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big[\underbrace{ax_1 + bx_2}_{x(t)}\Big] = -\frac{k}{m}\big(\underbrace{ax_1 + bx_2}_{x(t)}\big)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$ ⇒ Então $x(t)$ é solução e é a solução geral.

Vimos que as funções seno e cosseno são soluções particulares da equação diferencial e que a solução geral deve ser uma combinação linear dessas duas funções:

$$x(t) = a\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + b\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

Vamos chamar $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ e mais adiante discutiremos o significado dessa constante.

Solução Geral $\rightarrow$ $\boxed{x(t) = a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t}$

com a e b constantes, ajustáveis de acordo com as condições iniciais.

Uma forma equivalente de escrever a solução geral é:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

com A e φ, constantes ajustáveis de acordo com as condições iniciais.

<u>Demonstração</u>:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega t\cos\varphi - A\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$x(t) = \underbrace{(A\cos\varphi)}_{\text{cte.}}\cos\omega t + \underbrace{(A\,\text{sen}\,\varphi)}_{\text{cte.}}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$x(t) = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$$

Portanto as duas expressões são equivalentes.

Veremos agora o <u>significado das constantes A e φ</u>

Condições iniciais $\Rightarrow$ $t=0$ $\begin{cases} x(0)=x_0 \\ v(0)=v_0 \end{cases}$

Na expressão $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$x(0) = A\cos\varphi = x_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$$

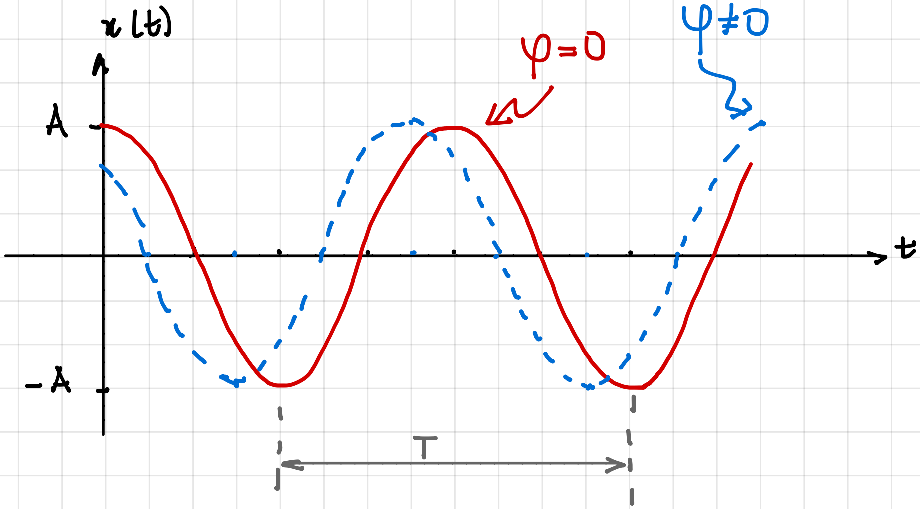
$$v(0) = -A\omega\,\text{sen}\,\varphi = v_0$$

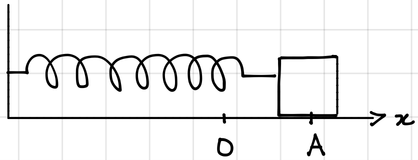
Combinando as equações: $\frac{v_0}{x_0} = \frac{-A\omega\,\text{sen}\,\varphi}{A\cos\varphi}$

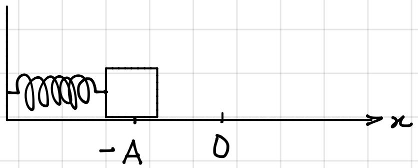
$$\boxed{\text{tg}\,\varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0}} \qquad \boxed{A = \frac{-v_0}{\omega\,\text{sen}\,\varphi}}$$

A constante A é chamada de amplitude da oscilação, e corresponde ao valor máximo de afastamento, em relação à posição de equilíbrio.

A função x(t) representa um movimento oscilatório entre x = A e x = -A, como mostrado na figura abaixo.







A constante φ é chamada de fase, e o seu valor depende da escolha da origem do tempo. Isso pode ser visto pelo deslocamento das curvas na figura acima. Qdo. $\varphi = 0$, em $t=0$, temos $x(0) = A\cos(0) = A$.

A curva azul, com $\varphi \neq 0$, corresponde à curva vermelha, apenas deslocada no tempo.

A função cosseno tem período igual a 2π, isto é, quando a quantidade entre parenteses varia de 2π, a função $x(t)$ tem novamente o mesmo valor.

φ e ω são constantes, $\Rightarrow \omega \Delta t = 2\pi$

Quando a função volta a assumir o mesmo valor;

$$\Delta t = T = \text{período de oscilação}$$

T = intervalo de tempo que o corpo leva para voltar à mesma posição.

Então: $\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

ω = frequência angular $\Rightarrow$ unidades (s^{-1}).

lembrando que: $\boxed{\omega^2 = \dfrac{k}{m}}$

5. BALANÇO DE ENERGIA

Em qualquer instante a energia mecânica do oscilador massa-mola é dado por:

$$E = \frac{1}{2} k x^2(t) + \frac{1}{2} m v^2$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

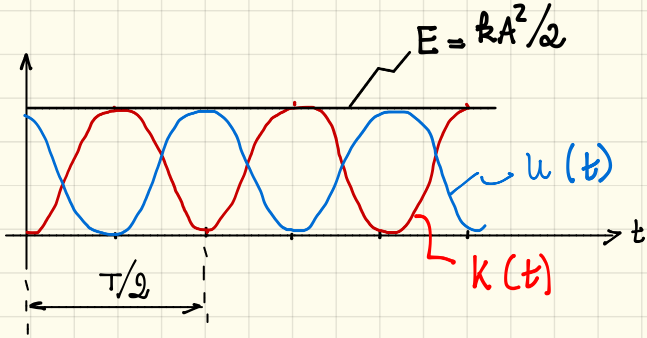
$$E = \frac{1}{2} k \left[A^2 \cos^2(\omega t + \phi)\right] + \frac{1}{2} m \left[A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)\right]$$

lembrando que $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$E = \frac{A^2}{2}\left[k \cos^2(\omega t + \phi) + m \frac{k}{m} \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$E = \frac{kA^2}{2}\left[\underbrace{\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)}_{1}\right]$$

$$\boxed{E = \frac{kA^2}{2} = cte}$$



No gráfico: $t=0$ $\quad x(0)=A$ e $v_0=0$

7. SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS PERIÓDICOS

Em algumas situações um movimento é resultante de movimentos harmônicos, as vezes com períodos diferentes, as vezes em direções diferentes, as vezes com mesmo período e amplitudes diferentes.
Vamos analisar algumas dessas situações.

- Mesma direção e mesmo período

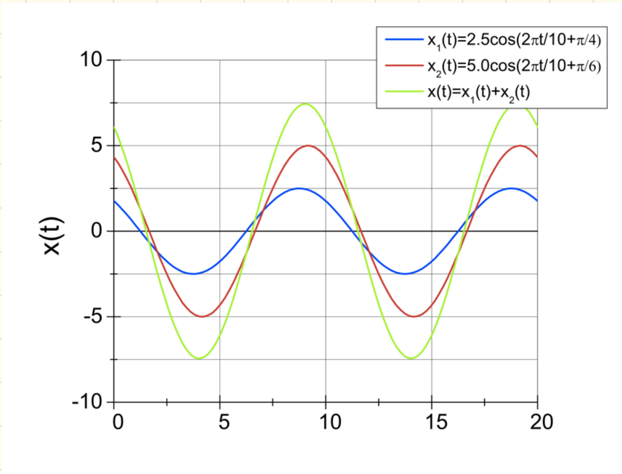
Dados dois movimentos: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$

$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_1)$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

O movimento resultante ainda é periódico e tem a mesma frequência angular ω

Exemplo:



- Mesma direção e frequências diferentes

Vamos considerar que as fases iniciais são nulas.

$x_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t$

$x_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t \implies x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$

Esse movimento, em geral, não é um movimento periódico.

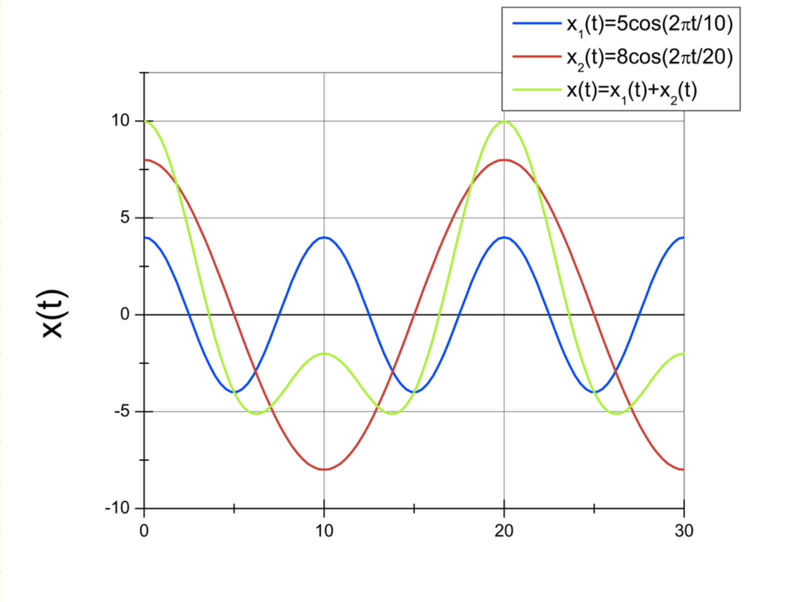
Para que o movimento resultante seja periódico é necessario que exista um período τ, para o qual x_1 e x_2 voltem ao mesmo ponto.

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{T_1} \cdot \tau = 2\pi n_1 \\ \\ \frac{2\pi}{T_2} \cdot \tau = 2\pi n_2 \end{cases} \implies \text{dividindo uma equação pela outra} \implies \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

com n_1 e n_2 inteiros.

Exemplo: $T_1 = 10s$ $\quad \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{20}{10} = \dfrac{2}{1}$

$T_2 = 20s$

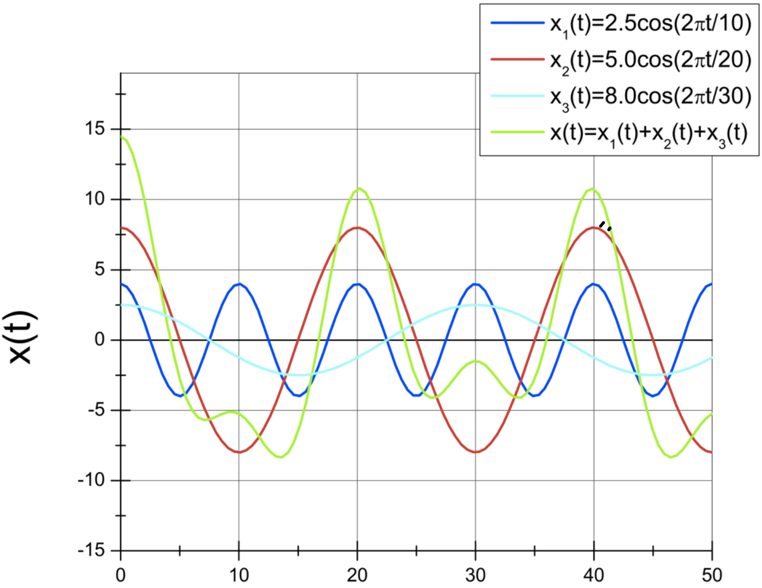


Embora o novo movimento não seja uma função simples, como seno ou cosseno, ainda é periódico. No exemplo acima, vemos que $\tau = 20s$

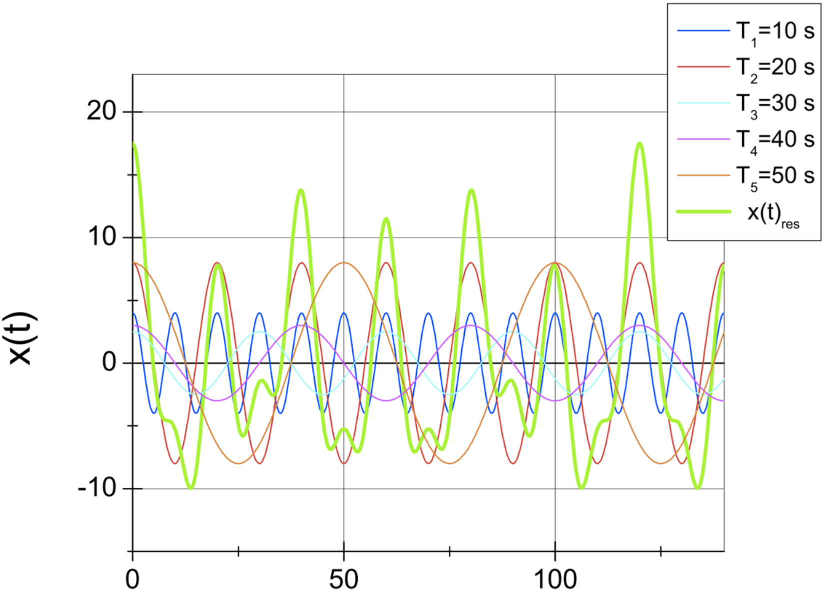
Um movimento periodico complexo pode ser descrito como a soma de vários movimentos periodicos, com períodos comensuráveis, isto é:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \cdots \quad \frac{T_k}{T_1} = \frac{n_k}{n_1}$$

No exemplo a seguir são mostrados dois movimentos periódicos que resultam da superposição de outros movimentos periódicos com períodos comensuráveis.



x(t)
$x_1(t)=2.5\cos(2\pi t/10)$
$x_2(t)=5.0\cos(2\pi t/20)$
$x_3(t)=8.0\cos(2\pi t/30)$
$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
10
20
30
40
50



x(t)
T_1=10 s
T_2=20 s
T_3=30 s
T_4=40 s
T_5=50 s
$x(t)_{res}$
20
10
0
-10
0
50
100

- BATIMENTOS

Um caso interessante para analisar é a superposição de dois movimentos periódicos que tem frequências apenas ligeiramente diferentes.

Vamos considerar que os movimentos tem a mesma amplitude:

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t) \qquad x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow A[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

frequência angular média $\qquad 2\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2$

diferença de frequências $\qquad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

Somando e subtraindo as duas equações:

$$\begin{aligned} (+)\quad 2\bar{\omega} + \Delta\omega &= 2\omega_2 \\ (-)\quad 2\bar{\omega} - \Delta\omega &= 2\omega_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{2\bar{\omega} + \Delta\omega}{2} \\ \omega_1 = \dfrac{2\bar{\omega} - \Delta\omega}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = A\left[\cos\left(\frac{2\bar{\omega} - \Delta\omega}{2}\right)t + \cos\left(\frac{2\bar{\omega} + \Delta\omega}{2}\right)t\right]$$

$$= A\left[\cos\bar{\omega}t\cos\frac{\Delta\omega t}{2} + \cancel{\mathrm{sen}\,\bar{\omega}t\,\mathrm{sen}\frac{\Delta\omega t}{2}} + \cos\bar{\omega}t\cos\frac{\Delta\omega t}{2} - \cancel{\mathrm{sen}\,\bar{\omega}t\,\mathrm{sen}\frac{\Delta\omega t}{2}}\right]$$

$$x(t) = 2A\cos\bar{\omega}t\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$\bar{\omega} \gg \Delta\omega$

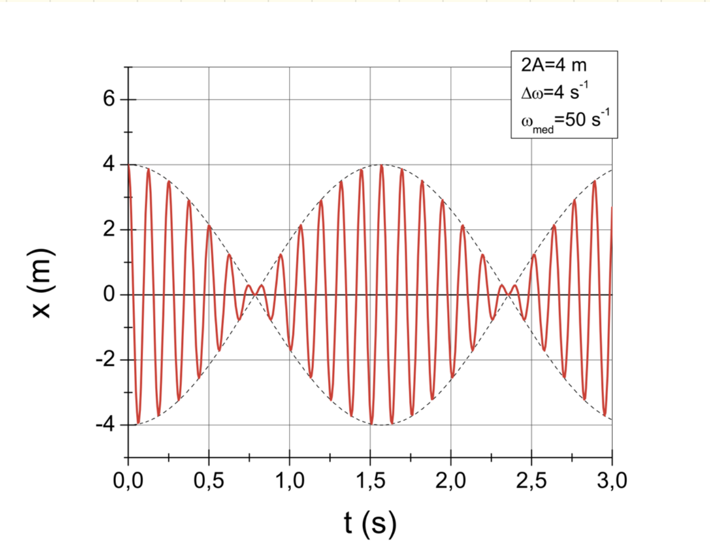
e como ω é inversamente proporcional ao período da oscilação vemos que existe uma oscilação rápida com período $\bar{T} = 2\pi / \bar{\omega}$ e uma oscilação lenta com período $T' = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$

Podemos escrever $\Rightarrow$ $\quad x(t) = a(t)\cos(\bar{\omega} t) \quad a(t) = 2A\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2} t\right)$

A amplitude da oscilação é modulada por uma frequência angular

$$\omega_{mod} = \frac{\Delta\omega}{2}$$

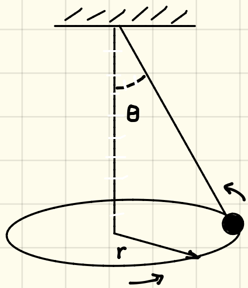
Na figura as linhas tracejadas correspondem à: $\pm a(t) = 2A\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2} t\right)$



- Mesma frequência e direções perpendiculares

Um exemplo é um pêndulo que pode executar oscilações em um plano, com $\theta \approx 0$.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$



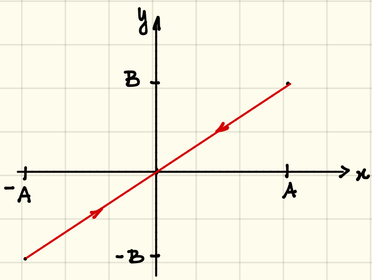
$$x(t) = A\cos(\omega t)$$
$$y(t) = B\cos(\omega t + \phi)$$

ϕ = diferença de fase entre as oscilações na direção x e y.

$A, B \rightarrow$ amplitude da oscilação na direção x e y, respectivamente.

Quando $\phi = 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\vec{i} + B\cos(\omega t)\vec{j}$

t	$x(t)$	$y(t)$
0	A	B
$T/4$	0	0
$T/2$	$-A$	$-B$
$3T/4$	0	0
T	A	B

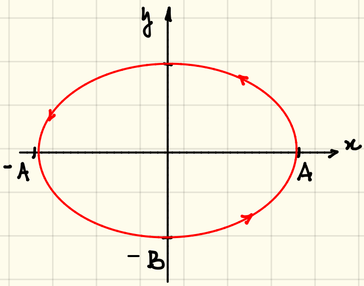


O movimento oscilatório ocorre ao longo de uma linha.

- Quando $\phi = \pi/2 \implies x(t) = A\cos\omega t$

$y(t) = B\cos(\omega t + \pi/2) = B\,\text{sen}(\omega t)$

t	$x(t)$	$y(t)$
0	A	0
$T/4$	0	B
$T/2$	$-A$	0
$3T/4$	0	$-B$
T	A	0



A trajetória é uma elipse. Se $A=B$, a trajetória é uma circunferência.
A inclinação do eixo longo da elipse muda com a fase.

- Frequências diferentes e direções perpendiculares.

O movimento é periódico apenas se os períodos $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_2 = 2\pi/\omega_2$ são comensuráveis;

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{com } n_1 \text{ e } n_2 \text{ inteiros.}$$

Se os períodos não são comensuráveis, o movimento não é periódico.

Ver links no Moodle.