Vamos revisar algumas propriedades dos números complexos porque a notação complexa será muito útil para descrevermos os movimentos periódicos e particularmente para a superposição de movimentos periódicos

1- NOTAÇÃO COMPLEXA

Quando temos um número que é a raiz quadrada de um número negativo esse número pertence ao conjunto dos números imaginários.

Exemplo: $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)9} = 3\sqrt{-1} = \pm i3$

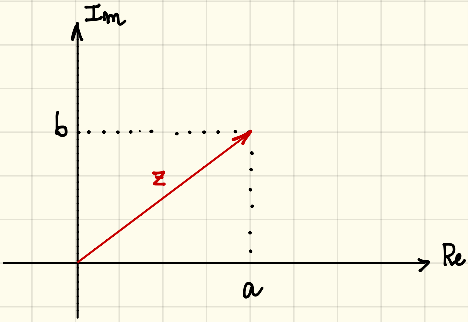
Define-se $\boxed{i^2 = -1}$ $\Rightarrow$

O conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números imaginários Z.

Um número imaginário pode possuir uma parte real e uma parte imaginária.

$$z = a + ib \qquad \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \rightarrow \text{parte real de } z \\ b = \mathrm{Im}(z) \quad\; \text{parte imaginária de } z \end{cases}$$

Os números complexos são representados no plano complexo, onde o eixo horizontal é o eixo real e o eixo vertical é o eixo imaginário.



$$|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}$$

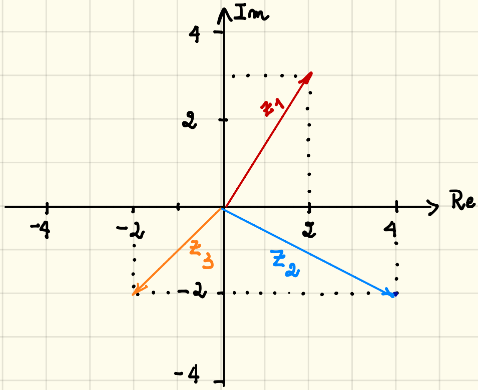
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplos:

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 4 - 2i$

$z_3 = -2 - 2i$



$|z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

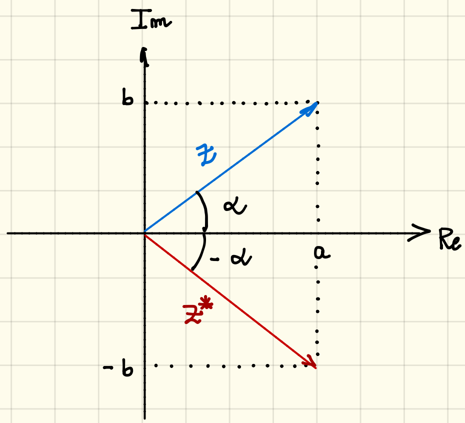
$|z_2| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$|z_3| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

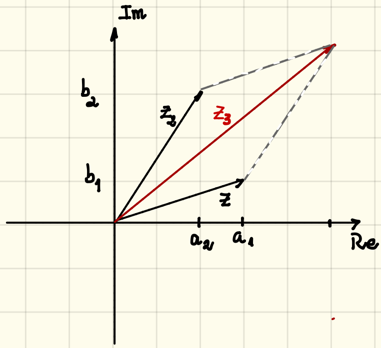
Define-se o complexo conjugado de z como z^*, de tal forma que:

$$|z|^2 = z \cdot z^*$$

Se $z = a + ib \longrightarrow z^* = a - ib$



Operações com números complexos



- SOMA

$$z_1 = a_1 + i b_1$$
$$z_2 = a_2 + i b_2$$

$$z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow z_3 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

- MULTIPLICAÇÃO

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)$$

$$z_3 = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \Rightarrow z_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i\,(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

- DIVISÃO

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \Rightarrow$ multiplica-se por: $\dfrac{z_2}{z_2^*}$

$$z_3 = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(a_1 + i b_1)(a_2 - i b_2)}{a_2^2 - b_2^2} = \frac{a_1 a_2 - i a_1 b_2 + i b_1 a_2 - i^2 b_1 b_2}{a_2^2 - b_2^2}$$

- FÓRMULA DE EULER

Considere a equação diferencial de 1ª ordem $f(x)$, $\frac{df}{dx} = \lambda f(x)$

que deve satisfazer a seguinte condição inicial: $f(0) = 1$

A função $f(x) = e^{\lambda x}$ é uma solução dessa equação diferencial pois

$$\frac{df}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \quad e \quad f(0) = 1$$

Mas há uma outra solução possível que é admitir: $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$

Vemos que $\frac{df}{dx} = -\operatorname{sen} x + i \cos x$ se $\lambda = i \Rightarrow$

$$\lambda f(x) = i\left[\cos x + i \operatorname{sen} x\right] = i \cos x + i^2 \operatorname{sen} x$$
$$= -\operatorname{sen} x + i \cos x$$

Essa função também satisfaz a condição inicial:

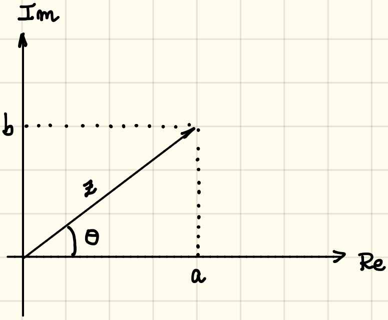
$$f(0) = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

Então $f(x) = e^{ix}$ é uma solução da equação diferencial, e temos que:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x} \Rightarrow \text{Fórmula de Euler}$$

Tomemos um número complexo

$$z = a + ib$$
$$a = |z| \cos\theta$$
$$b = |z| \operatorname{sen}\theta$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Usando a fórmula de Euler podemos escrever: $z = |z| e^{i\theta}$

As operações com número complexos ficam mais simples usando a fórmula de Euler.

$$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$$

- Produto $\longrightarrow$ $z_3 = z_1 . z_2 = |z_1| |z_2| e^{i\theta_1} . e^{i\theta_2}$

$$z_3 = |z_1| . |z_2| . e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisão $\longrightarrow$ $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} =$

$$z_3 = \frac{|z_1|}{|z_2|} . e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

2- APLICAÇÃO DA NOTAÇÃO COMPLEXA AO MOVIMENTO HARMÔNICO

O movimento periódico de um corpo na direção do eixo x é dado por:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Podemos definir uma função complexa $z(t) \Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$

$$z(t) = A[\cos(\omega t + \phi) + i\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)] = Ae^{i(\omega t + \phi)}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}[Ae^{i(\omega t + \phi)}]$$