PARTE II OSCILAÇÕES E ONDAS

Oscilações

CAMINHÕES GIGANTES PODEM PASSAR POR CIMA DE QUASE TUDO, MAS O QUE É QUE IMPEDE QUE ELES ATIREM O MOTORISTA PARA FORA DE SEU ASSENTO? CAMINHÕES GIGANTES POSSUEM AMORTECEDORES GIGANTES, QUE AJUDAM A AMORTECER A OSCILAÇÃO DO VEÍCULO, PROPICIANDO UM DIRIGIR MAIS SUAVE EM TERRENOS ACIDENTADOS OU, MESMO, SOBRE CAMINHÕES.

? Como é que um mecânico sabe quais amortecedores ele deve instalar em um caminhão gigante? (Veja o Exemplo 14-13.)

Discutimos, neste capítulo, o movimento oscilatório. A cinemática do movimento com aceleração constante é apresentada nos Capítulos 2 e 3. Neste capítulo, a cinemática e a dinâmica do movimento com aceleração proporcional ao deslocamento a partir do equilíbrio é apresentada. A palavra "oscilação" significa um balanço para frente e para trás. Oscilação ocorre quando um sistema é perturbado a partir de uma posição de equilíbrio estável. Muitos exemplos familiares existem: surfistas sobem e descem flutuando esperando uma boa onda, pêndulos de relógios balançam para lá e para cá, cordas e palhetas dos instrumentos musicais vibram.

Outros exemplos, menos familiares, são as oscilações das moléculas de ar em uma onda sonora e as oscilações das correntes elétricas em rádios, aparelhos de televisão e detectores de metal. Existem muitos outros dispositivos que dependem de oscilações para funcionar.

Neste capítulo tratamos principalmente do tipo de movimento oscilatório mais fundamental — o movimento harmônico simples. Também consideramos as oscilações amortecidas e as oscilações forçadas.

14-1 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Um tipo de movimento oscilatório comum, muito importante e básico, é o **movimento harmônico simples**, como o de um corpo sólido preso a uma mola (Figura 14-1). No equilíbrio, a mola não exerce força sobre o corpo. Quando o corpo é deslocado de uma distância x a partir de sua posição de equilíbrio, a mola exerce sobre ele uma força $-kx$, dada pela lei de Hooke:*

$$F_x = -kx \qquad \text{14-1}$$

FORÇA RESTAURADORA LINEAR

onde k é a constante de força da mola, uma medida de sua rigidez. O sinal negativo indica que a força é uma força restauradora; isto é, ela tem o sentido oposto ao do deslocamento a partir da posição de equilíbrio. Combinando a Equação 14-1 com a segunda lei de Newton ($F_x = ma_x$), temos

$$-kx = ma_x$$

ou

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \left(\text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\right) \qquad \text{14-2}$$

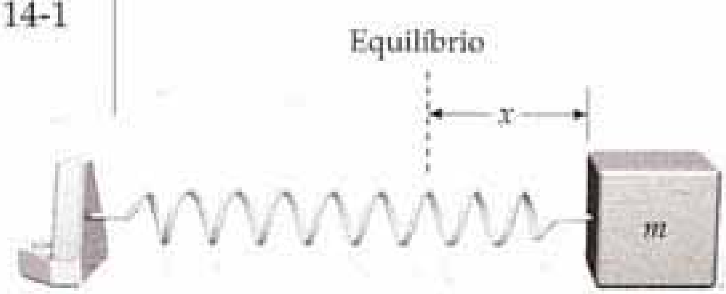


FIGURA 14-1 Massa e mola em uma superfície sem atrito. O deslocamento x, medido a partir da posição de equilíbrio, é positivo se a mola está esticada e é negativo se a mola está comprimida.

* A lei de Hooke é apresentada na Seção 5 do Capítulo 4.

A aceleração é proporcional ao deslocamento e o sinal negativo indica que a aceleração e o deslocamento possuem sentidos opostos. Esta relação é uma característica definitória e pode ser usada para identificar sistemas que exibem movimento harmônico simples:

> No movimento harmônico simples, a aceleração, e portanto, também a força resultante, são ambas proporcionais e opostas ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio.
>
> CONDIÇÕES PARA O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

O tempo que leva para um objeto deslocado executar um ciclo completo de movimento oscilatório — de um extremo ao outro e de volta ao anterior — é chamado de **período** T. O inverso do período é a **freqüência** f, que é o número de ciclos por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad 14\text{-}3$$

A unidade de freqüência é o ciclo por segundo (ciclo/s), chamado de **hertz** (Hz). Por exemplo, se o tempo para um ciclo completo de oscilação é 0,25 s, a freqüência é 4,0 Hz.

A Figura 14-2 mostra como podemos, experimentalmente, obter x *versus* t para uma massa presa a uma mola. A equação geral para esta curva é

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad 14\text{-}4$$

POSIÇÃO NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

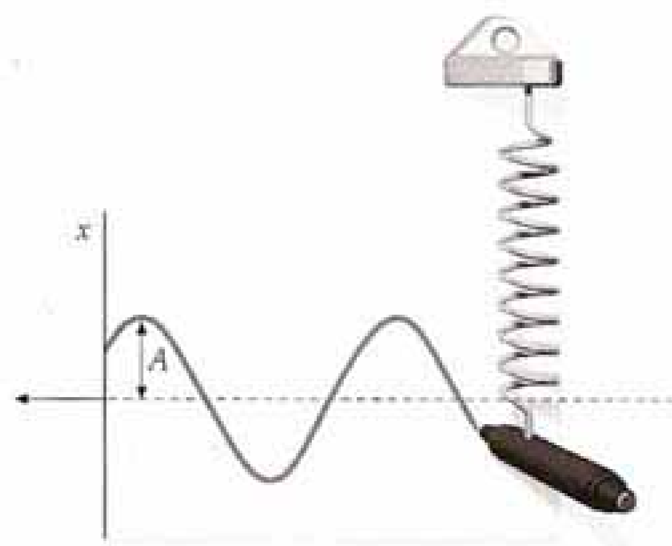


FIGURA 14-2 Uma caneta marcadora é presa à massa na mola, e o papel é puxado para a esquerda. Enquanto o papel se move com rapidez constante, a caneta traça o deslocamento x como função do tempo t. (Aqui, escolhemos x positivo quando a mola está comprimida.)

onde A, ω e δ são constantes. O deslocamento máximo $x_{máx}$ do equilíbrio é chamado de **amplitude** A. O argumento da função cosseno, $\omega t + \delta$, é a **fase** do movimento, e a constante δ é a **constante de fase**, que é igual à fase em $t = 0$. [Note que $\cos(\omega t + \delta) = \text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$; assim, expressar a equação como uma função cosseno ou como uma função seno depende simplesmente da fase da oscilação em $t = 0$.] Se temos apenas um sistema oscilante, podemos sempre escolher $t = 0$ tal que $\delta = 0$. Se temos dois sistemas oscilantes com a mesma freqüência mas com fases diferentes, podemos escolher $\delta = 0$ para um deles. As equações para os dois sistemas são, então,

$$x_1 = A_1\cos(\omega t)$$

e

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \delta)$$

Se a diferença de fase δ é 0 ou um inteiro vezes 2π, então se diz que os sistemas estão *em fase*. Se a diferença de fase δ é π ou um inteiro ímpar vezes π, então se diz que os sistemas estão *defasados* de 180°.

A oscilação do edifício do Citicorp, em Nova York (EUA), durante grandes ventanias, é reduzida por um amortecedor de massa montado em um andar superior. Ele consiste em um bloco deslizante de 400 toneladas conectado ao edifício por uma mola. A constante de força é escolhida de forma a que a freqüência natural do sistema mola–bloco seja a mesma que a freqüência natural de oscilação do prédio. Postos a se moverem pelos ventos, o prédio e o amortecedor oscilam defasados de 180° entre si, o que reduz significativamente a oscilação.

Podemos mostrar que a Equação 14-4 é uma solução da Equação 14-2, derivando x duas vezes em relação ao tempo. A primeira derivada de x dá a velocidade v_x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta) \qquad 14\text{-}5$$

VELOCIDADE NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Derivando a velocidade em relação ao tempo temos a aceleração:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) \qquad 14\text{-}6$$

Substituindo $A\cos(\omega t + \delta)$ por x (veja a Equação 14-4), fica

$$a_x = -\omega^2 x \qquad 14\text{-}7$$

ACELERAÇÃO NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Comparando $a_x = -\omega^2 x$ (Equação 14-7) com $a_x = -(k/m)x$ (Equação 14-2), vemos que $x = A\cos(\omega t + \delta)$ é uma solução de $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$ (Equação 14-2) se

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 14\text{-}8$$

A amplitude A e a constante de fase δ podem ser determinadas a partir da posição inicial x_0 e da velocidade inicial v_{0x} do sistema. Fazendo $t = 0$ em $x = A\cos(\omega t + \delta)$, temos

$$x_0 = A\cos\delta \qquad 14\text{-}9$$

De maneira similar, fazendo $t = 0$ em $v_x = dx/dt = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$, temos

$$v_{0x} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\delta \qquad 14\text{-}10$$

Usando estas equações, podemos determinar A e ω em termos de x_0, v_{0x} e ω.

O período T é o menor intervalo de tempo que satisfaz à relação

$$x(t) = x(t + T)$$

para todo t. Substituindo $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ (Equação 14-4) nesta relação, fica

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \delta) &= A\cos[\omega(t + T) + \delta] \\ &= A\cos(\omega t + \delta + \omega T) \end{aligned}$$

A função cosseno (assim como o seno) recupera o valor quando a fase é aumentada de 2π e, portanto,

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ou} \quad \omega = 2\pi\left(\frac{1}{T}\right)$$

A constante ω é chamada de **freqüência angular**. Ela possui unidades de radianos por segundo e dimensões de inverso do tempo, assim como a rapidez angular, que também é denotada por ω. Substituindo ω por $2\pi/T$ na Equação 14-4, fica

$$x = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right)$$

Podemos ver, por inspeção, que cada vez que o tempo t aumenta de T, a razão t/T aumenta de 1, a fase aumenta de 2π e um ciclo do movimento é completado.

A freqüência se relaciona com a freqüência angular da forma

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi f \qquad 14\text{-}11$$

Como $\omega = \sqrt{k/m}$, a freqüência e o período de um corpo preso a uma mola se relacionam com a constante de força k e a massa m da forma

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 14\text{-}12$$

A freqüência aumenta com o aumento de k (rigidez da mola) e diminui com o aumento da massa. A Equação 14-12 fornece uma maneira de se medir a massa inercial de um astronauta em um ambiente "sem gravidade".

Veja o Tutorial Matemático *para mais informações sobre*
Trigonometria

O astronauta Alan L. Bean mede sua massa corporal durante a segunda missão do *Skylab*, sentando em um assento preso a uma mola e oscilando para frente e para trás. A massa total de astronauta mais assento está relacionada à freqüência de vibração pela Equação 14-12. *(NASA.)*

PROBLEMA PRÁTICO 14-1

Um corpo está preso a uma mola que tem uma constante de força $k = 400$ N/m. (*a*) Determine a freqüência e o período do movimento do corpo quando ele é deslocado do equilíbrio e largado. (*b*) Repita a Parte (*a*), agora com um corpo de 1,6 kg preso à mola, em vez do corpo de 0,80 kg. *Dica: Reveja primeiro o Exemplo 14-4.*

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolvendo Problemas de Movimento Harmônico Simples

SITUAÇÃO Escolha a origem do eixo x na posição de equilíbrio. Para uma mola, escolha a orientação $+x$ de forma que x seja positivo quando a mola está distendida.

SOLUÇÃO Não use as equações cinemáticas para aceleração constante. Você deve usar as equações desenvolvidas para o movimento harmônico simples.

CHECAGEM Certifique-se de que sua calculadora está no modo apropriado (graus ou radianos) ao calcular funções trigonométricas e seus argumentos.

Exemplo 14-1 Surfando

Você está sentado na prancha de surfe, que sobe e desce ao flutuar sobre algumas ondas. O deslocamento vertical da prancha y é dado por

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(*a*) Determine a amplitude, a freqüência angular, a constante de fase, a freqüência e o período do movimento. (*b*) Onde está a prancha, em $t = 1{,}0$ s? (*c*) Determine a velocidade e a aceleração, como funções do tempo t. (*d*) Determine os valores iniciais da posição, da velocidade e da aceleração da prancha.

SITUAÇÃO As quantidades a serem determinadas em (*a*) são encontradas comparando-se a equação de movimento

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

com a equação-padrão do movimento harmônico simples, Equação 14-4. A velocidade e a aceleração são encontradas derivando-se $y(t)$.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Compare esta equação com $y = A\cos(\omega t + \delta)$ (Equação 14-4) para obter A, ω e δ:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1{,}2\text{ m}} \quad \omega = \boxed{0{,}50\text{ rad/s}} \quad \delta = \boxed{\pi/6\text{ rad}}$$

2. A freqüência e o período são determinados a partir de ω:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}50\text{ rad/s}}{2\pi} = 0{,}0796\text{ Hz} = \boxed{0{,}080\text{ Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}0796\text{ Hz}} = 12{,}6\text{ s} = \boxed{13\text{ s}}$$

(*b*) Faça $t = 1{,}0$ s para determinar a posição da prancha acima do nível médio do mar:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})(1{,}0\text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{0{,}62\text{ m}}$$

(*c*) A velocidade e a aceleração são obtidas derivando-se a posição em relação ao tempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \delta)] = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

$$= -(0{,}50\text{ rad/s})(1{,}2\text{ m})\,\text{sen}\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \boxed{-(0{,}60\text{ m/s})\,\text{sen}\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)] = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

$$= -(0{,}50\text{ rad/s})^2(1{,}2\text{ m})\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \boxed{-(0{,}30\text{ m/s}^2)\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]}$$

(*d*) Faça $t = 0$ para determinar y_0, v_{0y} e a_{0y}:

$$y_0 = (1{,}2\text{ m})\cos\frac{\pi}{6} = 1{,}04 = \boxed{1{,}0\text{ m}}$$

$$v_{0y} = -(0{,}60\text{ m/s})\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}30\text{ m/s}}$$

$$a_{0y} = -(0{,}30\text{ m/s}^2)\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}26\text{ m/s}^2}$$

CHECAGEM Podemos checar a plausibilidade dos resultados da Parte (*d*) usando $a_y = -\omega^2 y$ (Equação 14-7) em $t = 0$, com $y = 1{,}04$ m e $\omega = 0{,}50$ rad/s. Substituindo na Equação 14-7, obtém-se $a_{0y} = -\omega^2 y_0 = -(0{,}50 \text{ rad/s})^2(1{,}04 \text{ m}) = -0{,}26 \text{ m/s}^2$, o mesmo que o terceiro resultado da Parte (*d*).

A Figura 14-3 mostra duas massas idênticas presas a molas idênticas e colocadas sobre uma superfície horizontal sem atrito. A mola presa ao corpo 2 está distendida de 10 cm e a mola presa ao corpo 1 está distendida de 5 cm. Se elas são liberadas ao mesmo tempo, qual dos dois corpos chega primeiro à posição de equilíbrio?

De acordo com a Equação 14-2, o período depende apenas de k e de m, e não da amplitude. Como k e m são os mesmos para os dois sistemas, os períodos são iguais. Assim, os corpos atingem a posição de equilíbrio ao mesmo tempo. O segundo corpo percorre o dobro da distância para chegar ao ponto de equilíbrio, mas ele também terá o dobro da velocidade, em cada instante. A Figura 14-4 mostra um esboço das funções posição dos dois corpos. Este esboço ilustra uma importante propriedade geral do movimento harmônico simples:

> A freqüência (e, portanto, também o período) do movimento harmônico simples é independente da amplitude.

O fato de a freqüência no movimento harmônico simples ser independente da amplitude leva a importantes conseqüências em muitos campos. Em música, por exemplo, ele significa que quando uma nota é tocada no piano, a altura (que corresponde à freqüência) não depende da intensidade com que a nota é tocada (que corresponde à amplitude).† Se variações de amplitude produzissem um grande efeito sobre a freqüência, então os instrumentos musicais não seriam de utilidade.

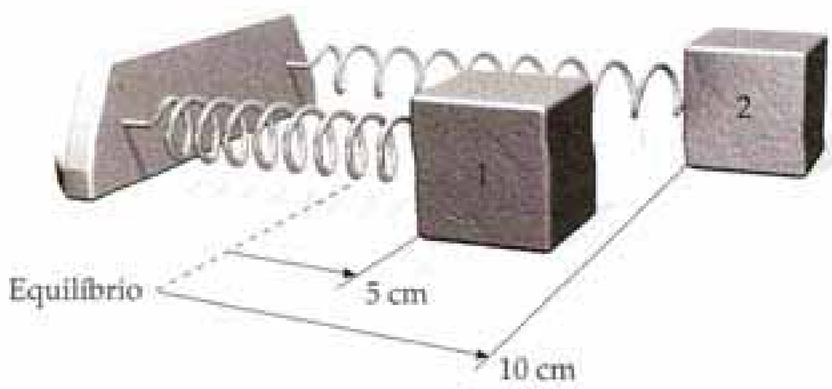


FIGURA 14-3 Dois sistemas massa–mola idênticos.

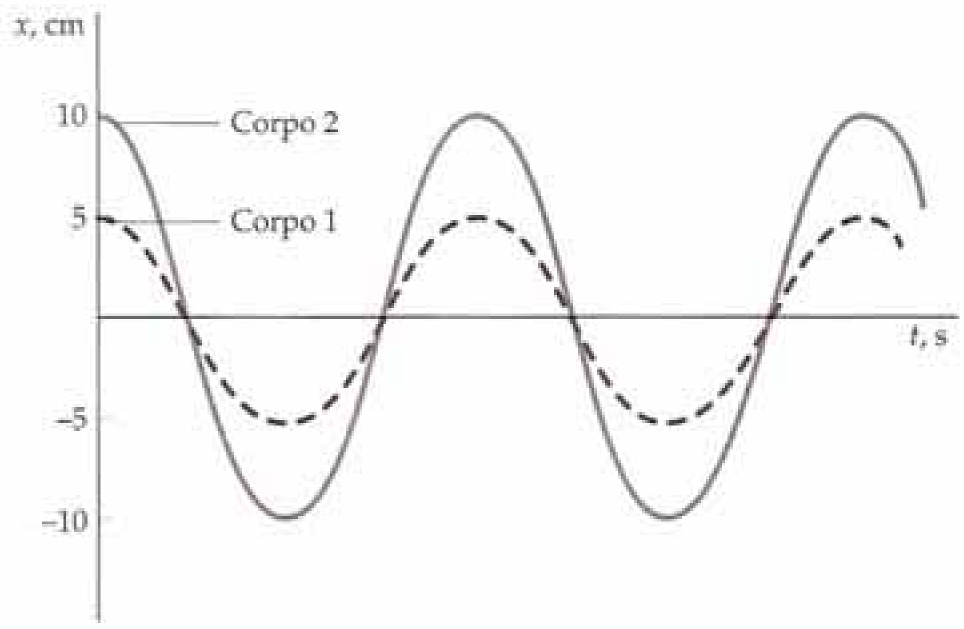


FIGURA 14-4 Gráficos de x *versus* t para os sistemas da Figura 14-3. Ambos atingem suas posições de equilíbrio ao mesmo tempo.

Exemplo 14-2 Um Corpo Oscilando

Um corpo oscila com uma freqüência angular $\omega = 8{,}0$ rad/s. Em $t = 0$, o corpo está em $x = 4{,}0$ cm com uma velocidade inicial $v_x = -25$ cm/s. (*a*) Determine a amplitude e a constante de fase do movimento. (*b*) Escreva x como função do tempo.

SITUAÇÃO A posição e a velocidade iniciais nos dão duas equações que nos permitem determinar a amplitude A e a constante de fase δ.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A posição e a velocidade iniciais estão relacionadas com a amplitude e a constante de fase. A posição é dada pela Equação 14-4. A velocidade é determinada derivando-se a posição em relação ao tempo:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{e}$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

2. Em $t = 0$ a posição e a velocidade são:

$$x_0 = A\cos\delta \quad \text{e} \quad v_{0x} = -\omega A \operatorname{sen}\delta$$

3. Divida estas equações para eliminar A:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\delta}{A\cos\delta} = -\omega\tan\delta$$

† Para muitos instrumentos musicais, existe uma leve dependência da freqüência com a amplitude. A vibração da palheta de um oboé, por exemplo, não é exatamente harmônica simples; assim, sua altura depende levemente da intensidade do sopro. Este efeito pode ser corrigido por um músico habilidoso.

4. Atribuindo-se os valores numéricos, temos δ:

$$\tan\delta = -\frac{v_{0x}}{\omega x_0} \quad \text{logo}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \tan^{-1}\left[-\frac{-25\text{ cm/s}}{(8{,}0\text{ rad/s})(4{,}0\text{ cm})}\right]$$

$$= 0{,}663\text{ rad} = \boxed{0{,}66\text{ rad}}$$

5. A amplitude pode ser determinada usando-se tanto a equação para x_0 quanto a equação para v_{0x}. Aqui, usamos x_0:

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{4{,}0\text{ cm}}{\cos 0{,}663} = \boxed{5{,}1\text{ cm}}$$

(*b*) Uma comparação com a Equação 14-4 nos leva a x:

$$x = \boxed{(5{,}1\text{ cm})\cos[(8{,}0\text{ s}^{-1})t + 0{,}66]}$$

CHECAGEM Para ver se o resultado da Parte (*b*) ($x = (5{,}1\text{ cm})\cos[(8{,}0\text{ s}^{-1})t + 0{,}66]$) é plausível, fazemos t igual a zero e verificamos se $x = 4{,}0$ cm. Isto é, $x = (5{,}1\text{ cm})\cos[(0) + 0{,}66] = 4{,}0$ cm. Assim, o resultado da Parte (*b*) é plausível.

Se a constante de fase δ é 0, as Equações 14-4, 14-5 e 14-6 se tornam

$$x = A\cos\omega t \qquad \text{14-13}a$$

$$v_x = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{14-13}b$$

e

$$a_x = -\omega^2 A\cos\omega t \qquad \text{14-13}c$$

Estas funções são plotadas na Figura 14-5.

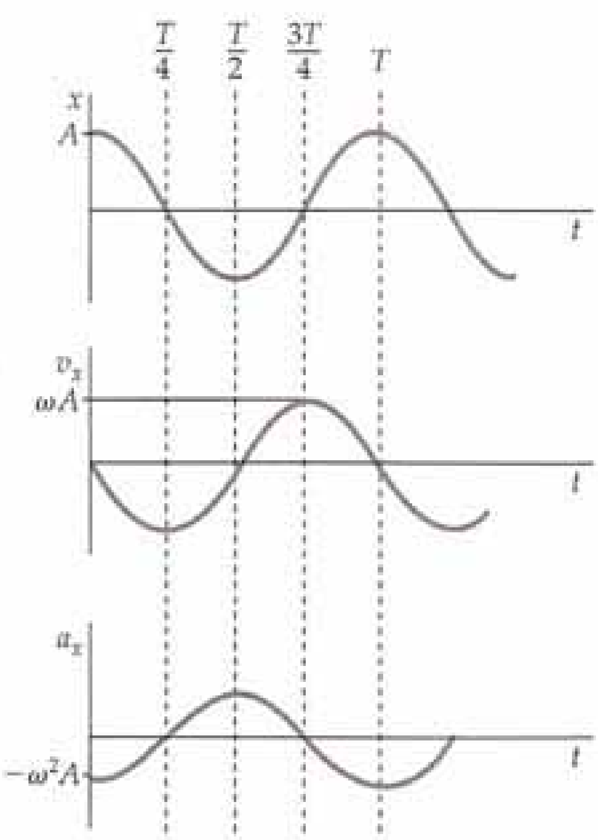


FIGURA 14-5 Gráficos de x, v_x e a_x como funções do tempo t, para $\delta = 0$. Em $t = 0$, o deslocamento é máximo, a velocidade é zero e a aceleração **é negativa** e igual a $-\omega^2 A$. A velocidade é negativa enquanto o corpo se move de volta à sua posição de equilíbrio. Após um quarto de período ($t = T/4$), o corpo está em equilíbrio, $x = 0$, $a_x = 0$ e a velocidade tem seu valor mínimo de $-\omega A$. Em $t = T/2$, o deslocamento é $-A$, a velocidade é novamente zero e a aceleração é $+\omega^2 A$. Em $t = 3T/4$, $x = 0$, $a_x = 0$ e $v_x = +\omega A$.

Exemplo 14-3 Um Bloco em uma Mola — *Tente Você Mesmo*

Um bloco de 2,00 kg está preso a uma mola, como na Figura 14-1. A constante de força da mola é $k = 196$ N/m. O bloco é afastado 5,00 cm de sua posição de equilíbrio e liberado em $t = 0$. (*a*) Determine a freqüência angular ω, a freqüência f e o período T. (*b*) Escreva x como função do tempo.

SITUAÇÃO Para a Parte (*a*), use as Equações 14-8 e 14-12. Para a Parte (*b*), use a Equação 14-4.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	**Respostas**
(*a*) 1. Calcule ω de $\omega = \sqrt{k/m}$.	$\omega = \boxed{9{,}90\text{ rad/s}}$
2. Use seu resultado para determinar f e T.	$f = \boxed{1{,}58\text{ Hz}}$ $T = \boxed{0{,}635\text{ s}}$
3. Determine A e δ das condições iniciais.	$A = 5{,}00$ cm $\delta = 0{,}00$
(*b*) Escreva $x(t)$ usando seus resultados para A, ω e δ.	$x = \boxed{(5{,}00\text{ cm})\cos[(9{,}90\text{ s}^{-1})t]}$

CHECAGEM O bloco foi largado do repouso, logo esperamos que a velocidade em $t = 0$ seja zero. Para verificar que nosso resultado da Parte (*b*) é correto, derivamos a expressão $x = (5{,}00\text{ cm})\cos[(9{,}90\text{ s}^{-1})t]$ e calculamos o resultado em $t = 0$. Isto é, $v_x(t) = dx/dt = -(4{,}95\text{ cm/s})\,\text{sen}[(9{,}90\text{ s}^{-1})t]$. Para $t = 0$, isto vale $v_x(0) = -(4{,}95\text{ cm/s})\,\text{sen}(0)$, como esperado.

Exemplo 14-4 Rapidez e Aceleração de um Corpo em uma Mola

Seja um corpo em uma mola, com a posição dada por $x = (5{,}00\text{ cm})\cos(9{,}90\text{ s}^{-1}t)$. (*a*) Qual é a rapidez máxima do corpo? (*b*) Quando, depois de $t = 0$, esta rapidez máxima ocorre pela primeira vez? (*c*) Qual é a aceleração máxima do corpo? (*d*) Quando, depois de $t = 0$, ocorre pela primeira vez uma aceleração de magnitude máxima?

SITUAÇÃO Como o corpo é largado do repouso, $\delta = 0$, e a posição, a velocidade e a aceleração são dadas pelas Equações 14-13*a*, *b* e *c*.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A Equação 14-13*a*, com $\delta = 0$, fornece a posição. A velocidade é obtida derivando-se a posição em relação ao tempo:

$$x = A\cos\omega t$$

$$\text{logo}\quad v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t$$

2. A rapidez máxima ocorre quando $|\text{sen}\,\omega t| = 1$:

$$v = \omega A|\text{sen}\,\omega t|$$

$$\text{logo}\quad v_{\text{máx}} = \omega A = (9{,}90\text{ rad/s})(5{,}00\text{ cm}) = \boxed{49{,}5\text{ cm/s}}$$

(*b*) 1. $|\text{sen}\,\omega t| = 1$ ocorre pela primeira vez quando $\omega t = \pi/2$:

$$|\text{sen}\,\omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

2. Resolva para t quando $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9{,}90\text{ s}^{-1})} = \boxed{0{,}159\text{ s}}$$

(*c*) 1. Determinamos a aceleração derivando a velocidade, obtida no passo 1 da Parte (*a*):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t$$

2. A aceleração máxima corresponde a $\cos\omega t = -1$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (9{,}90\text{ rad/s})^2(5{,}00\text{ cm}) = \boxed{490\text{ cm/s}^2 \approx \tfrac{1}{2}g}$$

(*d*) A magnitude da aceleração é máxima quando $|\cos\omega t| = 1$, o que ocorre quando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9{,}90\text{ s}^{-1}} = \boxed{0{,}317\text{ s}}$$

CHECAGEM Esperamos que $|a_x|$ atinja o primeiro máximo, após $t = 0$, quando x atingir seu primeiro mínimo, e esperamos que x atinja seu primeiro máximo um meio ciclo após a liberação do corpo. Isto é, esperamos $|a_x|$ máximo quando $t = \frac{1}{2}T$, onde T é o período. O período e a freqüência angular estão relacionados por $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (Equação 14-11). Substituindo ω por $2\pi/T$ em nosso resultado da Parte (*d*), temos $t = \pi/(2\pi/T) = \frac{1}{2}T$, como esperado.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E MOVIMENTO CIRCULAR

Existe uma relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular de rapidez constante. Imagine uma partícula se movendo com rapidez constante v em um círculo de raio A (Figura 14-6*a*). Seu deslocamento angular em relação à orientação $+x$ é dada por

$$\theta = \omega t + \delta \qquad 14\text{-}14$$

onde δ é o deslocamento angular no tempo $t = 0$ e $\omega = v/A$ é a rapidez angular da partícula. A componente x da posição da partícula (Figura 14-6*b*) é

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

que é a mesma Equação 14-4 para o movimento harmônico simples.

Quando uma partícula se move com rapidez constante em um círculo, sua projeção sobre um diâmetro do círculo descreve um movimento harmônico simples (veja a Figura 14-6).

A rapidez de uma partícula que se move em um círculo é $r\omega$, onde r é o raio. Para a partícula da Figura 14-6*b*, $r = A$, logo sua rapidez é $A\omega$. A projeção do vetor velocidade sobre o eixo x é $v_x = -v \operatorname{sen} \theta$. Substituindo v e θ, temos

$$v_x = -v \operatorname{sen} \theta = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

que é a mesma Equação 14-5 para o movimento harmônico simples. A relação entre o movimento circular e o movimento harmônico simples é mostrada de forma muito bonita pela trilha de bolhas produzida por uma hélice de barco.

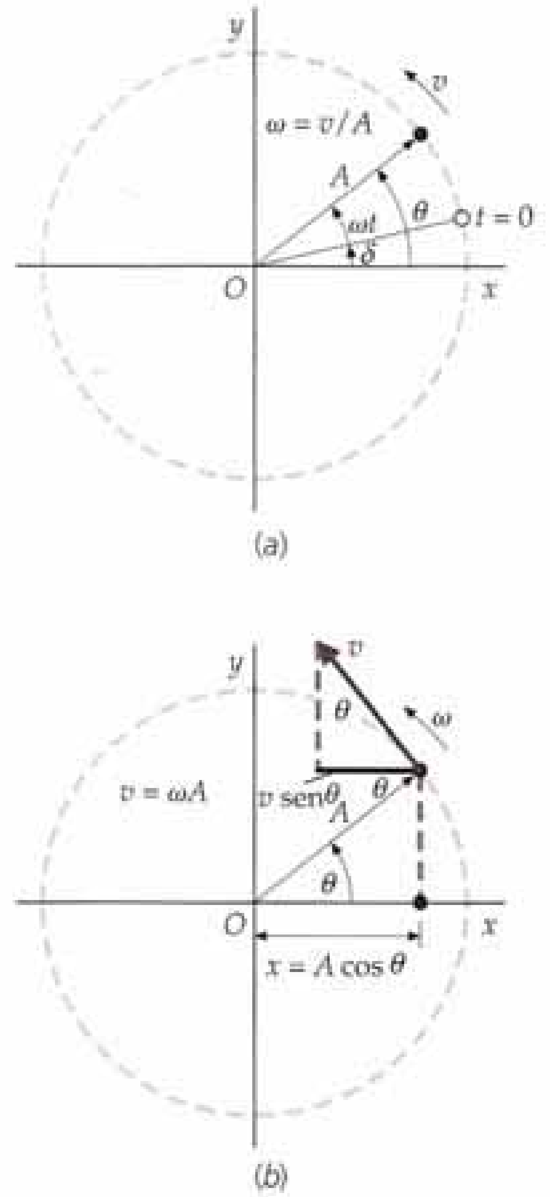


FIGURA 14-6 Uma partícula se move em uma trajetória circular com rapidez constante. (*a*) A componente x da posição da partícula descreve um movimento harmônico simples, e (*b*) a componente x da velocidade da partícula é a velocidade de um movimento harmônico simples.

14-2 ENERGIA NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Quando um corpo em uma mola executa um movimento harmônico simples, a energia potencial e a energia cinética do sistema variam com o tempo. Sua soma, a energia mecânica total $E = K + U$, é constante. Seja um corpo distante x do equilíbrio, sob a ação de uma força restauradora $-kx$. A energia potencial do sistema é

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Esta é a Equação 7-4. Para o movimento harmônico simples, $x = A\cos(\omega t + \delta)$. Substituindo, fica

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \qquad \text{14-15}$$

ENERGIA POTENCIAL NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

A energia cinética do sistema é

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

onde m é a massa do corpo e v é sua rapidez. Para o movimento harmônico simples, $v_x = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$. Substituindo, fica

$$K = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \delta)$$

Então, usando $\omega^2 = k/m$,

$$K = \tfrac{1}{2}kA^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \delta) \qquad \text{14-16}$$

ENERGIA CINÉTICA NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

A energia mecânica total E é a soma das energias potencial e cinética:

$$\begin{aligned} E = U + K &= \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2}k\,A\operatorname{sen}^2(\omega t + \delta) \\ &= \tfrac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t + \delta) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \delta)] \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$,

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \text{14-17}$$

ENERGIA MECÂNICA TOTAL NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Esta equação revela uma importante propriedade geral do movimento harmônico simples:

A energia mecânica total no movimento harmônico simples é proporcional ao quadrado da amplitude.

Para um corpo em seu deslocamento máximo, a energia total é toda ela energia potencial. À medida que o corpo se move para sua posição de equilíbrio, a energia cinética

3. Substitua os valores dados para determinar E:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 = \frac{1}{2}(3{,}0\text{ kg})\left(\frac{2\pi}{2{,}0\text{ s}}\right)^2(0{,}040\text{ m})^2$$
$$= 2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J} = \boxed{2{,}4 \times 10^{-2}\text{ J}}$$

(*b*) Para encontrar $v_{máx}$, faça a energia cinética igual à energia total e resolva para v:

$\frac{1}{2}mv^2_{máx} = E$

logo $\quad v_{máx} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J})}{3{,}0\text{ kg}}} = 0{,}126\text{ m/s} = \boxed{0{,}13\text{ m/s}}$

(*c*) 1. A conservação da energia relaciona a posição x com a rapidez v:

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

2. Substitua $v = \frac{1}{2}v_{máx}$ e resolva para x_1. É conveniente encontrar x em termos de E e, depois, escrever $E = \frac{1}{2}KA^2$ para obter uma expressão de x em termos de A:

$E = \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}v_{máx})^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}mv^2_{máx}) + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}kx_1^2$

logo $\quad \frac{1}{2}kx_1^2 = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E$

e $\quad x_1 = \pm\sqrt{\frac{3E}{2k}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(4{,}0\text{ cm}) = \boxed{\pm 3{,}5\text{ cm}}$$

CHECAGEM Como esperado, o resultado do passo 2 da Parte (*c*) tem dois valores, um com a mola distendida, o outro com a mola comprimida. Também, esperamos que estes valores sejam iguais, a menos do sinal. Além disso, o resultado positivo é menor do que 4,0 cm (a amplitude vale 4,0 cm), como se deve esperar.

PROBLEMA PRÁTICO 14-2 Calcule ω para este exemplo e determine $v_{máx}$ a partir de $v_{máx} = \omega A$.

PROBLEMA PRÁTICO 14-3 Um corpo de 2,00 kg de massa está preso a uma mola que tem uma constante de força igual a 40,0 N/m. O corpo se move a 25,0 cm/s quando passa pela posição de equilíbrio. (*a*) Qual é a energia total do corpo? (*b*) Qual é a amplitude do movimento?

*MOVIMENTO GERAL PRÓXIMO DO EQUILÍBRIO

O movimento harmônico simples ocorre tipicamente quando uma partícula é ligeiramente deslocada de sua posição de equilíbrio estável. A Figura 14-9 é um gráfico da energia potencial U como função de x para uma força que tem uma posição de equilíbrio estável e uma posição de equilíbrio instável. Como discutido no Capítulo 7, o máximo de energia potencial em x_2, na Figura 14-9, corresponde a um equilíbrio instável, enquanto o mínimo em x_1 corresponde a um equilíbrio estável. Muitas curvas suaves, com um mínimo como o da Figura 14-9, podem ser bem aproximadas, próximo ao mínimo, por uma parábola. A curva tracejada nesta figura é uma curva parabólica que coincide aproximadamente com U próximo do ponto de equilíbrio. A equação geral para uma parábola que tem um mínimo no ponto x_1 pode ser escrita como

$$U = A + B(x - x_1)^2 \tag{14-19}$$

onde A e B são constantes. A constante A é o valor de U no ponto de equilíbrio $x = x_1$. A força se relaciona com a curva de energia potencial através de $F_x = -dU/dx$. Então,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1)$$

Se fazemos $2B = k$, esta equação se reduz a

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1) \tag{14-20}$$

De acordo com a Equação 14-20, a força é proporcional ao deslocamento do equilíbrio e orientada no sentido oposto, de forma que o movimento é harmônico simples. A Figura 14-9 mostra um gráfico da função energia potencial, $U(x)$, para um sistema com uma posição de equilíbrio estável em $x = x_1$. A Figura 14-10 mostra uma função energia potencial que tem uma posição de equilíbrio estável em $x = 0$. O sistema, para esta função, é uma pequena partícula oscilando para frente e para trás no fundo de um recipiente esférico sem atrito.

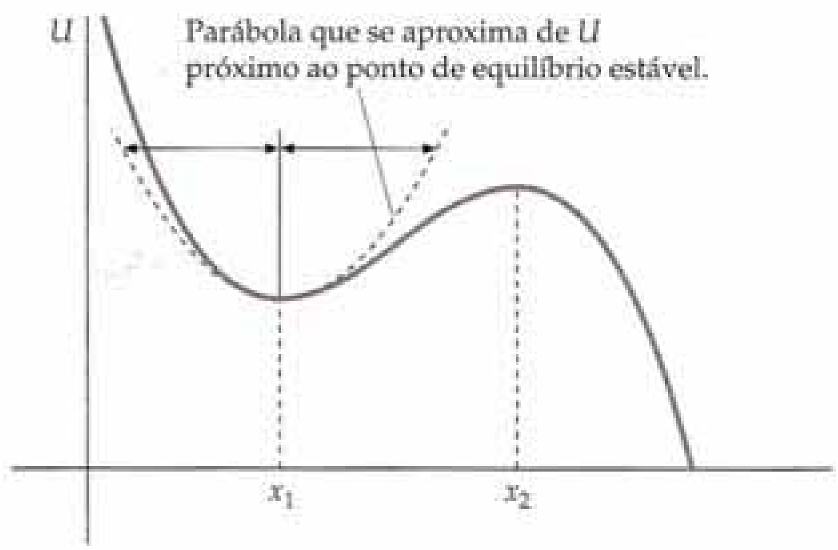


FIGURA 14-9 Gráfico de U *versus* x para uma força que possui uma posição de equilíbrio estável (x_1) e uma posição de equilíbrio instável (x_2).

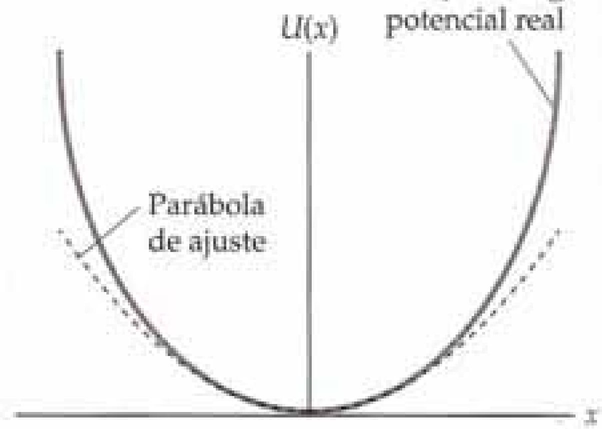


FIGURA 14-10 Gráfico de U *versus* x para uma pequena partícula oscilando para frente e para trás no fundo de um recipiente esférico.

14-3 ALGUNS SISTEMAS OSCILANTES

CORPO EM MOLA VERTICAL

Quando um corpo é pendurado em uma mola vertical existe uma força mg, para baixo, além da força da mola (Figura 14-11). Se escolhemos o sentido de y positivo para baixo, então a força da mola sobre o corpo é $-ky$, onde y é a distensão da mola. A força resultante sobre o corpo é, então,

$$\Sigma F_y = -ky + mg \tag{14-21}$$

Podemos simplificar esta equação mudando para uma nova variável $y' = y - y_0$, onde $y_0 = mg/k$ é o quanto a mola é distendida quando o corpo está em equilíbrio. Substituindo y por $y' + y_0$, fica

$$\Sigma F_y = -k(y' + y_0) + mg$$

Mas $ky_0 = mg$, de modo que

$$\Sigma F_y = -ky' \tag{14-22}$$

A segunda lei de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos dá

$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

No entanto, $y = y' + y_0$, onde $y_0 = mg/k$ é uma constante. Assim, $d^2y/dt^2 = d^2y'/dt^2$, de modo que

$$-ky' = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

Rearranjando,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

que é o mesmo que a Equação 14-2, com y' no lugar de y. Ela tem a já familiar solução

$$y' = A\cos(\omega t + \delta)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Assim, o efeito da força gravitacional mg é meramente o de deslocar a posição de equilíbrio de $y = 0$ para $y' = 0$. Quando o corpo é deslocado de y' de sua posição de equilíbrio, a força resultante é $-ky'$. O corpo oscila em torno desta posição de equilíbrio com uma freqüência angular $\omega = \sqrt{k/m}$, a mesma freqüência angular de um corpo em uma mola horizontal.

Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza é independente do caminho. Tanto a força da mola quanto a força da gravidade são conservativas, e a soma destas forças (Equações 14-21 e 14-22) também é conservativa. A função energia potencial U associada à soma destas forças é o negativo do trabalho realizado mais uma constante arbitrária. Isto é,

$$U = -\int -ky'dy' = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

onde a constante de integração U_0 é o valor de U na posição de equilíbrio ($y' = 0$). Assim,

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0 \tag{14-23}$$

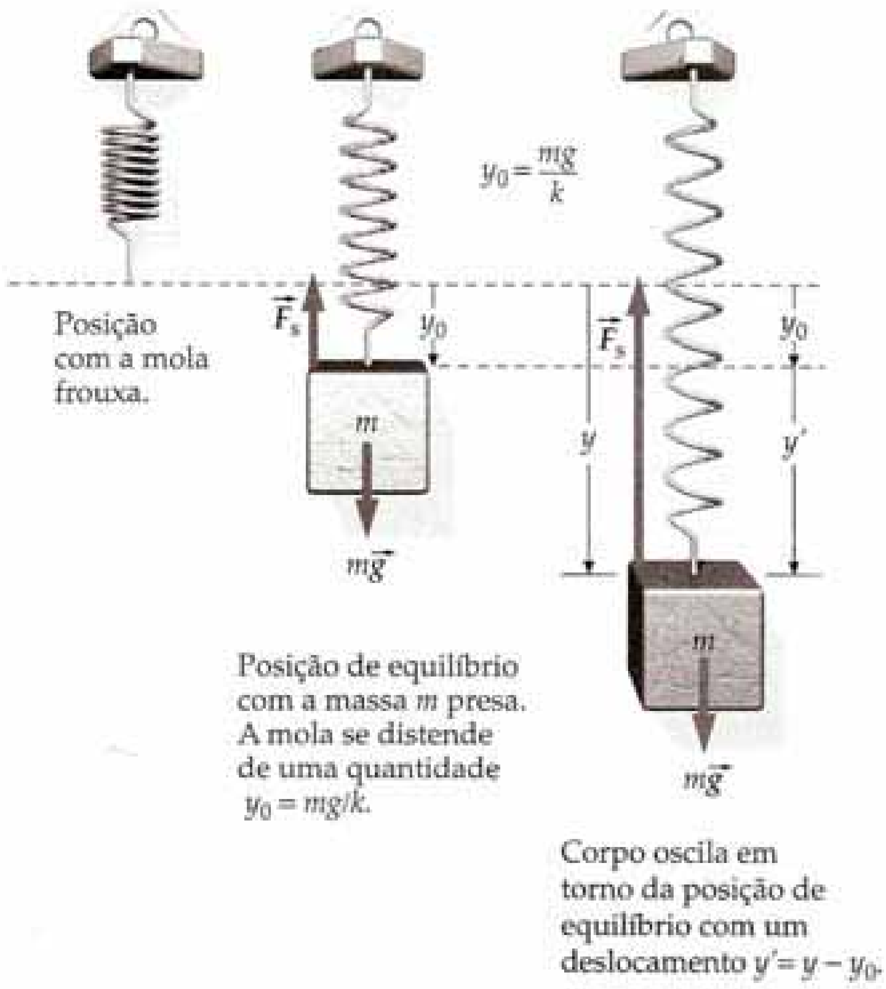


FIGURA 14-11 A segunda lei de Newton para o movimento de uma massa em uma mola vertical é grandemente simplificada se o deslocamento (y') é medido a partir da posição de equilíbrio da mola com a massa presa.

Exemplo 14-6 Molas de Papel *Rico em Contexto*

Você está ensinando suas sobrinhas a fazer molas de papel para a decoração de festas. Uma das sobrinhas faz uma mola de papel. A mola é distendida de 8 cm e tem suspensa apenas uma folha colorida de papel. Você deseja que as decorações oscilem a aproximadamente 1,0 ciclo/s. Quantas folhas coloridas de papel devem ser usadas nessa mola decorativa para que a oscilação seja de 1,0 ciclo/s?

SITUAÇÃO A freqüência depende da razão entre a constante de força e a massa suspensa (Equação 14-12), mas você não conhece nenhum dos dois. No entanto, a lei de Hooke (Equação 14-1) pode ser usada para se determinar a razão desejada, a partir dos dados informados.

SOLUÇÃO

1. Escreva a freqüência em termos da constante de força k e da massa M (Equação 14-12), onde M é a massa de N folhas. Precisamos determinar N:
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

2. A mola se distende de $y_0 = 8{,}0$ cm quando uma única folha de massa m está suspensa:
$$ky_0 = mg \quad \text{logo} \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{y_0}$$

3. A massa de N folhas é igual a N vezes a massa de uma única folha:
$$M = Nm$$

4. Usando os resultados dos passos 2 e 3, resolva para k/M:
$$\frac{k}{M} = \frac{k}{Nm} = \frac{1}{N}\frac{g}{y_0}$$

5. Substitua o resultado do passo 4 no resultado do passo 1 e explicite N:
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{g}{y_0}}$$
$$\text{logo} \quad N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{4\pi^2(1{,}0\ \text{Hz})^2(0{,}080\ \text{m})} = 3{,}1$$

$\boxed{\text{São necessárias três folhas.}}$

CHECAGEM Três ou mais folhas de papel decorativo parece plausível. Cinqüenta ou cem folhas provavelmente destruiriam uma mola de papel.

INDO ALÉM Note que não precisamos utilizar o valor de m ou de k neste exemplo, porque a freqüência depende da razão k/m, que é igual a g/y_0. Além disso, desprezamos a massa da própria mola. Esta massa provavelmente não é desprezível, em comparação com a massa de algumas folhas de papel decorativo, de modo que nosso resultado do passo 5 é apenas aproximado.

PROBLEMA PRÁTICO 14-4 De quanto é distendida a mola de papel quando três folhas de papel decorativo são suspensas nela, ficando em equilíbrio?

Exemplo 14-7 Uma Bolinha sobre um Bloco

Um bloco, preso firmemente a uma mola, oscila verticalmente com uma freqüência de 4,00 Hz e uma amplitude de 7,00 cm. Uma bolinha é colocada em cima do bloco oscilante assim que ele chega ao ponto mais baixo. Suponha que a massa da bolinha seja tão pequena que seu efeito sobre o movimento do bloco seja desprezível. Para qual deslocamento, a partir da posição de equilíbrio, a bolinha perde contato com o bloco?

SITUAÇÃO As forças sobre a bolinha são seu peso mg, para baixo, e a força normal, para cima, exercida pelo bloco. A magnitude desta força normal varia com a aceleração. Enquanto o bloco se move para cima, *a partir do equilíbrio*, sua aceleração e a aceleração da bolinha apontam *para baixo* e aumentam de magnitude. Quando a aceleração chegar a g, para baixo, a força normal será zero. Se a aceleração do bloco, para baixo, se tornar ligeiramente maior, a bolinha abandonará o bloco.

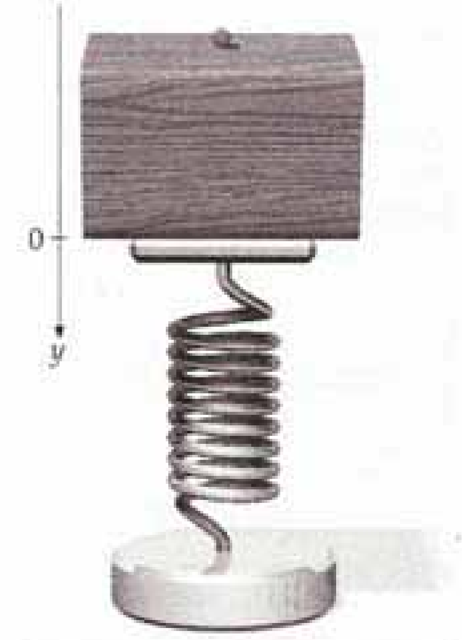


FIGURA 14-12

SOLUÇÃO

1. Faça um esboço do sistema (Figura 14-12). Inclua um eixo coordenado y com a origem na posição de equilíbrio e com o sentido positivo para baixo:

2. Procuramos o valor de y quando a aceleração é g para baixo. Use a Equação 14-7:
$$a_y = -\omega^2 y$$
$$g = -\omega^2 y$$

3. Substitua ω por $2\pi f$ e explicite y:

$$g = -(2\pi f)^2 y$$

logo $$y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = -\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{[2\pi(4{,}00\ \text{Hz})]^2} = -0{,}0155\ \text{m} = \boxed{-1{,}55\ \text{cm}}$$

CHECAGEM A bolinha abandona o bloco quando y é negativo, o que ocorre quando ela está acima da posição de equilíbrio, já que a orientação escolhida como positiva é para baixo. Isto era de se esperar.

O PÊNDULO SIMPLES

Um pêndulo simples consiste em um fio de comprimento L preso a um peso de massa m. Quando o peso é largado de um ângulo inicial ϕ_0 com a vertical, ele balança para lá e para cá, com um período T. As unidades de comprimento, massa e g são m, kg e m/s^2, respectivamente. Se dividirmos L por g, os metros cancelam e ficamos com o quadrado do segundo, o que nos sugere a forma $\sqrt{L/g}$ para o período. Se a fórmula do período contivesse a massa, então a unidade kg deveria ser cancelada por alguma outra grandeza. Mas não existe combinação de L e g que cancele unidades de massa. Então, o período não pode depender da massa do corpo pendurado ao fio. Como o ângulo inicial ϕ_0 é adimensional, não podemos dizer se ele é, ou não é, um fator do período. Veremos, a seguir, que, para ϕ_0 pequeno, o período é dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

As forças sobre o corpo pendurado são seu peso $m\vec{g}$ e a tensão do fio $\vec{T}$ (Figura 14-13). A um ângulo ϕ com a vertical, o peso tem componentes $mg\cos\phi$, ao longo do fio, e $mg\ \text{sen}\ \phi$, tangente ao arco circular e apontando no sentido da diminuição de ϕ. Usando componentes tangenciais, a segunda lei de Newton ($\Sigma F_t = ma_t$) é escrita como

$$-mg\ \text{sen}\ \phi = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{14-24}$$

onde o comprimento de arco s se relaciona com o ângulo ϕ através de $s = L\phi$. Derivando duas vezes os dois lados de $s = L\phi$, temos

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Substituindo d^2s/dt^2, na Equação 14-24, por $Ld^2\phi/dt^2$ e rearranjando, fica

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{14-25}$$

Note que a massa m não aparece na Equação 14-25 — o movimento de um pêndulo não depende de sua massa. Para ϕ pequeno, $\text{sen}\ \phi \approx \phi$ e

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\phi \qquad \phi \ll 1 \qquad \text{14-26}$$

A Equação 14-26 tem a mesma forma que a Equação 14-2 para um corpo em uma mola. Então, o movimento de um pêndulo se aproxima do movimento harmônico simples para deslocamentos angulares pequenos.

A Equação 14-26 pode ser escrita como

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi, \qquad \text{onde } \omega^2 = \frac{g}{L} \qquad \text{14-27}$$

O período do movimento é, então,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(para pequenas oscilações)} \qquad \text{14-28}$$

PERÍODO DE UM PÊNDULO SIMPLES

A solução da Equação 14-27 é

$$\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$$

onde ϕ_0 é o deslocamento angular máximo.

CHECAGEM CONCEITUAL 14-1

Devemos esperar que o período de um pêndulo simples dependa de sua massa m e de seu comprimento L, da aceleração da gravidade g e do ângulo inicial ϕ_0. Encontre uma combinação simples de algumas ou de todas estas grandezas que tenha as dimensões corretas do período.

Um pêndulo de Foucault, na universidade americana de Louisville. Em 1851, Leon Foucault suspendeu um pêndulo de 67 m de comprimento do teto do Panteon em Paris. Devido à rotação da Terra em torno de seu eixo, o Panteon gira em torno do pêndulo. (Se o Panteon estivesse no pólo norte, ele completaria uma volta a cada 24 horas.) A observação do prédio girando em torno do plano do pêndulo capturou a imaginação do mundo.

! ω é a freqüência angular — e não a rapidez angular — do movimento do pêndulo.

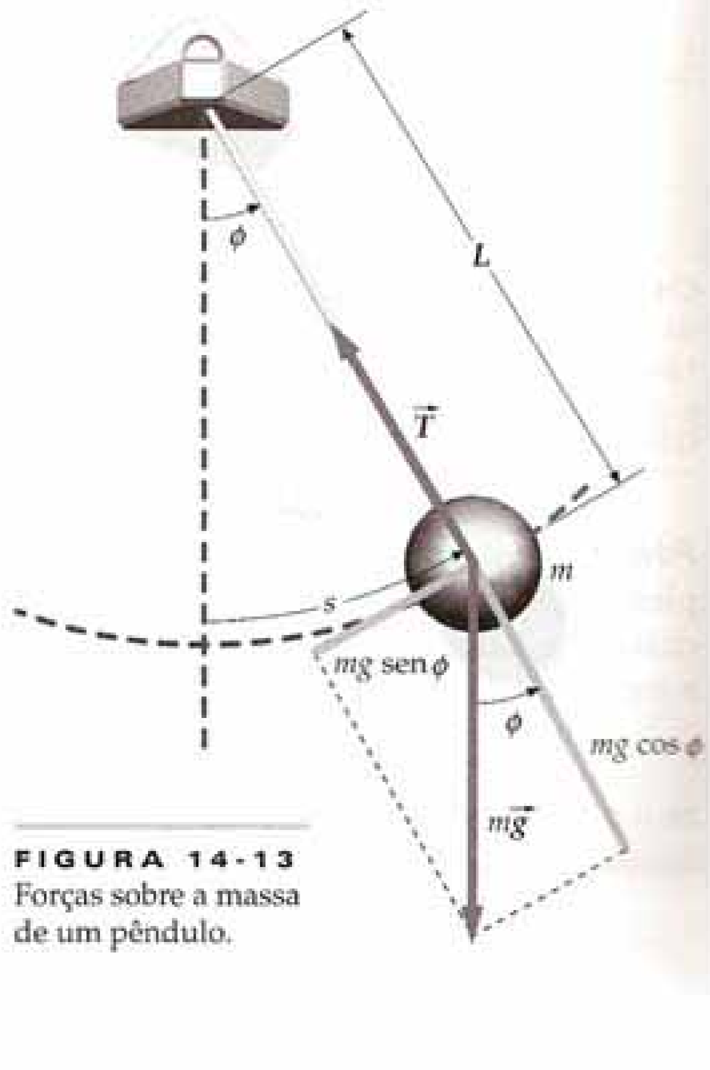


FIGURA 14-13 Forças sobre a massa de um pêndulo.

De acordo com a Equação 14-28, quanto maior o comprimento do pêndulo, maior será o período, o que é consistente com a observação experimental. O período e também, portanto, a freqüência são independentes da amplitude de oscilação (desde que a amplitude seja pequena). Esta afirmativa é uma característica geral do movimento harmônico simples.

PROBLEMA PRÁTICO 14-5

Determine o período de um pêndulo simples de 1,00 de comprimento que executa pequenas oscilações.

A aceleração da gravidade pode ser medida usando-se um pêndulo simples descrevendo pequenas oscilações. Precisamos, apenas, medir o comprimento L e o período T do pêndulo, e, usando a Equação 14-28, resolver para g. (Para medir T, usualmente medimos o tempo de n oscilações e depois dividimos por n, o que minimiza erros de medida.)

Exemplo 14-8 Cronometrando uma Descida *Conceitual*

Lia e Bruno devem medir, em uma experiência de cinemática, o tempo que leva para que um deslizador largado do repouso percorra várias distâncias diferentes, ao descer um trilho de ar inclinado que tem um comprimento de 2,00 m. (Um trilho de ar é virtualmente um trilho sem atrito.) Eles inclinam o trilho colocando um caderno de 2,0 cm de espessura sob uma de suas extremidades. Eles liberam o deslizador do meio do trilho e verificam que o tempo para que ele acelere ao longo de metade do comprimento do trilho é 4,8 s. Depois, eles largam o deslizador da parte mais alta do trilho e verificam que o tempo que ele leva para acelerar ao longo de todo o comprimento do trilho é 4,8 s — o mesmo tempo que ele levou acelerando ao longo de metade do trilho. Argumentando que os tempos para as duas distâncias não podem ser iguais, eles repetem as duas medidas, mas obtêm os mesmos resultados. Confusos, eles pedem uma explicação ao professor. Você pode pensar em uma explicação plausível?

SITUAÇÃO Se o trilho for perfeitamente reto, a aceleração será a mesma em todos os pontos de sua extensão, e o tempo para o deslizador acelerar ao longo de todo o comprimento do trilho, a partir do repouso, será maior do que o tempo para ele acelerar apenas ao longo de metade do trilho. No entanto, se o trilho se arquear, apresentando uma pequena depressão, então a aceleração será maior no ponto mais alto do trilho, onde a inclinação será mais acentuada. O que prevê a suposição do trilho arqueado?

SOLUÇÃO

1. Suponha que o trilho tenha uma leve depressão, de forma a formar um arco circular com o centro de curvatura diretamente acima de sua extremidade inferior:

   Se o trilho se curva como suposto, então o deslizador se moverá como o peso de um pêndulo simples de comprimento $L = R$, onde R é o raio de curvatura do trilho.

2. O período T de um pêndulo é independente da amplitude, para pequenas amplitudes:

   Os tempos medidos por Lia e Bruno equivalem a $\frac{1}{4}$ do período T do pêndulo, dado pela Equação 14-28. Como o período de um pêndulo é independente da amplitude (para pequenas amplitudes), espera-se que os tempos medidos por Lia e Bruno sejam iguais.

CHECAGEM A amplitude do pêndulo é suficientemente pequena, quando o deslizador é largado da extremidade mais alta do trilho? Sim, será, se R for muito maior do que 2,00 m. A Equação 14-28 nos diz que o comprimento do pêndulo é dado por $L = gT^2/(4\pi^2)$. A substituição de T por $4 \times (4{,}8\text{ s})$ leva a $R = L = 92$ m, justificando a suposição de que as amplitudes são pequenas.

Pêndulo em um referencial acelerado A Figura 14-14*a* mostra um pêndulo simples suspenso de um teto de um vagão que tem uma aceleração $\vec{a}_0$ em relação ao chão, para a direita, com $\vec{a}$ sendo a aceleração do peso em relação ao chão. Aplicando a segunda lei de Newton ao peso, temos

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad \text{14-29}$$

Se o peso permanece em repouso em relação ao vagão, então $\vec{a} = \vec{a}_0$ e

$$\Sigma F_x = T \text{ sen } \theta_0 = ma_0$$
$$\Sigma F_y = T \cos \theta_0 - mg = 0$$

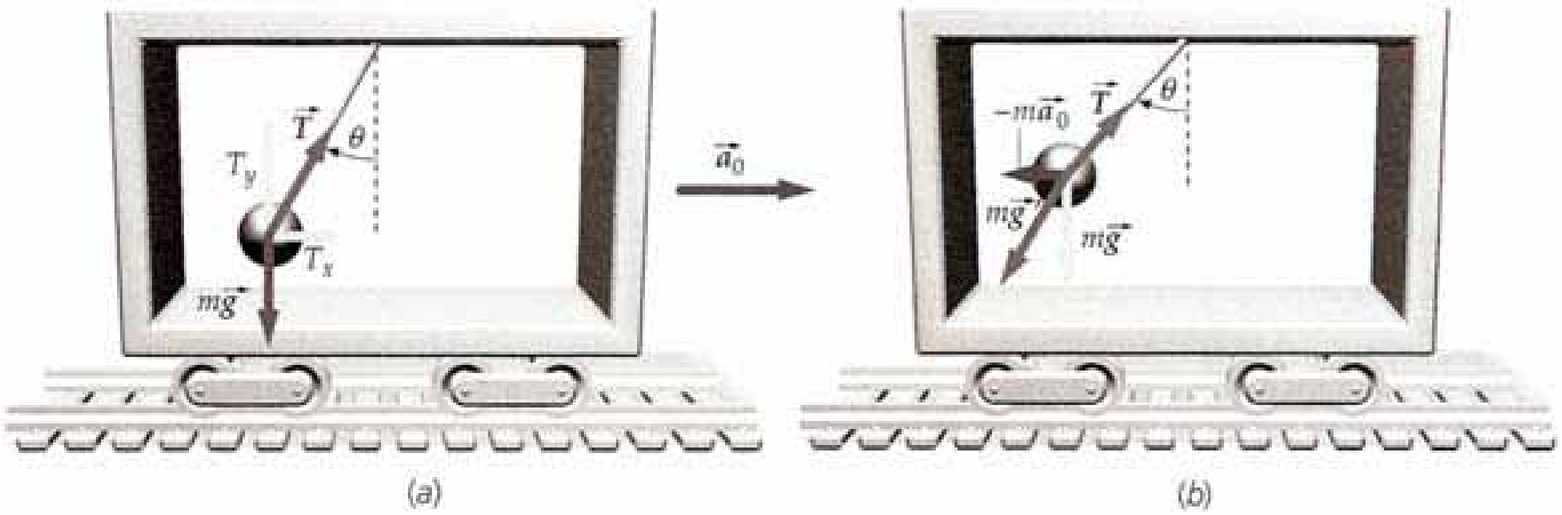


FIGURA 14-14 (*a*) Pêndulo simples em equilíbrio aparente em um vagão acelerado. As forças são as que são vistas de um referencial externo estacionário. (*b*) Forças sobre a massa como vistas do referencial acelerado. Acrescentar a pseudoforça $-m\vec{a}_0$ é o mesmo que substituir $\vec{g}$ por $\vec{g}'$.

onde θ_0 é o ângulo de equilíbrio. Logo, θ_0 é dado por $\tan\theta_0 = a_0/g$. Se o peso se move em relação ao vagão, então $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$, onde $\vec{a}'$ é a aceleração do peso em relação ao vagão. Substituindo $\vec{a}$ na Equação 14-29, temos

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0)$$

Subtraindo $m\vec{a}_0$ dos dois lados desta equação e rearranjando,

$$\vec{T} + m\vec{g}' = m\vec{a}'$$

onde $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$. Assim, substituindo $\vec{g}$ por $\vec{g}'$ e $\vec{a}$ por $\vec{a}'$ na Equação 14-29, podemos resolver o movimento do peso em relação ao vagão. Os vetores $\vec{T}$ e $m\vec{g}'$ são mostrados na Figura 14-14*b*. Se o fio se rompe fazendo com que $\vec{T} = 0$, então nossa equação fornece $\vec{a}' = \vec{g}'$, o que significa que $\vec{g}'$ é a aceleração de queda livre no referencial do vagão. Se o peso for levemente deslocado do equilíbrio, ele oscilará com um período T dado pela Equação 14-28 com g substituído por g'.

PROBLEMA PRÁTICO 14-6

Um pêndulo simples, de 1,00 m de comprimento, está em um veículo que possui a aceleração horizontal $a_0 = 3{,}00\ \mathrm{m/s^2}$. Determine g' e o período T.

Oscilações de grande amplitude Quando a amplitude das oscilações de um pêndulo se torna grande, seu movimento continua sendo periódico, mas não mais harmônico simples. Para uma amplitude angular ϕ_0, pode-se mostrar que o período é dado por

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathrm{sen}^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right] \qquad 14\text{-}30$$

PERÍODO DE OSCILAÇÕES DE GRANDES AMPLITUDES

onde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ é o período para amplitudes muito pequenas. A Figura 14-15 mostra T/T_0 em função da amplitude ϕ_0.

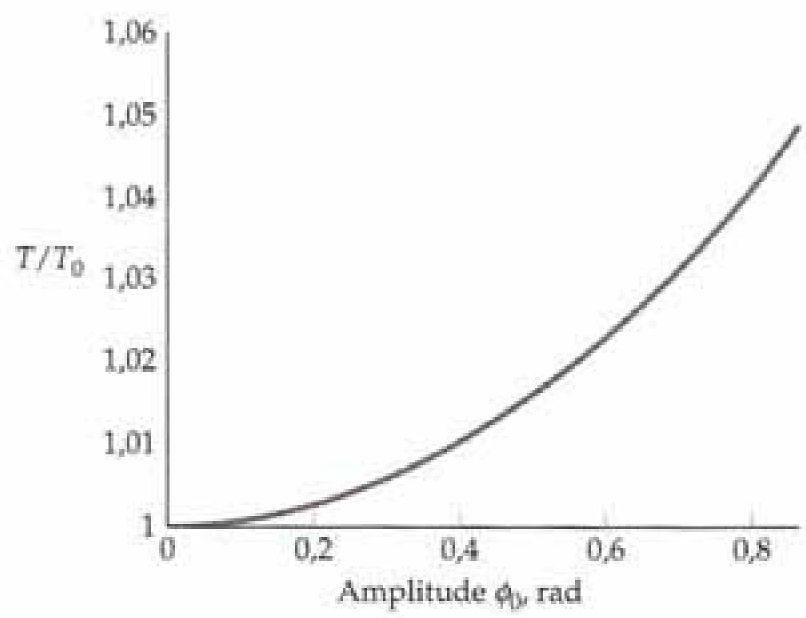


FIGURA 14-15 Repare que os valores no eixo vertical variam de 1 a 1,06. Em uma faixa de valores de ϕ de 0 a 0,8 rad (46°), o período varia cerca de 5 por cento.

Exemplo 14-9 Um Relógio de Pêndulo *Tente Você Mesmo*

Um relógio de pêndulo simples está ajustado para dar a hora certa com uma amplitude $\phi_0 = 10{,}0°$. Quando a amplitude diminui para valores muito pequenos, o relógio adianta ou atrasa? De quanto o relógio adiantará ou atrasará em um dia, se a amplitude permanecer muito pequena?

SITUAÇÃO Para calcular o período quando a amplitude angular é 10°, retenha apenas o primeiro termo de correção da Equação 14-30. Isto é, use

$$T \approx T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\phi_0\right]$$

Esta equação nos dá uma precisão suficiente, porque 10° é uma amplitude razoavelmente pequena. A amplitude do pêndulo diminui lentamente em razão do arraste do ar.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
1. Use a Equação 14-30 para determinar se T_0 é maior ou menor do que T.	T diminui quando ϕ_0 diminui, logo $\boxed{\text{o relógio adianta.}}$
2. Use a Equação 14-30 para determinar a variação percentual $[(T - T_0)/T] \times 100\%$, para $\phi = 10°$. Use apenas o primeiro termo de correção.	0,190%
3. Determine o número de minutos em um dia.	Há 1440 minutos em um dia.
4. Combine os passos 2 e 3 para determinar a variação no número de minutos em um dia.	O adiantamento é de $\boxed{2{,}73 \text{ min/d}}$

CHECAGEM O primeiro termo de correção da Equação 14-30 é $\frac{1}{4}\text{sen}^2(10{,}0°/2) = 1{,}90 \times 10^{-3}$, logo $T = 1{,}00190T_0$ e $(T - T_0)/T = (1{,}00190T_0 - T_0)/1{,}00190T_0 = 0{,}00190$. Este valor concorda com o resultado do passo 2.

INDO ALÉM Para evitar este desajuste, os mecanismos de relógios de pêndulo são projetados para manterem a amplitude rigorosamente constante.

*O PÊNDULO DE TORÇÃO

Um sistema que realiza oscilações rotacionais, em uma variante do movimento harmônico simples, é chamado de **pêndulo de torção**. A Figura 14-16 mostra um pêndulo de torção, consistindo em um disco maciço suspenso por um fio de aço. Se o deslocamento angular do disco, a partir da posição de equilíbrio, é ϕ, então o fio exerce sobre o disco um torque restaurador linear τ dado por

$$\tau = -\kappa\phi \qquad \text{14-31}$$

onde κ é a **constante de torção** do fio. Substituindo τ por $-\kappa\phi$ na equação $\tau = I\alpha$ (segunda lei de Newton para o movimento de rotação), fica

$$-\kappa\phi = I\alpha$$

onde a aceleração angular $\alpha = d^2\phi/dt^2$. Substituindo α por $d^2\phi/dt^2$ e rearranjando, fica

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\phi \qquad \text{14-32}$$

o que é idêntico à Equação 14-2, exceto por I estar no lugar de m, κ estar no lugar de k e ϕ estar no lugar de x. Assim, a solução da Equação 14-32 pode ser diretamente escrita por substituição na Equação 14-4. Fazendo isto, tem-se

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad \text{14-33}$$

onde $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ é a freqüência angular — e não a rapidez angular — do movimento. O período é, então,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \text{14-34}$$

PERÍODO DE UM PÊNDULO DE TORÇÃO

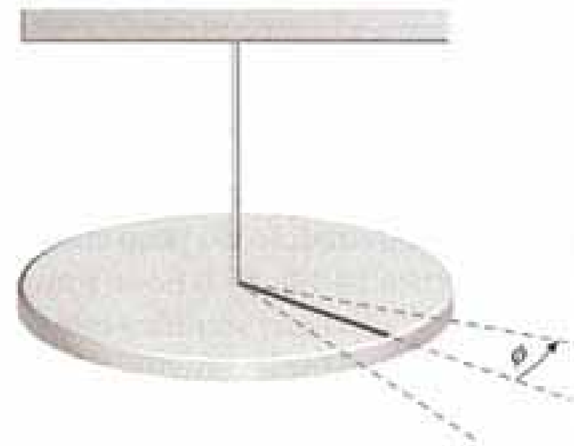


FIGURA 14-16 Este pêndulo de torção consiste em um disco maciço suspenso por um fio de aço.

Todos os relógios mecânicos funcionam porque o período da parte do mecanismo que oscila permanece constante. O período de qualquer pêndulo muda se a amplitude muda. No entanto, a parte do mecanismo que controla um relógio de pêndulo mantém a amplitude com um valor constante.

*O PÊNDULO FÍSICO

Um corpo rígido, livre para girar em torno de um eixo horizontal que não passa pelo seu centro de massa, irá oscilar quando deslocado do equilíbrio. Tal sistema é chamado de **pêndulo físico.** Seja uma figura plana com um eixo de rotação distante D de seu centro de massa e deslocado do equilíbrio de um ângulo ϕ (Figura 14-17). O torque em relação ao eixo tem uma magnitude MgD sen ϕ. Para valores suficientemente pequenos de ϕ, podemos simplificar nossa expressão para o torque usando a aproximação de ângulos pequenos (sen $\phi = \phi$). Assim, para ângulos pequenos o torque é um torque restaurador linear, dado por

$$\tau = -MgD\phi. \qquad \text{14-35}$$

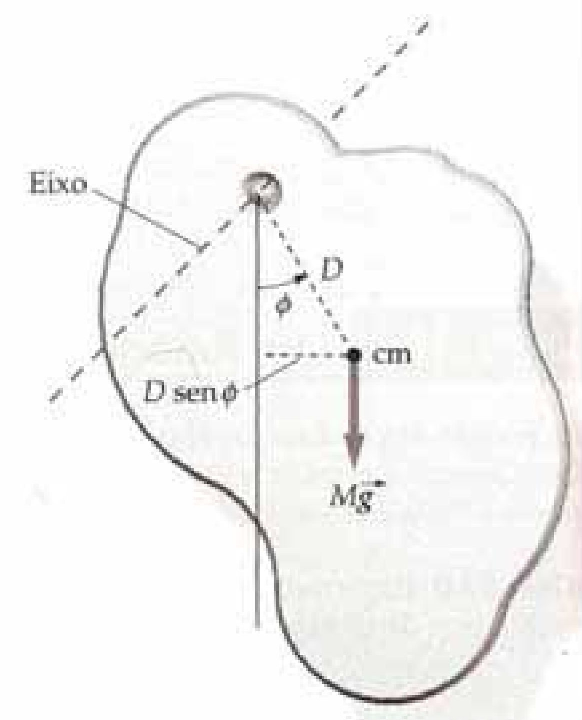


FIGURA 14-17 Um pêndulo físico.

Comparando isto com $\tau = -\kappa\phi$ (Equação 14-31) podemos ver que, para pequenos deslocamentos angulares, o pêndulo físico é um pêndulo de torção com uma constante de torção dada por

$$\kappa = MgD$$

Logo, o movimento do pêndulo é descrito pela Equação 14-33 com $\kappa = MgD$. O período é, portanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad 14\text{-}36$$

PERÍODO DE UM PÊNDULO FÍSICO

Para grandes amplitudes, o período é dado pela Equação 14-30, com T_0 dado pela Equação 14-36. Para um pêndulo simples de comprimento L, o momento de inércia é $I = ML^2$ e $D = L$. Logo, a Equação 14-36 dá $T = 2\pi\sqrt{ML^2/(MgL)} = 2\pi\sqrt{L/g}$, o mesmo que a Equação 14-28.

! O período de um pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total M. O momento de inércia I é proporcional a M, de modo que a razão I/M é independente de M.

Exemplo 14-10 Num Ritmo Confortável — *Rico em Contexto*

Você alega que o ritmo de uma caminhada confortável pode ser calculado se você usa um modelo de pêndulo físico para cada perna. Seu professor se mostra cético e pede para você se justificar. Sua alegação é correta?

SITUAÇÃO Um modelo simples para cada perna é o de uma barra homogênea articulada em uma das extremidades. Cada perna oscila para frente e para trás uma vez a cada dois passos, de modo que o tempo necessário para dar 10 passos é $5T$, onde T é o período do "pêndulo". Quanto tempo levará para você dar 10 passos em um ritmo tranqüilo, se sua alegação é correta? Use como modelo de perna uma barra homogênea de 0,90 m de comprimento, articulada em torno de um eixo que passa por uma das extremidades.

SOLUÇÃO

1. Desenhe uma barra homogênea articulada em uma das extremidades (Figura 14-18):

2. O período de um pêndulo físico é dado por $T = 2\pi\sqrt{I/MgD}$ (Equação 14-36): $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}}$

3. I, em torno da extremidade, é encontrado na Tabela 9-1 e D é metade do comprimento da barra: $\quad I = \frac{1}{3}ML^2 \quad$ e $\quad D = \frac{1}{2}L$

4. Substitua as expressões de I e de D para determinar T: $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}}$

5. O comprimento $L = 0{,}90$ m e o tempo para 10 passos é $5T$: $\quad 5T = 5\cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}} = 10\pi\sqrt{\dfrac{2(0{,}90\text{ m})}{3(9{,}81\text{ m/s}^2)}} = 7{,}8\text{ s}$

6. A hipótese tem mérito. O ponto de articulação está cerca de 90 cm acima do chão e o tempo para dar 10 passos sem pressa é de 6,7 s. A metade superior da perna é mais massiva do que a metade inferior, logo o modelo da perna como uma barra homogênea não é completamente apropriado. Além disso, o que é um ritmo confortável é questão sujeita à interpretação.

FIGURA 14-18 A distância entre o eixo de rotação e o centro de massa é $L/2$.

CHECAGEM Animais pernaltas, como elefantes e girafas, parecem caminhar em um ritmo lento, pesado, e animais de pernas curtas, como camundongos e alguns insetos, caminham em ritmo rápido. Isto pode ser explicado por este modelo, porque o período de um pêndulo longo é maior do que o de um pêndulo curto.

Exemplo 14-11 Uma Barra Oscilante

Uma barra homogênea de massa M e comprimento L está livre para girar em torno de um eixo horizontal que passa, perpendicularmente, a uma distância x de seu centro. Determine o período de oscilação da barra, para pequenos deslocamentos angulares.

SITUAÇÃO O período é dado pela Equação 14-36. O centro de massa está no centro da barra, logo a distância do centro de massa ao eixo de rotação é x (Figura 14-19). O momento de inércia de uma barra homogênea pode ser calculado com o teorema dos eixos paralelos, $I = I_{cm} + MD^2$ (Equação 9-13), onde I_{cm} pode ser encontrado na Tabela 9-1.

FIGURA 14-19 A distância entre o eixo de rotação e o centro de massa é x.

SOLUÇÃO

1. O período é dado pela Equação 14-36: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}}$

2. $D = x$, e o momento de inércia é dado pelo teorema dos eixos paralelos. O momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa é encontrado na Tabela 9-1: $D = x$

   $I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$

3. Substitua estes valores para determinar T: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)}{Mgx}}$

   $= \boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}}}$

CHECAGEM $T \to \infty$ quando $x \to 0$, como esperado. (Se o eixo de rotação da barra passa pelo seu centro de massa, não esperamos que a gravidade exerça um torque restaurador.) Também, se $x = L/2$, obtemos $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, o mesmo resultado encontrado no passo 4 do Exemplo 14-10. Além disso, se $x \gg L$, a expressão para o período se aproxima de $T = 2\pi\sqrt{x/g}$, que é a expressão para o período de um pêndulo simples de comprimento x (Equação 14-28).

INDO ALÉM O período T *versus* a distância x ao centro de massa, para uma barra de 1,00 m de comprimento, é mostrado na Figura 14-20.

PROBLEMA PRÁTICO 14-7 Mostre que a expressão do passo 3 para o período dá, para $x = L/6$, o mesmo resultado que para $x = L/2$.

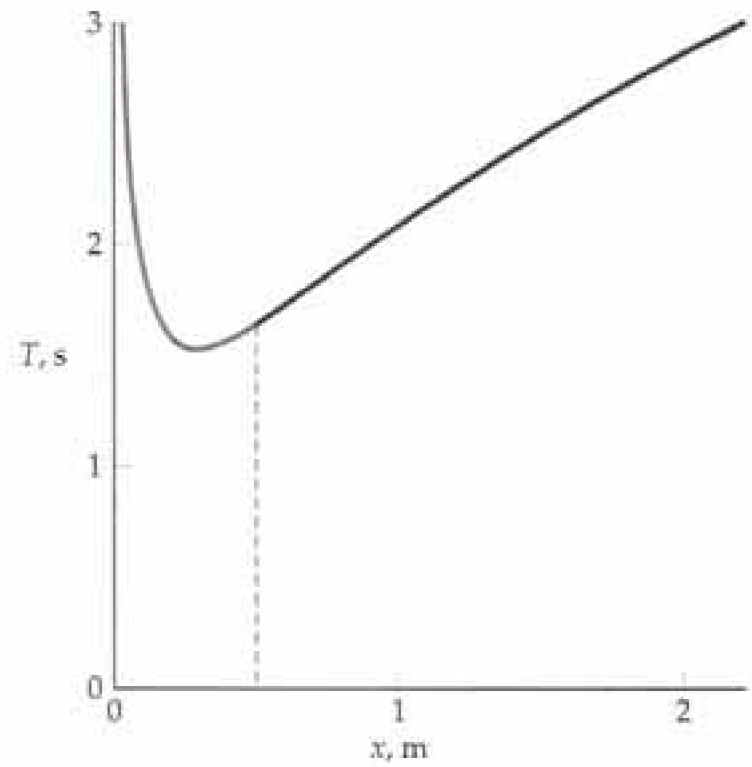


FIGURA 14-20 Gráfico do período *versus* distância do ponto de suspensão ao centro de massa. Para $x > 0{,}5$ m, o ponto de suspensão está além da extremidade da barra.

Exemplo 14-12 A Barra Oscilante Revisitada *Tente Você Mesmo*

Determine o valor de x, no Exemplo 14-11, para o qual o período é mínimo.

SITUAÇÃO No valor de x para o qual T é mínimo, $dT/dx = 0$.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	**Respostas**
1. O período, dado pelo resultado do Exemplo 14-11, é $T = 2\pi\sqrt{Z/g}$, onde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$. Determine o período quando x tende a zero e quando x tende a infinito.	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{Z}{g}}$ onde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$ Quando $x \to 0$, $Z \to \infty$, e $T \to \infty$. Quando $x \to \infty$, $Z \to \infty$, e $T \to \infty$.
2. O período vai a infinito quando x tende a zero e quando x tende a infinito. Em algum ponto da região $0 < x < \infty$ o período tem que ser mínimo. Para determinar o mínimo, calcule dT/dx, iguale-o a zero e resolva para x.	$\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{dT}{dZ}\dfrac{dZ}{dx} = \dfrac{\pi}{\sqrt{g}}Z^{-1/2}\dfrac{dZ}{dx}$ $Z > 0$ na região $0 < x < \infty$, logo $\dfrac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dZ}{dx} = 0.$ $\dfrac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\dfrac{L}{\sqrt{12}} = 0{,}289L}$

CHECAGEM Esperamos uma resposta entre 0 e 0,5L. O resultado $x = 0{,}289L$ do passo 2 satisfaz esta expectativa.

14-4 OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

Uma mola ou um pêndulo, quando largados oscilando, acabam por parar, porque a energia mecânica é dissipada por forças de atrito. Tal movimento é dito **amortecido**. Se o amortecimento é suficientemente grande como, por exemplo, um pêndulo mergulhado em melado, o oscilador não chega a completar nem um ciclo de oscilação, limitando-se a retornar ao equilíbrio com uma rapidez que se aproxima de zero à medida que o corpo se aproxima da posição de equilíbrio. Este tipo de movimento é dito **superamortecido**. Se o amortecimento é suficientemente pequeno para que o sistema oscile com uma amplitude que diminui lentamente com o tempo — como uma criança em um balanço quando a mãe deixa de empurrá-la a cada ciclo — o movimento é dito **subamortecido**. O movimento com o mínimo amortecimento que ainda não resulta em oscilação é dito **criticamente amortecido**. (Com qualquer amortecimento menor, o movimento será subamortecido.)

Movimento subamortecido A força de amortecimento exercida sobre um oscilador como o mostrado na Figura 14-21*a* pode ser representada pela expressão empírica

$$\vec{F}_d = -b\vec{v}$$

onde b é uma constante. Um sistema como este é dito *linearmente amortecido*. Vamos discutir o movimento linearmente amortecido. Como a força de amortecimento é oposta ao sentido do movimento, ela realiza trabalho negativo e faz com que a energia mecânica do sistema diminua. Esta energia é proporcional ao quadrado da amplitude (Equação 14-17), e o quadrado da amplitude diminui exponencialmente com o aumento do tempo. Isto é,

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau} \tag{14-37}$$

DEFINIÇÃO — CONSTANTE DE TEMPO

onde A é a amplitude, A_0 é a amplitude em $t = 0$ e τ é o tempo de decaimento, ou

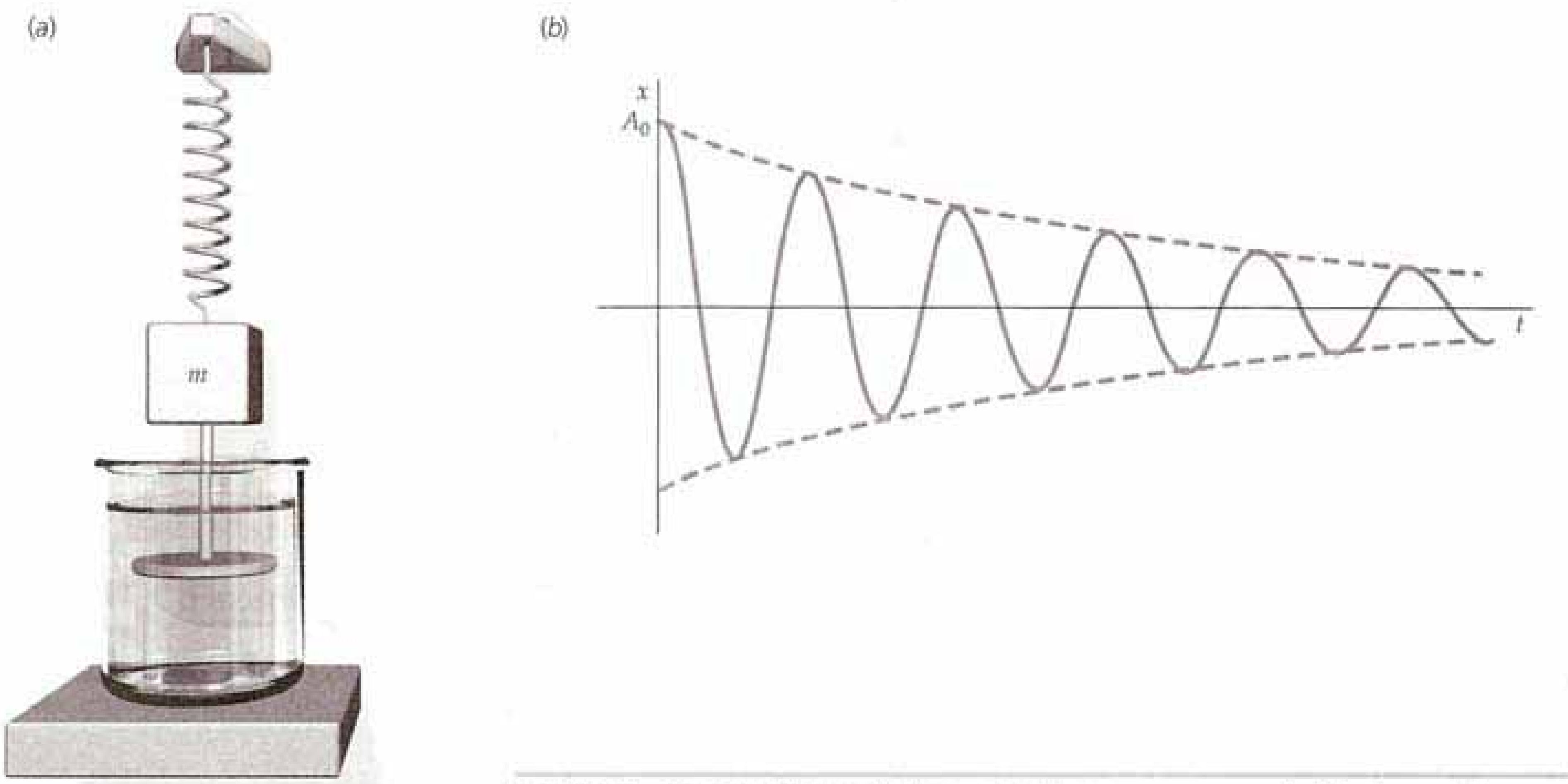


FIGURA 14-21 (*a*) Um oscilador amortecido suspenso em um líquido viscoso. O movimento do cilindro é amortecido pelas forças de arraste. (*b*) Curva de oscilação amortecida.

constante de tempo. A **constante de tempo** é o tempo para a energia variar de um fator e^{-1}.

O movimento de um sistema amortecido pode ser obtido da segunda lei de Newton. Para um corpo de massa m em uma mola com constante de força k, a força resultante é $-kx - b(dx/dt)$. Fazendo a força resultante igual à massa vezes a aceleração d^2x/dt^2, obtemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

que, rearranjando, fica

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad 14\text{-}38$$

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE UM OSCILADOR AMORTECIDO

A solução exata desta equação pode ser encontrada usando-se métodos-padrão de solução de equações diferenciais. A solução do caso subamortecido é

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \delta) \qquad 14\text{-}39$$

onde A_0 é a amplitude inicial. A freqüência ω' está relacionada com a freqüência natural ω_0 (a freqüência sem amortecimento) por

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \qquad 14\text{-}40$$

Para uma massa em uma mola, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Para *amortecimento fraco*, $b/(2m\omega_0) \ll 1$ e ω' é quase igual a ω. As curvas tracejadas na Figura 14-21*b* correspondem a $x = A$ e a $x = -A$, onde A é dado por

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \qquad 14\text{-}41$$

Elevando ao quadrado os dois lados desta equação e comparando os resultados com a Equação 14-37, temos

$$\tau = \frac{m}{b} \qquad 14\text{-}42$$

À medida que a *constante de amortecimento* b aumenta, a freqüência angular ω' diminui até se tornar zero no valor crítico

$$b_c = 2m\omega_0 \qquad 14\text{-}43$$

Quando b é maior ou igual a b_c, o sistema não oscila. Se $b > b_c$, o sistema é superamortecido. Quanto menor for b, mais rápido o corpo retornará à posição de equilíbrio. Se $b = b_c$, o sistema é dito criticamente amortecido e o corpo retorna ao equilíbrio (sem oscilação) muito rapidamente. A Figura 14-22 mostra gráficos de deslocamento *versus* tempo para um oscilador criticamente amortecido e para um oscilador superamortecido. É freqüente usarmos o amortecimento crítico quando desejamos que um sistema não oscile mas retorne rapidamente ao equilíbrio.

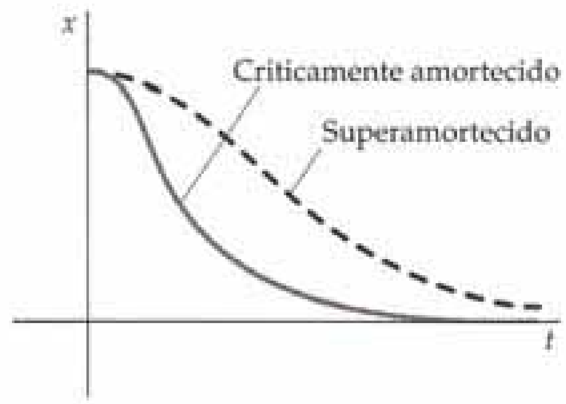


FIGURA 14-22 Gráficos do deslocamento *versus* tempo para um oscilador criticamente amortecido e para um oscilador superamortecido, os dois largados do repouso.

Exemplo 14-13 A Massa Sustentada pelas Molas de um Automóvel

A massa sustentada pelas molas de um automóvel não inclui as massas das rodas, dos eixos, dos freios etc. Em um automóvel, a massa que as molas sustentam é de 1100 kg e a massa não sustentada é de 250 kg. Se os quatro amortecedores são removidos, o automóvel oscila sobre as molas com uma freqüência de 1,0 Hz. Qual é a constante de amortecimento associada aos quatro amortecedores se, com eles, o automóvel retorna ao equilíbrio o mais rápido possível, sem oscilar, após passar por um quebra-molas?

SITUAÇÃO Como o automóvel retorna ao equilíbrio o mais rapidamente possível, sem oscilar, sabemos que ele é um oscilador criticamente amortecido. Use $b_c = 2m\omega_0$ (Equação 14-43) para determinar a constante de amortecimento para o amortecimento crítico.

SOLUÇÃO

1. A constante de amortecimento para amortecimento crítico está relacionada com a freqüência natural por $b_c = 2m\omega_0$ (Equação 14-43): $b_c = 2m\omega_0$
2. Com os pneus em contato com o pavimento, apenas a inércia da massa sustentada pelas molas é relevante: $m = 1100$ kg
3. A freqüência natural ω_0 é fornecida pelo enunciado do problema: $\omega_0 = 1{,}0$ Hz
4. Calcule a constante de amortecimento: $b = b_c = 2(1100\text{ kg})/(1{,}0\text{ Hz}) = \boxed{2{,}2 \times 10^3\text{ kg/s}}$

CHECAGEM A força de amortecimento é dada por $\vec{F} = -b\vec{v}$; logo, a unidade SI de bv é o newton. Nosso valor de b, no passo 4, tem as unidades kg/s e, portanto, bv tem as unidades (kg/s)(m/s) = kg · m/s², que são as unidades SI de massa vezes aceleração. Logo, kg/s são unidades apropriadas para b.

INDO ALÉM O melhor amortecedor, para qualquer veículo, é um que tenha uma constante de amortecimento tal que as oscilações sejam criticamente amortecidas. Assim, a melhor escolha para a constante de amortecimento crítico b_c é determinada pela massa sustentada pelas molas e pela constante de força k das molas.

Pesos são colocados nas rodas de automóveis ao serem "balanceadas". O propósito do balanceamento das rodas é o de prevenir vibrações que venham a induzir oscilações de todo o conjunto de rodas.

Como a energia de um oscilador é proporcional ao quadrado de sua amplitude, a energia de um oscilador subamortecido (média sobre um ciclo) também diminui exponencialmente com o tempo:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(A_0e^{-(b/2m)t})^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-(b/m)t} = E_0e^{-t/\tau} \qquad 14\text{-}44$$

onde $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ e $\tau = m/b$.

Costuma-se caracterizar um oscilador amortecido pelo seu fator Q (fator de qualidade),

$$Q = \omega_0\tau \qquad 14\text{-}45$$

DEFINIÇÃO — FATOR Q

O fator Q é adimensional. (Como ω_0 tem as dimensões do inverso do tempo, $\omega_0\tau$ é adimensional.) Podemos relacionar Q com a perda relativa de energia por ciclo. Derivando a Equação 14-44, fica

$$\frac{dE}{dt} = -(1/\tau)E_0e^{-t/\tau} = -(1/\tau)E \quad \text{ou} \quad \frac{dE}{E} = -\frac{dt}{\tau}$$

Se o amortecimento é fraco, de forma que a perda de energia por ciclo seja uma pequena fração da energia E, podemos substituir dE por ΔE e dt pelo período T. Então, $|\Delta E|/E$, em um ciclo (um período), é dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{2\pi}{Q} \qquad 14\text{-}46$$

logo,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}} \qquad \frac{|\Delta E|}{E} \ll 1 \qquad 14\text{-}47$$

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DE Q PARA AMORTECIMENTO FRACO

Q é, portanto, inversamente proporcional à perda relativa de energia por ciclo.

Exemplo 14-14 Fazendo Música

Quando a tecla do dó central do piano (freqüência de 262 Hz) é tocada, ela perde metade de sua energia após 4,00 s. (*a*) Qual é o tempo de decaimento, τ?(*b*) Qual é o fator Q para esta corda do piano? (*c*) Qual é a perda relativa de energia por ciclo?

SITUAÇÃO (*a*) Usamos $E = E_0e^{-t/\tau}$ e fazemos E igual a $\frac{1}{2}E_0$. (*b*) O fator Q pode ser determinado do tempo de decaimento e da freqüência.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Faça a energia no tempo $t = 4{,}00$ s igual à metade da energia original:

$$E = E_0 e^{-t/\tau} \quad \text{logo} \quad \tfrac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-(4{,}00\,\text{s}/\tau)}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-(4{,}00\,\text{s}/\tau)}$$

2. Resolva para o tempo τ, tomando o logaritmo natural dos dois lados:

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{4{,}00\text{ s}}{\tau}$$
$$\text{logo} \quad \tau = \frac{4{,}00\text{ s}}{\ln 2} = 5{,}771 = \boxed{5{,}77\text{ s}}$$

(*b*) Calcule Q, de τ e de ω_0:

$$Q = \omega_0\tau = 2\pi f\tau$$
$$= 2\pi\,(262\text{ Hz})(5{,}771\text{ s}) = 9{,}500 \times 10^3 = \boxed{9{,}50 \times 10^3}$$

(*c*) A perda relativa de energia por ciclo é dada pela Equação 14-46 e pela freqüência $f = 1/T$:

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{1}{f\tau} = \frac{1}{(262\text{ Hz})(5{,}771\text{ s})}$$
$$= 6{,}614 \times 10^{-4} = \boxed{6{,}61 \times 10^{-4}}$$

CHECAGEM Q pode ser calculado também de $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}} = 2\pi/(6{,}61 \times 10^{-4}) = 9{,}50 \times 10^3$. Note que a perda relativa de energia após 4,00 s não é apenas o número de ciclos ($4{,}00 \times 262$) vezes a perda relativa de energia por ciclo, porque a energia decai exponencialmente, e não linearmente.

INDO ALÉM A Figura 14-23 mostra a amplitude relativa A/A_0 *versus* tempo e a energia relativa E/E_0 *versus* tempo para a oscilação da corda do piano após o dó central ter sido tocado. Após 4,00 s, a amplitude diminuiu para cerca de 0,7 de seu valor inicial e a energia, que é proporcional ao quadrado da amplitude, caiu para cerca da metade de seu valor inicial.

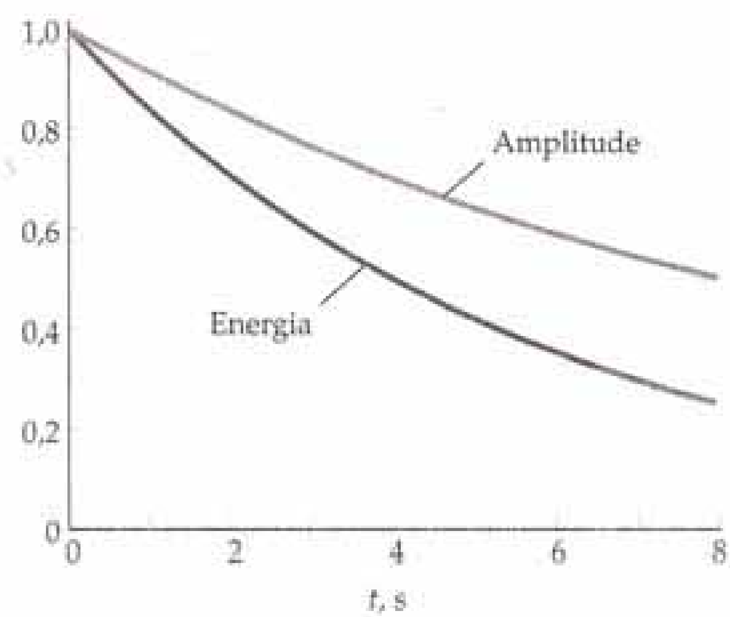


FIGURA 14-23 Gráficos de A/A_0 e de E/E_0 para uma corda de piano tocada.

Note que o valor de Q no Exemplo 14-4 é relativamente grande. Você pode estimar τ e Q para vários sistemas oscilantes. Dê uma pancadinha em um copo de vinho, de cristal, e observe quanto tempo ele soa. Quanto mais tempo ele soar, maior serão os valores de τ e de Q, e menor será o amortecimento. Béqueres do laboratório também podem ter um alto Q. Dê uma pancadinha em um copo de plástico e compare o amortecimento observado com o de um béquer de vidro.

Em termos de Q, a freqüência exata de um oscilador subamortecido é

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{14-48}$$

Como b é bem pequeno (e Q é muito grande) para um oscilador fracamente amortecido (Exemplo 14-14), vemos que ω' é quase igual a ω_0.

Podemos entender muito do comportamento de um oscilador fracamente amortecido considerando sua energia. A potência dissipada pela força de amortecimento é igual à taxa instantânea de variação da energia mecânica total:

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F}_d \cdot \vec{v} = -b\vec{v}\cdot\vec{v} = -bv^2 \qquad \text{14-49}$$

Para um oscilador fracamente amortecido com amortecimento linear, a energia mecânica total diminui lentamente com o tempo. A energia cinética média por ciclo é igual à metade da energia total:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{méd}} = \frac{1}{2}E \quad \text{ou} \quad (v^2)_{\text{méd}} = \frac{E}{m}$$

Se substituirmos v^2 por $(v^2)_{\text{méd}} = E/m$ na Equação 14-49, temos

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \approx -b(v^2)_{\text{méd}} = -\frac{b}{m}E \qquad \text{14-50}$$

Rearranjando a Equação 14-50, fica

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt$$

que, integrando, dá

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

que é a Equação 14-44.

14-5 OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

Para manter um sistema amortecido oscilando indefinidamente, energia mecânica deve ser injetada no sistema. Quando isto é feito, o oscilador é dito *excitado* ou *forçado*. Quem mantém uma criança oscilando, no balanço de jardim, empurrando-a pelo menos uma vez a cada ciclo, está forçando um oscilador. Se o mecanismo de excitação injeta energia no sistema a uma taxa maior do que a taxa com que ela é dissipada, a energia mecânica do sistema aumenta com o tempo e a amplitude aumenta. Se o mecanismo de excitação injeta energia à mesma taxa com que ela é dissipada, a amplitude permanece constante no tempo. Neste caso, o movimento do oscilador é estacionário.

A Figura 14-24 mostra um sistema que consiste em um corpo em uma mola que está sendo excitada movendo-se o ponto de apoio para cima e para baixo, em movimento harmônico simples de freqüência ω. No início, o movimento é complicado, mas ele acaba por entrar em regime estacionário, quando o sistema oscila com a mesma freqüência de excitação e com uma amplitude constante e, portanto, com energia constante. Em regime estacionário, a energia injetada no sistema pela força de excitação, a cada ciclo, é igual à energia dissipada pelo amortecimento em cada ciclo.

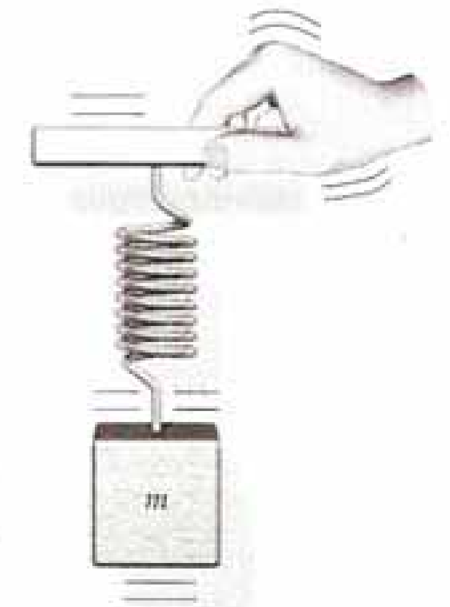


FIGURA 14-24 Um corpo preso a uma mola vertical pode ser forçado movendo-se o suporte para cima e para baixo.

A amplitude, e portanto a energia, de um sistema em regime estacionário não depende apenas da amplitude da força de excitação, mas também depende de sua freqüência. A **freqüência natural de um oscilador**, ω_0, é a sua freqüência quando não há nem forças de excitação e nem forças de amortecimento presentes. (No caso de uma mola, por exemplo, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) Se a freqüência de excitação é suficientemente próxima da freqüência natural do sistema, o sistema oscilará com uma amplitude relativamente grande. Por exemplo, se o suporte da Figura 14-24 oscila em uma freqüência próxima da freqüência natural do sistema massa–mola, a massa oscilará com uma amplitude muito maior do que a que teria se o suporte oscilasse com freqüências significativamente maiores ou menores. Este fenômeno é chamado de **ressonância**. Quando a freqüência de excitação é igual à freqüência natural do oscilador, a energia por ciclo transferida ao oscilador é máxima. A freqüência natural do sistema é, então, chamada de **freqüência de ressonância**. (Matematicamente, é mais conveniente usar a freqüência angular ω do que a freqüência f ($f = \omega/2\pi$). Como ω e f são proporcionais, muitas das conclusões sobre a freqüência angular também são válidas para a freqüência. Em descrições verbais, usualmente omitimos a palavra angular, quando esta omissão não puder causar confusão.) A Figura 14-25 mostra os gráficos da potência média injetada em um oscilador como função da freqüência de excitação, para dois valores diferentes de amortecimento. Estas curvas são chamadas de **curvas de ressonância.** Quando o amortecimento é fraco (grande Q), a largura do pico de ressonância correspondente é pequena, e dizemos que a ressonância é estreita. Para amortecimento forte, a curva de ressonância é larga. A largura de cada curva de ressonância, $\Delta\omega$, indicada na figura, é a largura na metade da altura máxima. Pode-se mostrar que, para amortecimento fraco, a razão entre a largura de ressonância e a freqüência de ressonância é igual ao inverso do fator Q (veja o Problema 106):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \qquad 14\text{-}51$$

LARGURA DE RESSONÂNCIA PARA AMORTECIMENTO FRACO

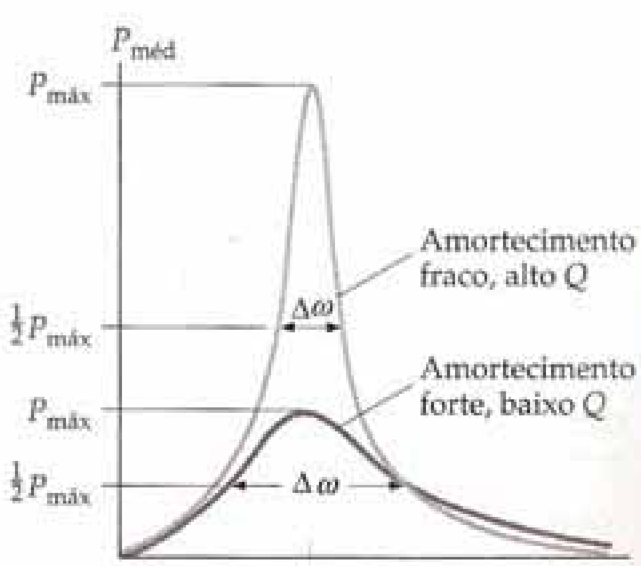


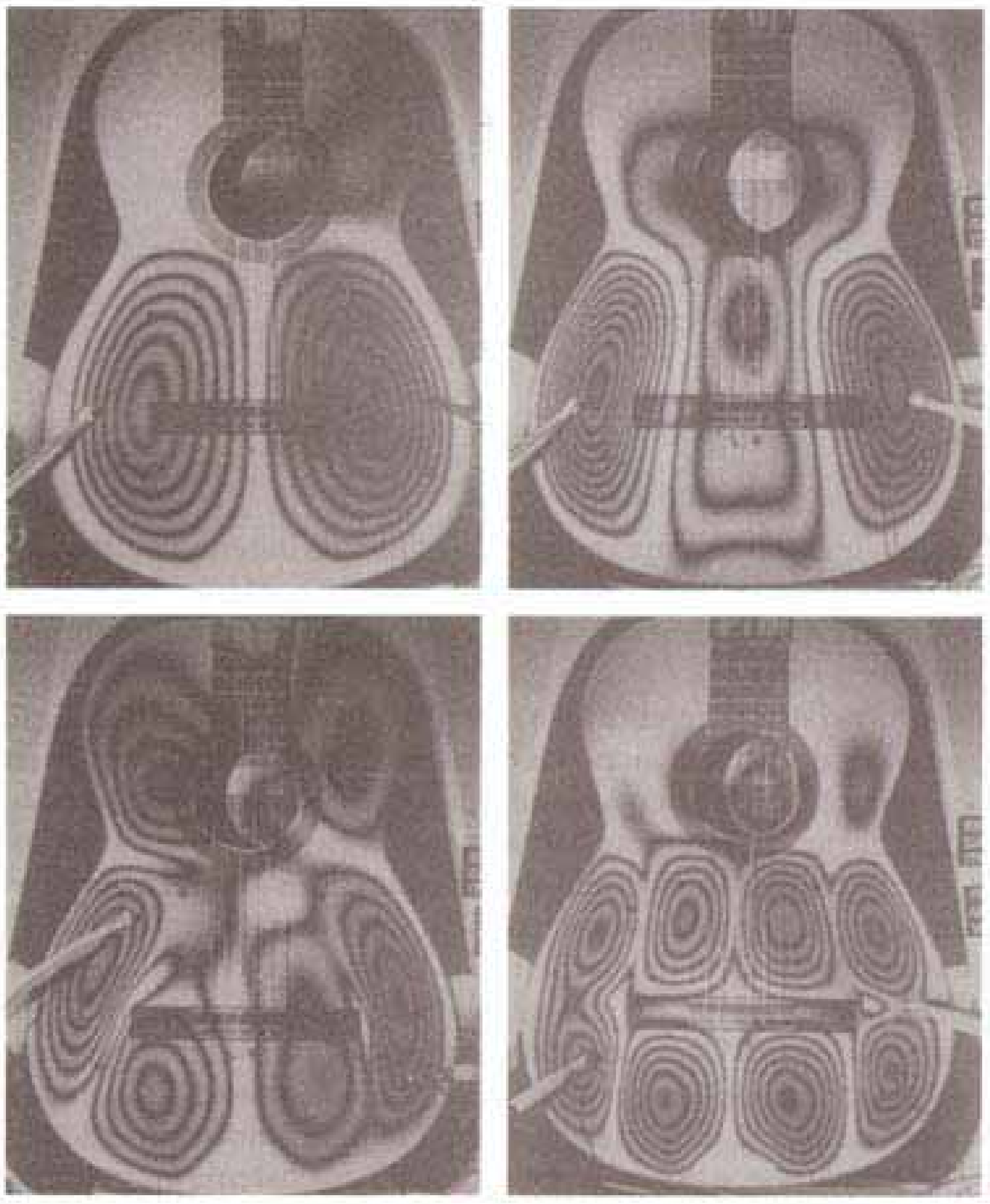
FIGURA 14-25 Ressonância de um oscilador. A largura $\Delta\omega$ do pico de ressonância para um oscilador de alto Q (a curva mais alta) é pequena em comparação com a a freqüência natural ω_0. O pico de ressonância do oscilador de baixo Q (a curva mais baixa) de mesma freqüência natural possui uma largura consideravelmente maior do que a do oscilador de alto Q.

Assim, o fator Q é uma medida direta da estreiteza da ressonância.

Você pode realizar um experimento simples para demonstrar a ressonância. Segure uma régua por uma das extremidades, entre seus dedos, de forma a fazê-la oscilar como um pêndulo. (Se uma régua não estiver disponível, use qualquer coisa que achar conveniente. Um cabo de vassoura também serve.) Libere a régua a partir de algum deslocamento angular inicial e observe a freqüência natural do movimento. Depois, mova sua mão para frente e para trás horizontalmente, excitando a régua na sua freqüência natural. Mesmo que a amplitude do movimento de sua mão seja pequena, a régua oscilará com uma amplitude apreciável. Agora, movimente sua mão com uma freqüência duas ou três vezes maior do que a freqüência natural, e observe a diminuição da amplitude de oscilação da régua.

Existem muitos exemplos de ressonância. Quando você senta em um balanço, intuitivamente você se inclina, para impulsioná-lo com a mesma freqüência natural dele. Muitas máquinas vibram porque elas possuem partes giratórias que não estão perfeitamente balanceadas. (Observe uma máquina de lavar roupa no ciclo de centrifugação, por exemplo.) Se a máquina está presa a uma estrutura que possa vibrar, a estrutura se torna um sistema oscilante forçado que é colocado em movimento com a máquina. Os engenheiros dão grande atenção a balanceamento das partes giratórias dessas máquinas, amortecendo suas vibrações e isolando-as das estruturas dos edifícios.

Uma taça de cristal com amortecimento fraco pode ser quebrada por uma onda sonora intensa que tenha a freqüência igual, ou quase igual, à sua freqüência natural de vibração. A quebra de taças é uma demonstração física comum, usando-se um oscilador de áudio, um alto-falante e um amplificador.



Objetos com extensão possuem mais do que uma freqüência de ressonância. Quando tocada, uma corda de violão transmite sua energia para o corpo do violão. As oscilações do corpo, acopladas com as da mas de ar que ele contém em seu interior, produzem os padrões de ressonânc mostrados. *(Royal Swedish/Academy of Music.)*

* TRATAMENTO MATEMÁTICO DA RESSONÂNCIA

Podemos tratar matematicamente um oscilador forçado supondo que, além da força restauradora e da força de amortecimento, o oscilador esteja sujeito a uma força externa de excitação que varia harmonicamente com o tempo:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t \qquad 14\text{-}52$$

onde F_0 e ω são a amplitude e a freqüência angular da força de excitação. Esta freqüência não está, geralmente, relacionada com a freqüência angular natural do sistema, ω_0.

A segunda lei de Newton, aplicada a um corpo de massa m preso a uma mola com constante de força k e sujeito a uma força de amortecimento $-bv_x$ e a uma força externa $F_0 \cos \omega t$, fornece

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-kx - bv_x + F_0 \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

onde usamos $a_x = d^2x/dt^2$. Substituindo k por $m\omega_0^2$ (Equação 14-8) e rearranjando,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \qquad 14\text{-}53$$

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE UM OSCILADOR FORÇADO

Discutimos qualitativamente, agora, a solução geral da Equação 14-53. Ela consiste em duas partes, a **solução transiente** e a **solução estacionária**. A parte transiente da solução é idêntica à de um oscilador amortecido, dada pela Equação 14-39. As constantes desta parte da solução dependem das condições iniciais. Ao longo do tempo, esta parte da solução se torna desprezível, por causa do decaimento exponencial da amplitude. Ficamos com a solução estacionária, que pode ser escrita como

$$x = A\cos(\omega t - \delta) \qquad 14\text{-}54$$

POSIÇÃO PARA UM OSCILADOR FORÇADO

onde a freqüência angular ω é a mesma da força de excitação. A amplitude A é dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad 14\text{-}55$$

AMPLITUDE PARA UM OSCILADOR FORÇADO

e a constante de fase δ é dada por

$$\tan\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad 14\text{-}56$$

CONSTANTE DE FASE PARA UM OSCILADOR FORÇADO

Comparando as Equações 14-52 e 14-54, podemos ver que o deslocamento e a força de excitação oscilam com a mesma freqüência, mas diferem por δ na fase. Quando a freqüência de excitação ω se aproxima de zero, δ se aproxima de zero, como pode ser visto da Equação 14-56. Na ressonância, $\omega = \omega_0$ e δ é igual a 90° e, quando ω é muito maior do que ω_0, δ se aproxima de 180°. No início deste capítulo, o deslocamento de uma partícula executando movimento harmônico simples é escrito como $x = A\cos(\omega t + \delta)$ (Equação 14-4). Esta equação é idêntica à Equação 14-54, exceto pelo sinal da constante de fase δ. A fase de uma oscilação forçada está sempre atrasada em relação à fase da força de excitação. O sinal negativo da Equação 14-54 assegura que δ seja sempre positivo (em vez de ser sempre negativo).

Ao realizar o experimento simples de excitar uma régua movendo a mão para frente e para trás (veja a discussão que se segue imediatamente à Equação 14-51), você deve reparar que, na ressonância, a oscilação de sua mão nem está em fase e nem defasada de 180° em relação à oscilação da régua. Se você mantém o movimento de sua mão a uma freqüência várias vezes maior do que a freqüência natural do pêndulo, o regime estacionário da régua será defasado de quase 180° em relação à sua mão.

A velocidade do corpo em regime estacionário é obtida derivando-se x em relação a t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t - \delta)$$

Na ressonância, $\delta = \pi/2$ e a velocidade está em fase com a força de excitação:

$$v_x = -\omega A\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +\omega A\cos\omega t$$

Assim, na ressonância o corpo está sempre se movendo no sentido da força de excitação, como é de se esperar com injeção máxima de potência. A amplitude da velocidade ωA é máxima quando $\omega = \omega_0$.

! Na ressonância, o corpo está sempre se movendo no sentido da força de excitação, o que é de se esperar, no caso de potência máxima injetada.

Exemplo 14-15 Um Corpo em uma Mola — *Tente Você Mesmo*

Um corpo de 1,5 kg de massa, preso a uma mola de constante de força igual a 600 N/m, perde 3,0 por cento de sua energia em cada ciclo. O mesmo sistema é excitado por uma força senoidal com o valor máximo $F_0 = 0{,}50$ N. (*a*) Quanto vale Q para este sistema? (*b*) Qual é a freqüência (angular) de ressonância? (*c*) Se a freqüência de excitação varia lentamente através da ressonância, qual é a largura de ressonância $\Delta\omega$? (*d*) Qual é a amplitude, na ressonância? (*e*) Qual é a amplitude, se a freqüência de excitação é $\omega = 19$ rad/s?

SITUAÇÃO A perda de energia por ciclo é apenas de 3,0 por cento, de modo que o amortecimento é fraco. Podemos determinar Q de $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$ (Equação 14-47) e depois usar o resultado e $\Delta\omega/\omega = 1/Q$ (Equação 14-51) para determinar a largura de ressonância $\Delta\omega$. A freqüência de ressonância é a freqüência natural. A amplitude, tanto na ressonância quanto fora da ressonância, pode ser determinada da Equação 14-55, com a constante de amortecimento calculada de Q, usando $Q = \omega_0\tau$ (Equação 14-45) e $\tau = m/b$ (Equação 14-42).

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
(*a*) O amortecimento é fraco. Relacione Q com a perda relativa de energia usando $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$ (Equação 14-47):	$Q \approx \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} = \dfrac{2\pi}{0{,}030} = \boxed{210}$
(*b*) A freqüência de ressonância é a freqüência natural do sistema:	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \boxed{20\ \text{rad/s}}$
(*c*) Relacione a largura de ressonância $\Delta\omega$ com Q usando $\Delta\omega/\omega = 1/Q$ (Equação 14-51):	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \boxed{0{,}096\ \text{rad/s}}$
(*d*) 1. Escreva uma expressão para a amplitude A, para qualquer freqüência de excitação ω (Equação 14-55):	$A(\omega) = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$
2. Faça $\omega = \omega_0$ para calcular A na ressonância:	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0}$
3. Use $Q = \omega_0\tau$ (Equação 14-45) e $\tau = m/b$ (Equação 14-42) para relacionar a constante de amortecimento b com Q:	$b = \dfrac{m\omega_0}{Q} = 0{,}144\ \text{kg/s}$
4. Use os resultados dos dois passos anteriores para calcular a amplitude na ressonância:	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0} = \boxed{17\ \text{cm}}$
(*e*) Calcule a amplitude para $\omega = 19$ rad/s. (Omitimos as unidades para simplificar a equação. Como todas as grandezas estão no sistema SI, A está em metros.)	$A(19) = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{1{,}5^2(20^2 - 19^2)^2 + 0{,}144^2(19)^2}} = \boxed{0{,}85\ \text{cm}}$

CHECAGEM A uma freqüência apenas 1 rad/s abaixo da freqüência de ressonância de 20 rad/s, a amplitude cai de um fator de 20. Isto não surpreende, porque a largura de ressonância $\Delta\omega$ é de apenas 0,096 rad/s.

! Basta um afastamento de 1 rad/s da ressonância, para que a amplitude caia por um fator de 20. Isto não surpreende, porque a largura de ressonância $\Delta\omega$ é apenas de 0,0957 rad/s.

INDO ALÉM Fora da ressonância, o termo $b^2\omega^2$ é desprezível, em comparação com o outro termo do denominador da expressão para A. Quando $\omega - \omega_0$ é mais de várias vezes igual à largura $\Delta\omega$, como é o caso deste exemplo, podemos desprezar o termo $b^2\omega^2$ e calcular A com $A \approx F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$. A Figura 14-26 mostra a amplitude *versus* a freqüência de excitação ω. Note que a escala horizontal varre uma pequena faixa de valores de ω.

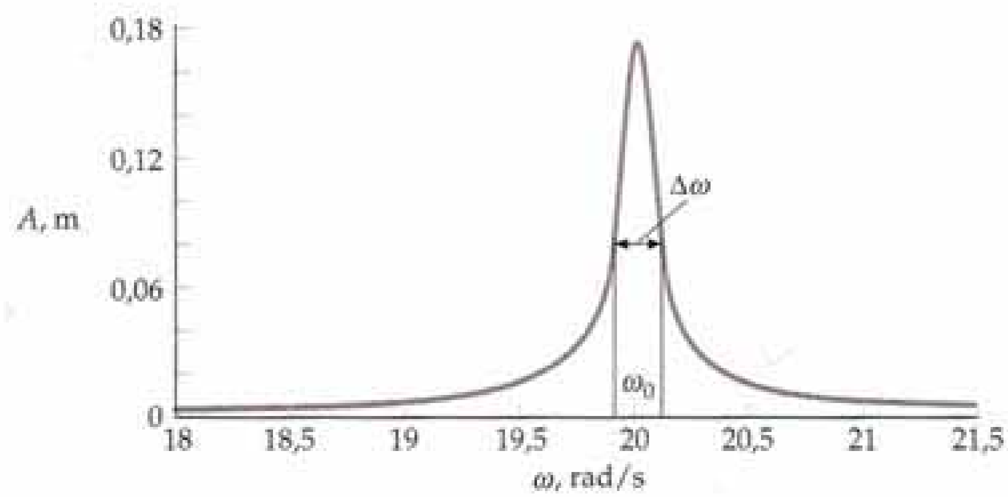
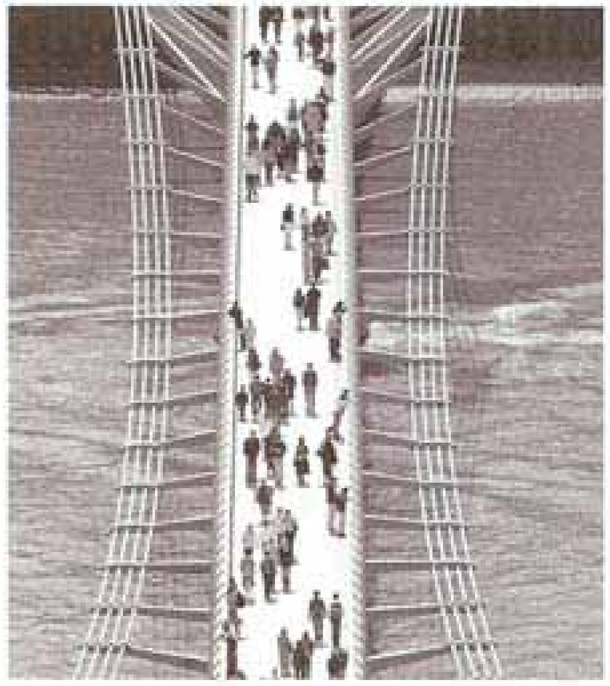


FIGURA 14-26

Física em Foco

No Compasso da Marcha: A Ponte do Milênio



Osciladores massivos amortecidos foram presos sob a passarela pouco depois da inauguração desta ponte pênsil. Os osciladores foram colocados para prevenir o balanço excessivo que era induzido pelas forças laterais exercidas pelos passos dos pedestres. *(Alamy.)*

A ponte londrina de pedestres London Millennium, de três estágios, foi inaugurada em junho de 2000. No dia da inauguração, entre 80.000 e 100.000 pessoas cruzaram a ponte suspensa. Sempre que o número de pessoas chegava a 2000, a ponte começava a oscilar lateralmente.[*] Logo, o balanço se tornava tão forte que muitos tinham que se segurar nos corrimões[†] A "Ponte Bamboleante"[‡] foi fechada três dias depois, e só foi reaberta em fevereiro de 2002. A ponte de pedestres foi projetada para suportar ventos extremamente fortes, assim como os golpes de barcaças contra os dois ancoradouros. No entanto, o movimento lateral foi uma surpresa para os projetistas e engenheiros. Após vários meses de estudos, os pesquisadores concluíram que o caminhar tem uma componente lateral de força, tanto como componentes para a frente e para trás.

A cadência típica de uma pessoa caminhando é tal que o seu pé esquerdo atinge o piso em intervalos aproximados de um segundo. O mesmo também vale, é claro, para o pé direito. Quando alguém dá um passo à frente com o pé esquerdo, cerca de 25 N de força são dirigidos para a esquerda; no caso do pé direito, a força é dirigida para a direita.[#] Em cada passo, uma força lateral para a esquerda ou para a direita é exercida sobre o assoalho, de forma que este passa a oscilar com uma freqüência de 1 Hz. Desafortunadamente, as duas menores freqüências naturais de movimento lateral no estágio central de 144 metros de comprimento eram 0,5 Hz e 1,0 Hz,[°] e o estágio sul, de 100 metros de comprimento, tinha um modo natural de vibração de 0,8 Hz. Os passos da multidão forçaram o movimento da ponte. Quando o público era pequeno, a força combinada dos passos não era suficiente para provocar o movimento. Mas, depois que mais de 200 pessoas estavam sobre a ponte,[§] o amortecimento natural da ponte não era grande o suficiente para resistir à força combinada dos passos da multidão empurrando lateralmente a ponte.

O balanço aumentava devido à reação humana ao movimento lateral. Cálculos mostram que a aceleração lateral máxima ficava entre $0{,}2g$ e $0{,}3g$,[¶] o suficiente para fazer as pessoas se desiquilibrarem. Um método instintivo de recuperar o equilíbrio sobre uma superfície móvel é caminhar no mesmo ritmo do movimento da superfície. Este caminhar ressonante aumentava a amplitude do movimento.

Medidas feitas em testes de aglomerações sobre a ponte levaram à solução, constituída de uma série de amortecedores. Oito amortecedores de massas convenientemente ajustadas e 37 amortecedores viscosos foram instalados para reduzir o balanço lateral. Os amortecedores de massa são blocos de 2,5 toneladas de aço suspensos como pêndulos. Eles reduzem o balanço lateral vibrando em defasagem de 180° com a ponte.[**] Os amortecedores viscosos são semelhantes aos absorvedores de choque usados para amortecer oscilações verticais em automóveis; eles trabalham movendo um pistão para frente e para trás, em um fluido viscoso. O amortecimento lateral principal é realizado por 37 amortecedores viscosos.[††] Outros amortecedores de massa foram instalados para amortecer eventuais oscilações verticais. Durante os testes finais antes da reabertura, o pico medido de aceleração da ponte caiu em 97 por cento, de $0{,}25g$ para $0{,}006g$.[‡‡] A ponte não teve mais problemas de oscilação, após a reabertura.

Qualquer[##] ponte com uma vibração lateral abaixo de 1,3 Hz é suscetível de oscilações provocadas pelos passos de uma multidão.[°°] Vários tipos diferentes de pontes têm exibido oscilação lateral, sob carga de pedestres, incluindo uma ponte pênsil no Japão[§§] e pontes de pedestres em Paris e em Ottawa. Mesmo pontes de auto-estradas têm mostrado o mesmo comportamento.[¶¶] Por causa da ponte londrina de pedestres, os engenheiros têm sido motivados a lançar um novo olhar sobre a questão das vibrações.

---

[*] Dallard, P., et al., "The London Millennium Footbridge," *The Structural Engineer*, Nov. 20, 2001, Vol. 79, No. 22, 17–33.

[†] Smith, Michael, "Bouncing Bridge May Be Closed 'for Weeks,'" *The Telegraph*, Jun. 13, 2000. http://www.telegraph.co.uk/news/main.jhtml?xml=/news/2000/06/13/nsway13.xml as of July 2006.

[‡] Binney, Magnus, "Throwing a Wobbly," *The Times*, Oct. 31, 2000, Features, 16.

[#] "Oscillation," *The Millennium Bridge – Challenge*. Arup Engineering. http://www.arup.com/MillenniumBridge/challenge/oscillation.html as of July 2006.

[°] Fitzpatrick, T., *Linking London: The Millennium Bridge*. London: The Royal Academy of Engineering, June 2001.

[§] Roberts, T. M., "Lateral Pedestrian Excitation of Footbridge," *Journal of Bridge Engineering*, Jan./Feb. 2005, Vol. 10, No. 1, 107–112s.

[¶] Dallard et al., op. cit.

[**] "Elegant, Filigran, and Not Moving," GERB Vibration Control Systems. http://gerb.com/images/both/projektbeispiele/pdf/millenium_bridge_en.pdf as of July 2006.

[††] Taylor, D. P., "Damper Retrofit of the London Millenium Footbridge—A Case Study in Biodynamic Design," Taylor Devices. http://www.taylordevices.com/papers/damper/damper.pdf as of July 2006.

[‡‡] Ibid.

[##] *Structural Safety 2000-2001: Thirteenth Report of SCOSS—The Standing Committee on Structural Safety.* London: Standing Committee on Structural Safety. May 2001, 24–26. http://www.scoss.org.uk/publications/rtf/13Report.pdf as of July 2006.

[°°] "Designing Footbridges with Eurocodes," *Eurocode News*, Mar. 2004, No. 2, 6.

[§§] Nakamura, S.-I., "Model for Lateral Excitation of Footbridges by Synchronous Walking," *Journal of Structural Engineering*, Jan. 2004, 32–37.

[¶¶] Fitzpatrick, op. cit.

Resumo

1. Movimento harmônico simples ocorre sempre que a força restauradora é proporcional ao deslocamento a partir do equilíbrio. Ele é de larga aplicação no estudo de oscilações, ondas, circuitos elétricos e dinâmica molecular.
2. Ressonância é um fenômeno importante em muitas áreas da física. Ela ocorre quando a freqüência da força de excitação é próxima da freqüência natural do sistema oscilante.

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1. Movimento Harmônico Simples	No movimento harmônico simples, a aceleração (e também, portanto, a força resultante) são ambas proporcionais e de sentidos opostos ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio. $F_x = -kx = ma_x$	14-1
Função posição	$x = A\cos(\omega t + \delta)$	14-4
Freqüência angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	14-11
Energia mecânica	$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$	14-17
Movimento circular	Se uma partícula se move em um círculo com rapidez constante, a projeção da partícula sobre um diâmetro do círculo se move em movimento harmônico simples.	
Movimento geral próximo do equilíbrio	Se um corpo recebe um pequeno deslocamento a partir de uma posição de equilíbrio estável, ele tipicamente oscilará com movimento harmônico simples em torno desta posição.	
2. Freqüências Naturais para Vários Sistemas		
Massa em mola	$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	14-8
Pêndulo simples	$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$	14-27
Pêndulo de torção	$\omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}}$ onde I é o momento de inércia e κ é a constante de torção. Para pequenas oscilações de um pêndulo físico, $\kappa = MgD$, onde D é a distância do centro de massa ao eixo de rotação.	14-33
3. Oscilações Amortecidas	Em oscilações de sistemas reais, o movimento é amortecido por causa das forças dissipativas. Se o amortecimento é maior do que um dado valor crítico, o sistema não oscila ao ser perturbado, mas simplesmente retorna à sua posição de equilíbrio. O movimento de um sistema fracamente amortecido é quase harmônico simples, com uma amplitude que diminui exponencialmente com o tempo.	
Freqüência	$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$	14-48
Energia	$E = E_0 e^{-t/\tau}$	14-44
Amplitude	$A = A_0 e^{-(1/2)t/\tau}$	14-41
Tempo de decaimento	$\tau = \dfrac{m}{b}$	14-42
Definição do fator Q	$Q = \omega_0\tau$	14-45

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
Fator Q para amortecimento fraco	$Q \approx \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} \qquad \left(\dfrac{\lvert\Delta E\rvert}{E}\right)_{\text{ciclo}} \ll 1$	14-47
4. **Oscilações Forçadas**	Quando um sistema subamortecido ($b < b_c$) é excitado por uma força externa senoidal $F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$, o sistema oscila com uma freqüência ω igual à freqüência de excitação e com uma amplitude A que depende da freqüência de excitação.	
Freqüência de ressonância	$\omega = \omega_0$	
Largura de ressonância para amortecimento fraco	$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$	14-51
*Função posição	$x = A\cos(\omega t - \delta)$	14-54
*Amplitude	$A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$	14-55
*Constante de fase	$\tan\delta = \dfrac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$	14-56

Resposta da Checagem Conceitual

14-1 $\sqrt{L/g}$

Respostas dos Problemas Práticos

14-1 (*a*) $f = 3{,}6$ Hz, $T = 0{,}28$ s, (*b*) $f = 2{,}5$ Hz, $T = 0{,}40$ s

14-2 $\omega = 3{,}1$ rad/s, $v_{\text{máx}} = 0{,}13$ m/s

14-3 (*a*) $E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = 0{,}0625$ J (*b*) $A = \sqrt{2E_{\text{total}}/k} = 5{,}59$ cm

14-4 24 cm

14-5 2,01 s

14-6 $g' = 10{,}3$ m/s^2, $T = 1{,}96$ s

14-7 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{6g}}$ para $x = L/6$ e para $x = L/2$

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

- • Um só conceito, um só passo, relativamente simples
- •• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
- ••• Desafiante, para estudantes avançados

Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • Verdadeiro ou falso:

(*a*) Para um oscilador harmônico simples, o período é proporcional ao quadrado da amplitude.

(*b*) Para um oscilador harmônico simples, a freqüência não depende da amplitude.

(*c*) Se a força resultante sobre uma partícula em movimento unidimensional é proporcional e oposta ao deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio, o movimento é harmônico simples.

2 • Se a amplitude de um oscilador harmônico simples é triplicada, de que fator varia a energia?

3 •• Um corpo preso a uma mola exibe movimento harmônico simples com uma amplitude de 4,0 cm. Quando o corpo está a 2,0 cm da posição de equilíbrio, qual é a fração de sua energia mecânica total que está na forma de energia potencial? (*a*) um quarto, (*b*) um terço, (*c*) a metade, (*d*) dois terços, (*e*) três quartos.

4 •• Um corpo preso a uma mola exibe movimento harmônico simples com uma amplitude de 10,0 cm. A que distância do ponto de equilíbrio o corpo estará, quando a energia potencial do sistema for igual à sua energia cinética? (*a*) 5,00 cm, (*b*) 7,07 cm, (*c*) 9,00 cm, (*d*) a distância não pode ser determinada com os dados fornecidos.

5 •• Dois sistemas idênticos consistem cada um em uma mola com uma extremidade presa a um bloco e a outra extremidade presa a uma parede. As molas são horizontais, e os blocos são apoiados sobre uma mesa horizontal sem atrito. Os blocos oscilam em movimentos harmônicos simples, de forma que a amplitude do movimento do bloco A vale quatro vezes a amplitude do movimento do bloco B. Como se comparam os valores máximos de rapidez dos dois blocos? (*a*)

$v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$, (b) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$, (c) $v_{A\,máx} = 4v_{B\,máx}$, (d) esta comparação não pode ser feita com os dados fornecidos.

6 •• Dois sistemas consistem cada um em uma mola com uma extremidade presa a um bloco e a outra extremidade presa a uma parede. As molas são horizontais, e os blocos são apoiados sobre uma mesa horizontal sem atrito. Os blocos idênticos oscilam em movimentos harmônicos simples de amplitudes iguais. No entanto, a constante de força da mola A vale quatro vezes a constante de força da mola B. Como se comparam os valores máximos de rapidez dos dois blocos? (a) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$, (b) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$, (c) $v_{A\,máx} = 4v_{B\,máx}$, (d) esta comparação não pode ser feita com os dados fornecidos.

7 •• Dois sistemas consistem cada um em uma mola com uma extremidade presa a um bloco e a outra extremidade presa a uma parede. As molas idênticas são horizontais, e os blocos são apoiados sobre uma mesa horizontal sem atrito. Os blocos oscilam em movimentos harmônicos simples de amplitudes iguais. No entanto, a massa do bloco A vale quatro vezes a massa do bloco B. Como se comparam os valores máximos de rapidez dos dois blocos? (a) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$, (b) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$, (c) $v_{A\,máx} = \frac{1}{2}v_{B\,máx}$, (d) esta comparação não pode ser feita com os dados fornecidos.

8 •• Dois sistemas consistem cada um em uma mola com uma extremidade presa a um bloco e a outra extremidade presa a uma parede. As molas idênticas são horizontais, e os blocos são apoiados sobre uma mesa horizontal sem atrito. Os blocos oscilam em movimentos harmônicos simples de amplitudes iguais. No entanto, a massa do bloco A vale quatro vezes a massa do bloco B. Como se comparam os módulos máximos de aceleração dos dois blocos? (a) $a_{A\,máx} = a_{B\,máx}$, (b) $a_{A\,máx} = 2a_{B\,máx}$, (c) $a_{A\,máx} = \frac{1}{2}a_{B\,máx}$, (d) $a_{A\,máx} = \frac{1}{4}a_{B\,máx}$, (e) esta comparação não pode ser feita com os dados fornecidos.

9 •• Em cursos de física geral, a massa da mola no movimento harmônico simples é usualmente desprezada, por ser normalmente muito menor do que a massa do corpo preso à ela. No entanto, este não é sempre o caso. Se você despreza a massa da mola quando ela não é desprezível, como seus cálculos para o período, a freqüência e a energia total do sistema se comparam com os valores reais desses parâmetros? Explique.

10 •• Dois sistemas massa–mola oscilam com períodos T_A e T_B. Se $T_A = 2T_B$ e as molas possuem constantes de força iguais, as massas dos sistemas estão relacionadas como (a) $m_A = 4m_B$, (b) $m_A = m_B/\sqrt{2}$, (c) $m_A = m_B/2$, (d) $m_A = m_B/4$.

11 •• Dois sistemas massa–mola oscilam com freqüências f_A e f_B. Se $f_A = 2f_B$ e as molas possuem constantes de força iguais, as massas dos sistemas estão relacionadas como (a) $m_A = 4m_B$, (b) $m_A = m_B/\sqrt{2}$, (c) $m_A = m_B/2$, (d) $m_A = m_B/4$.

12 •• Dois sistemas massa–mola *A* e *B* oscilam de modo que suas energias mecânicas totais são iguais. Se $m_A = 2m_B$, qual é a expressão que melhor relaciona suas amplitudes? (a) $A_A = A_B/4$, (b) $A_A = A_B/\sqrt{2}$, (c) $A_A = A_B$, (d) não há informação suficiente para se determinar a razão entre as amplitudes.

13 •• Dois sistemas massa–mola *A* e *B* oscilam de modo que suas energias mecânicas totais são iguais. Se a constante de força da mola *A* é o dobro da constante de força da mola *B*, qual é a expressão que melhor relaciona suas amplitudes? (a) $A_A = A_B/4$, (b) $A_A = A_B/\sqrt{2}$, (c) $A_A = A_B$, (d) não há informação suficiente para se determinar a razão entre as amplitudes.

14 •• O comprimento do cordão ou do arame preso à bolinha de um pêndulo aumenta ligeiramente com o aumento da temperatura. Como é que isto afeta um relógio de pêndulo simples?

15 •• Uma lâmpada pendurada do teto de um vagão de trem oscila com período T_0 quando o trem está em repouso. O período será (ligue a coluna da esquerda com a coluna da direita)

1. maior do que T_0 quando	A. O trem se move horizontalmente com velocidade constante.
2. menor do que T_0 quando	B. O trem faz uma curva com rapidez constante.
3. igual a T_0 quando	C. O trem sobe uma colina com rapidez constante.
	D. O trem passa por sobre o pico da colina com rapidez constante.

16 •• Dois pêndulos simples relacionam-se como se segue. O pêndulo *A* tem um comprimento L_A e uma massa m_A; o pêndulo *B* tem um comprimento L_B e uma massa m_B. Se o período de A for o dobro do de B, então (a) $L_A = 2L_B$ e $m_A = 2m_B$, (b) $L_A = 4L_B$ e $m_A = m_B$, (c) $L_A = 4L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B, (d) $L_A = \sqrt{2}L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B.

17 •• Dois pêndulos simples relacionam-se como se segue. O pêndulo *A* tem um comprimento L_A e uma massa m_A; o pêndulo *B* tem um comprimento L_B e uma massa m_B. Se a freqüência de A for um terço da freqüência de B, então (a) $L_A = 3L_B$ e $m_A = 3m_B$, (b) $L_A = 9L_B$ e $m_A = m_B$, (c) $L_A = 9L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B, (d) $L_A = \sqrt{3}L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B.

18 •• Dois pêndulos simples relacionam-se como se segue. O pêndulo *A* tem um comprimento L_A e uma massa m_A; o pêndulo *B* tem um comprimento L_B e uma massa m_B. Eles têm o mesmo período. Se a única diferença entre seus movimentos é que a amplitude do movimento de A é o dobro da amplitude do movimento de B, então (a) $L_A = L_B$ e $m_A = m_B$, (b) $L_A = 2L_B$ e $m_A = m_B$, (c) $L_A = L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B, (d) $L_A = \frac{1}{2}L_B$, qualquer que seja a razão m_A/m_B.

19 •• Verdadeiro ou falso:

(a) A energia mecânica de um oscilador amortecido e não forçado decresce exponencialmente com o tempo.

(b) Ocorre ressonância, em um oscilador amortecido e forçado, quando a freqüência de excitação é exatamente igual à freqüência natural.

(c) Se o fator *Q* de um oscilador amortecido é alto, então sua curva de ressonância é estreita.

(d) O tempo de decaimento τ de um oscilador massa–mola com amortecimento linear é independente de sua massa.

(e) O fator *Q* de um oscilador massa–mola forçado com amortecimento linear é independente de sua massa.

20 •• Dois sistemas massa–mola oscilantes amortecidos têm as mesmas constantes de mola e de amortecimento. No entanto, a massa m_A do sistema A é quatro vezes a massa m_B do sistema B. Como se comparam os seus tempos de decaimento? (a) $\tau_A = 4\tau_B$, (b) $\tau_A = 2\tau_B$, (c) $\tau_A = \tau_B$, (d) seus tempos de decaimento não podem ser comparados com as informações fornecidas.

21 •• Dois sistemas massa–mola oscilantes amortecidos têm as mesmas constantes de mola e os mesmos tempos de decaimento. No entanto, a massa m_A do sistema A é duas vezes a massa m_B do sistema B. Como se comparam as suas constantes de amortecimento *b*? (a) $b_A = 4b_B$, (b) $b_A = 2b_B$, (c) $b_A = b_B$, (d) $b_A = \frac{1}{2}b_B$, (e) suas constantes de amortecimento não podem ser comparadas com as informações fornecidas.

22 •• Dois sistemas massa–mola oscilantes amortecidos e forçados têm a mesma força de excitação e as mesmas constantes de mola e de amortecimento. No entanto, a massa do sistema A é quatro vezes a massa do sistema B. Suponha amortecimento muito fraco para os dois sistemas. Como se comparam suas freqüências de ressonância? (a) $\omega_A = \omega_B$, (b) $\omega_A = 2\omega_B$, (c) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$, (d) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$, (e) suas freqüências de ressonância não podem ser comparadas com as informações fornecidas.

23 •• Dois sistemas massa–mola oscilantes amortecidos e forçados têm a mesma massa, a mesma força de excitação e as mesmas constantes de amortecimento. No entanto, a constante de força k_A do sistema A é quatro vezes a constante de força k_B

do sistema B. Suponha amortecimento muito fraco, para os dois sistemas. Como se comparam suas freqüências de ressonância? (*a*) $\omega_A = \omega_B$, (*b*) $\omega_A = 2\omega_B$, (*c*) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$, (*d*) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$, (*e*) suas freqüências de ressonância não podem ser comparadas com as informações fornecidas.

24 •• Dois pêndulos simples oscilantes amortecidos e forçados têm a mesma massa, a mesma força de excitação e as mesmas constantes de amortecimento. No entanto, o comprimento do pêndulo A é quatro vezes o comprimento do pêndulo B. Suponha amortecimento muito fraco, para os dois sistemas. Como se comparam suas freqüências de ressonância? (*a*) $\omega_A = \omega_B$, (*b*) $\omega_A = 2\omega_B$, (*c*) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$, (*d*) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$, (*e*) suas freqüências de ressonância não podem ser comparadas com as informações fornecidas.

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

25 • Estime a largura de um típico móvel de relógio de pêndulo do vovô, em termos da largura do peso preso ao pêndulo, que deve apresentar um movimento harmônico simples.

26 • Um pequeno saco de pancadas, para exercício de pugilismo, tem aproximadamente o tamanho e o peso da cabeça de uma pessoa e está suspenso por uma corda ou uma corrente muito curta. Estime a freqüência natural de oscilações para este saco de pancadas.

27 •• Para uma criança em um balanço, a amplitude cai de um fator $1/e$ em cerca de oito períodos, se não é adicionada energia mecânica ao sistema. Estime o fator Q do sistema.

28 •• (*a*) Estime o período natural de oscilação de seus braços em uma caminhada com as mãos vazias. (*b*) Estime o período natural de oscilação, agora, se você caminha carregando uma pasta pesada. (*c*) Observe as pessoas caminhando. Suas estimativas parecem razoáveis?

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Nota: A não ser quando diferentemente especificado, suponha todos os corpos nesta seção em movimento harmônico simples.

29 • A posição de uma partícula é dada por $x = (7{,}0 \text{ cm}) \cos 6\pi t$, com t em segundos. Quais são (*a*) a freqüência, (*b*) o período e (*c*) a amplitude do movimento da partícula? (*d*) Qual é o primeiro instante, após $t = 0$, em que a partícula estará em sua posição de equilíbrio? Nesse instante, em que sentido ela estará se movendo?

30 • Qual é a constante de fase δ em $x = A \cos(\omega t + \delta)$ (Equação 14-4), se a posição da partícula oscilante, no instante $t = 0$, é (*a*) 0, (*b*) $-A$, (*c*) A e (*d*) $A/2$?

31 • Uma partícula, de massa m, parte do repouso de $x = +25$ cm e oscila em torno de sua posição de equilíbrio em $x = 0$ com um período de 1,5 s. Escreva expressões para (*a*) a posição x como função de t, (*b*) a velocidade v_x como função de t e (*c*) a aceleração a_x como função de t.

32 •• Determine (*a*) a rapidez máxima e (*b*) a aceleração máxima da partícula do Problema 29. (*c*) Qual é o primeiro instante em que a partícula estará em $x = 0$ movendo-se para a direita?

33 •• Resolva o Problema 31 com a partícula inicialmente em $x = 25$ cm movendo-se com a velocidade $v_0 = +50$ cm/s.

34 •• O período de uma partícula, oscilando em movimento harmônico simples, é 8,0 s e sua amplitude é 12 cm. Em $t = 0$, ela está em sua posição de equilíbrio. Determine a distância que a partícula percorre durante os intervalos (*a*) $t = 0$ a $t = 2{,}0$ s, (*b*) $t = 2{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s, (*c*) $t = 0$ a $t = 1{,}0$ s e (*d*) $t = 1{,}0$ s a $t = 2{,}0$ s.

35 •• O período de uma partícula oscilando em movimento harmônico simples é 8,0 s. Em $t = 0$, a partícula está em repouso em $x = A = 10$ cm. (*a*) Esboce x como função de t. (*b*) Determine a distância percorrida nos primeiro, segundo, terceiro e quarto segundos após $t = 0$.

36 •• Aplicação em Engenharia, Rico em Contexto É freqüente que especificações militares exijam que instrumentos eletrônicos sejam capazes de suportar acelerações de até $10g$ ($10g = 98{,}1 \text{ m/s}^2$). Para se certificar de que os produtos de sua companhia atendem a esta especificação, seu gerente o instrui a utilizar uma "mesa vibratória", que pode fazer vibrar um produto com freqüências e amplitudes ajustáveis e controladas. Se um equipamento é colocado sobre a mesa e posto a oscilar com uma amplitude de 1,5 cm, qual é a freqüência que você deve ajustar para testar a concordância com as especificações militares?

37 •• A posição de uma partícula é dada por $x = 2{,}5 \cos \pi t$, com x em metros e t em segundos. (*a*) Determine a rapidez máxima e a aceleração máxima da partícula. (*b*) Determine a rapidez e a aceleração da partícula quando $x = 1{,}5$ m.

38 ••• (*a*) Mostre que $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ pode ser escrito como $A_s \operatorname{sen}(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$, e determine A_s e A_c em termos de A_0 e δ. (*b*) Relacione A_c e A_s com a posição e a velocidade iniciais de uma partícula descrevendo movimento harmônico simples.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E SUA RELAÇÃO COM O MOVIMENTO CIRCULAR

39 • Uma partícula se move com a rapidez constante de 80 cm/s em um círculo de 40 cm de raio centrado na origem. (*a*) Determine a freqüência e o período da componente x de sua posição. (*b*) Escreva uma expressão para a componente x da posição da partícula como função do tempo t, supondo que a partícula esteja localizada no eixo $+y$ no tempo $t = 0$.

40 • Uma partícula se move em um círculo de 15 cm de raio, centrado na origem, e completa 1,0 revolução a cada 3,0 s. (*a*) Determine a rapidez da partícula. (*b*) Determine sua rapidez angular ω. (*c*) Escreva uma equação para a componente x da posição da partícula como função do tempo t, supondo que a partícula esteja no eixo $-x$ no tempo $t = 0$.

ENERGIA NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

41 • Um corpo de 2,4 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, está preso a uma das extremidades de uma mola horizontal de constante de força $k = 4{,}5$ kN/m. A outra extremidade da mola é mantida estacionária. A mola é distendida de 10 cm, a partir do equilíbrio, e é liberada. Determine a energia mecânica total do sistema.

42 • Determine a energia total de um sistema que consiste em um corpo de 3,0 kg sobre uma superfície horizontal sem atrito oscilando com uma amplitude de 10 cm e uma freqüência de 2,4 Hz, preso a uma das extremidades de uma mola horizontal.

43 • Um corpo de 1,50 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila preso a uma das extremidades de uma mola (constante de força $k = 500$ N/m). A rapidez máxima do corpo é 70,0 cm/s. (*a*) Qual é a energia mecânica total do sistema? (*b*) Qual é a amplitude do movimento?

44 • Um corpo de 3,0 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila preso a uma das extremidades de uma mola de constante de força igual a 2,0 kN/m com uma energia mecânica total de 0,90 J. (*a*) Qual é a amplitude do movimento? (*b*) Qual é a rapidez máxima?

45 • Um corpo, sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila preso a uma das extremidades de uma mola com uma ampli-

tude de 4,5 cm. Sua energia mecânica total é 1,4 J. Qual é a constante de força da mola?

46 •• Um corpo de 3,0 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila preso a uma das extremidades de uma mola com uma amplitude de 8,0 cm. Sua aceleração máxima é 3,5 m/s². Determine a energia mecânica total.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E MOLAS

47 • Um corpo de 2,4 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, está preso a uma das extremidades de uma mola horizontal de constante de força $k = 4{,}5$ kN/m. A mola é distendida de 10 cm a partir do equilíbrio e largada. Quais são (*a*) a freqüência do movimento, (*b*) o período, (*c*) a amplitude, (*d*) a rapidez máxima e (*e*) a aceleração máxima? (*f*) Quando é que o corpo atinge pela primeira vez sua posição de equilíbrio? Neste instante, qual é a sua aceleração?

48 • Um corpo de 5,00 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, está preso a uma das extremidades de uma mola horizontal de constante de força $k = 700$ N/m. A mola é distendida de 8,00 cm a partir do equilíbrio e largada. Quais são (*a*) a freqüência do movimento, (*b*) o período, (*c*) a amplitude, (*d*) a rapidez máxima e (*e*) a aceleração máxima? (*f*) Quando é que o corpo atinge pela primeira vez sua posição de equilíbrio? Neste instante, qual é a sua aceleração?

49 • Um corpo de 3,0 kg, sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila preso a uma das extremidades de uma mola horizontal com uma amplitude $A = 10$ cm e uma freqüência $f = 2{,}4$ Hz. (*a*) Qual é a constante de força da mola? (*b*) Qual é o período do movimento? (*c*) Qual é a rapidez máxima do corpo? (*d*) Qual é a aceleração máxima do corpo?

50 • Uma pessoa de 85,0 kg entra em um carro de 2400 kg de massa, fazendo com que suas molas sejam comprimidas de 2,35 cm. Se uma oscilação vertical é iniciada e supondo ausência de amortecimento, qual é a freqüência de vibração, sobre as molas, do carro e do passageiro?

51 • Um corpo de 4,50 kg oscila preso a uma mola horizontal com uma amplitude de 3,80 cm. A aceleração máxima do corpo é 26,0 m/s². Determine (*a*) a constante de força da mola, (*b*) a freqüência e (*c*) o período do movimento do corpo.

52 •• Um corpo de massa m está suspenso de uma mola vertical de constante de força igual a 1800 N/m. Quando o corpo é puxado até 2,50 cm abaixo do equilíbrio e largado do repouso, ele oscila com 5,50 Hz. (*a*) Determine m. (*b*) Determine de quanto a mola está distendida, quando o corpo está em equilíbrio. (*c*) Escreva expressões para o deslocamento x, a velocidade v_x e a aceleração a_x como funções do tempo t.

53 •• Um corpo está pendurado de uma das extremidades de uma mola vertical e é largado do repouso com a mola frouxa. Determine o período do movimento oscilatório que se estabelece, sabendo que o corpo cai 3,42 cm antes de atingir pela primeira vez o repouso.

54 •• Uma mala, de 20 kg de massa, está pendurada através de duas cordas elásticas, como mostra a Figura 14-27. Cada corda é distendida de 5,0 cm quando a mala está em equilíbrio. Se a mala é puxada um pouco para baixo e largada, qual será a freqüência de sua oscilação?

FIGURA 14-27 Problema 54

55 •• Um bloco de 0,120 kg está suspenso por uma mola. Quando uma pequena pedra de 30 g de massa é colocada sobre o bloco, a mola se distende de mais 5,0 cm. Com a pedra sobre o bloco, este oscila com uma amplitude de 12 cm. (*a*) Qual é a freqüência do movimento? (*b*) Quanto tempo leva para o bloco se deslocar de seu ponto mais baixo até seu ponto mais alto? (*c*) Qual é a força resultante sobre a pedra quando ela está no ponto de deslocamento mais alto?

56 •• Em relação ao Problema 55, determine a amplitude máxima de oscilação para a qual a pedra permanecerá em contato com o bloco.

57 •• Um corpo, de 2,0 kg de massa, é preso à extremidade superior de uma mola cuja extremidade inferior está presa ao solo. O comprimento da mola frouxa é 8,0 cm, e o comprimento da mola quando o corpo está em equilíbrio é 5,0 cm. Quando o corpo está em repouso, em sua posição de equilíbrio, ele recebe uma forte e rápida martelada para baixo, o que lhe imprime uma rapidez inicial de 0,30 m/s. (*a*) Qual é a altura máxima, em relação ao solo, atingida pelo corpo? (*b*) Quanto tempo leva para o corpo atingir sua altura máxima pela primeira vez? (*c*) Em algum momento, a mola fica frouxa? Qual deve ser a rapidez inicial mínima dada ao corpo para que a mola, em algum momento, esteja frouxa?

58 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um cabo de guindaste possui uma área de seção reta de 1,5 cm² e um comprimento de 2,5 m. O módulo de Young do cabo é 150 GN/m². Um bloco de motor de 950 kg é pendurado da extremidade do cabo. (*a*) De quanto se distende o cabo? (*b*) Se tratamos o cabo como uma mola simples, qual é a freqüência de oscilação do bloco de motor na extremidade do cabo?

SISTEMAS COM PÊNDULO SIMPLES

59 • Determine o comprimento de um pêndulo simples cuja freqüência para pequenas amplitudes vale 0,75 Hz.

60 • Determine o comprimento de um pêndulo simples cujo período para pequenas amplitudes vale 5,0 s.

61 • Qual seria o período do pêndulo do Problema 60 se ele estivesse na Lua, onde a aceleração da gravidade vale um sexto do que vale na Terra?

62 • Se o período de um pêndulo simples de 70,0 cm de comprimento é 1,68 s, qual é o valor de g no local onde ele se encontra?

63 • Um pêndulo simples, montado no poço da escadaria de um edifício de 10 andares, consiste em um peso suspenso por um arame de 34,0 m. Qual é o período de oscilação?

64 •• Mostre que a energia total de um pêndulo simples oscilando com pequena amplitude ϕ_0 (em radianos) é $E \approx \frac{1}{2}mgL\phi_0^2$. *Dica: Use a aproximação* $\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$ *para* ϕ *pequeno.*

65 ••• Um pêndulo simples, de comprimento L, está preso a um carrinho massivo que desce um plano inclinado, sem atrito, que forma um ângulo θ com a horizontal, como mostrado na Figura 14-28. Determine o período de pequenas oscilações para este pêndulo.

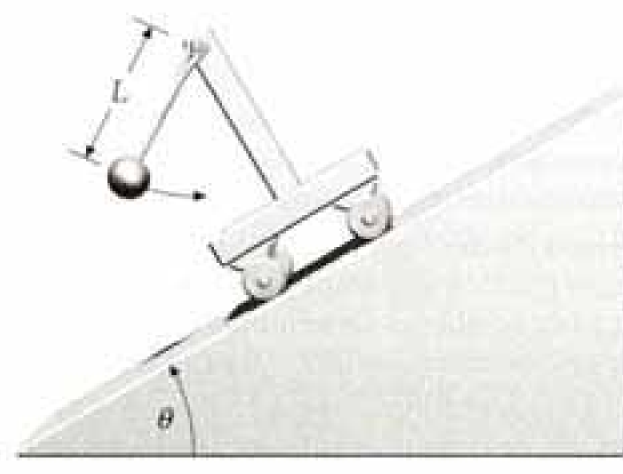


FIGURA 14-28 Problema 65

66 ••• A bolinha na extremidade de um pêndulo simples de comprimento L é largada, do repouso, de um ângulo ϕ_0. (*a*) Use o modelo de movimento harmônico simples para o movimento deste pêndulo e determine sua rapidez ao passar por $\phi = 0$, usando a aproximação de pequenos ângulos. (*b*) Usando conservação de energia determine sua rapidez exatamente para qualquer ângulo (não apenas ângulos pequenos). (*c*) Mostre que seu resultado da Parte (*b*) coincide com a resposta aproximada da Parte (*a*) quando ϕ_0 é pequeno. (*d*) Determine a diferença entre os resultados aproximado e exato para $\phi = 0{,}20$ rad e $L = 1{,}0$ m. (*e*) Determine a diferença entre os resultados aproximado e exato para $\phi = 1{,}20$ rad e $L = 1{,}0$ m.

PÊNDULOS FÍSICOS

67 • Um disco fino homogêneo, de 5,0 kg, com 20 cm de raio, gira livremente em torno de um eixo horizontal fixo que passa, perpendicularmente, por sua borda. O disco é ligeiramente deslocado a partir do equilíbrio e largado. Determine o período do movimento harmônico simples subseqüente.

68 • Um aro circular de 50 cm de raio oscila em seu próprio plano, pendente de uma fina barra horizontal. Qual é o período da oscilação, supondo uma amplitude pequena?

69 • Uma figura plana de 3,0 kg é suspensa por um ponto que dista 10 cm de seu centro de massa. Quando oscilando com pequenas amplitudes, o período é de 2,6 s. Determine seu momento de inércia I em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e que passa pelo ponto de suspensão.

70 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO, CONCEITUAL** Você projetou uma portinhola para o gato, feita de um pedaço quadrado de madeira compensada de 1,0 in (2,54 cm) de espessura e 6,0 in (15,24 cm) de lado, articulada em cima. Para que o gato tenha tempo suficiente para atravessar com segurança a portinhola, esta deve ter um período natural de pelo menos 1,0 s. Seu projeto funcionará? Se não, explique qualitativamente o que você precisa fazer para que ele passe a funcionar.

71 •• Você recebe uma régua de um metro e é instruído a perfurá-la com um furo de pequeno diâmetro, de modo que, ao suspendê-la por este furo de um eixo horizontal, o período do pêndulo seja mínimo. Onde você deve fazer o furo?

72 •• A Figura 14-29 mostra um disco homogêneo de raio $R = 0{,}80$ m, 6,00 kg de massa e com um pequeno furo distante d do centro do disco, que pode servir como ponto de suspensão. (*a*) Qual deve ser a distância d, para que o período deste pêndulo físico seja 2,50 s? (*b*) Qual deve ser a distância d para que este pêndulo físico tenha o menor período possível? Quanto vale este menor período possível?

FIGURA 14-29 Problema 72

73 ••• Os pontos P_1 e P_2 de um corpo plano (Figura 14-30) distam h_1 e h_2, respectivamente, do centro de massa. O corpo oscila com o mesmo período T ao girar livremente em torno de um eixo que passa por P_1 e ao girar livremente em torno de um eixo que passa por P_2. Estes dois eixos são perpendiculares ao plano do corpo. Mostre que $h_1 + h_2 = gT^2/(4\pi^2)$, com $h_1 \neq h_2$.

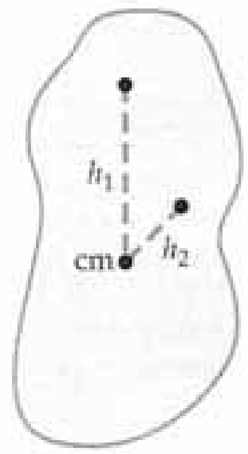


FIGURA 14-30 Problema 73

74 ••• Um pêndulo físico consiste em uma bolinha de raio r e massa m suspensa de uma barra rígida de massa desprezível, como na Figura 14-31. A distância do centro de massa da bolinha ao ponto de suspensão é L. Quando r é muito menor do que L, um pêndulo como este normalmente é tratado como um pêndulo simples de comprimento L. (*a*) Mostre que o período para pequenas oscilações é dado por $T = T_0\sqrt{1 + (2r^2/5L^2)}$, onde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ é o período de um pêndulo simples de comprimento L. (*b*) Mostre que, quando r é menor do que L, o período pode ser aproximado por $T \approx T_0(1 + r^2/5L^2)$. (*c*) Se $L = 1{,}00$ m e $r = 2{,}00$ cm, determine o erro no valor calculado quando a aproximação $T = T_0$ é usada para o período. Qual deve ser o raio da bolinha para que o erro seja de 1,00 por cento?

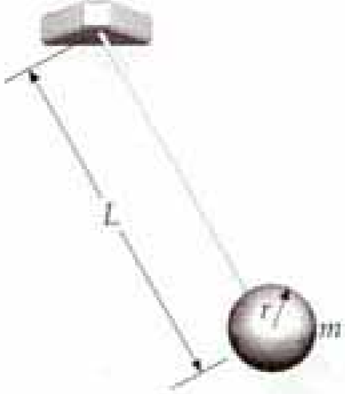


FIGURA 14-31 Problema 74

75 ••• A Figura 14-32 mostra o pêndulo de um relógio da casa da vovó. A barra uniforme de $L = 2{,}00$ m de comprimento tem uma massa $m = 0{,}800$ kg. Preso à barra há um disco homogêneo de massa $M = 1{,}20$ kg e com 0,150 m de raio. O relógio é construído para dar as horas corretamente quando o período do pêndulo é de exatamente 3,50 s. (*a*) Qual dever ser a distância d para que o período deste pêndulo seja de 2,50 s? (*b*) Suponha que o relógio atrase 5,00 min por dia. Para que sua avó não se atrase para as reuniões com as amigas, você decide ajustar o relógio, fazendo-o retomar o período correto. De que distância, e em que sentido, você deve deslocar o disco para se assegurar de que o relógio passe a marcar corretamente as horas?

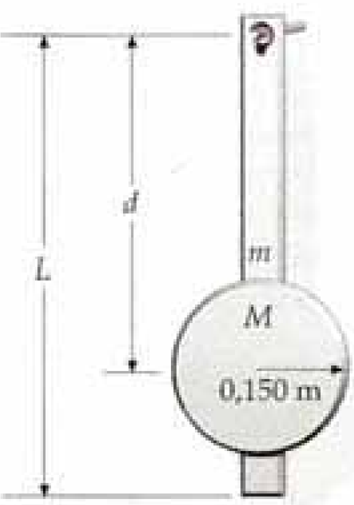


FIGURA 14-32 Problema 75

OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

76 • Um corpo de 2,00 kg oscila preso a uma mola, com uma amplitude inicial de 3,00 cm. A constante de força da mola é 400 N/m. Determine (*a*) o período e (*b*) a energia total inicial. (*c*) Se a energia diminui 1 por cento a cada período, determine a constante de amortecimento linear b e o fator Q.

77 •• Mostre que a razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas é constante para um oscilador linearmente amortecido.

78 •• Um oscilador tem um período de 3,00 s. Sua amplitude diminui 5,00 por cento em cada ciclo. (*a*) De quanto diminui sua energia mecânica em cada ciclo? (*b*) Qual é a constante de tempo τ? (*c*) Qual é o fator Q?

79 •• Um oscilador linearmente amortecido possui um fator Q igual a 20. (*a*) Qual é a fração de redução da energia, em cada ciclo? (*b*) Use a Equação 14-40 para determinar a diferença percentual entre ω' e ω_0. *Dica: Use a aproximação* $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, *para x pequeno.*

80 •• Um sistema massa–mola linearmente amortecido oscila a 200 Hz. A constante de tempo do sistema é 2,0 s. Em $t = 0$, a amplitude de oscilação é 6,0 cm e a energia do sistema oscilante é 60 J. (*a*) Quais são as amplitudes de oscilação em $t = 2{,}0$ s e em $t = 4{,}0$ s? (*b*) Quanta energia é dissipada no primeiro intervalo de 2 segundos e no segundo intervalo de 2 segundos?

81 •• **Aplicação em Engenharia** Sismólogos e geólogos constataram que a Terra vibra com um período de ressonância de 54 min e um fator Q de cerca de 400. Após um grande terremoto, a Terra continua vibrando por até 2 meses. (*a*) Determine a porcentagem de energia de vibração perdida em cada ciclo, devido às forças de amortecimento. (*b*) Mostre que, após n períodos, a energia de vibração é dada por $E_n = (0{,}984)^n E_0$, onde E_0 é a energia original. (*c*) Se a energia de vibração original de um terremoto é E_0, quanto vale a energia após 2,0 dias?

82 ••• Um pêndulo, em seu laboratório de física, tem um comprimento de 75 cm e uma bolinha de 15 g de massa. Para iniciar o balanço da bolinha, você coloca um ventilador próximo à ela, soprando uma corrente horizontal de ar. Enquanto o ventilador está ligado, a bolinha fica em equilíbrio com o pêndulo deslocado de um ângulo de 5,0° com a vertical. O vento é soprado pelo ventilador a 7,0 m/s. Você desliga o ventilador e deixa que o pêndulo oscile. (*a*) Supondo que a força de arraste do ar seja da forma $-bv$, determine a constante de tempo de decaimento τ deste pêndulo. (*b*) Quanto tempo levará para a amplitude do pêndulo chegar a 1,0°?

83 ••• **Aplicação em Engenharia, Rico em Contexto** Você deve monitorar a viscosidade de óleos, em uma indústria, e determina a viscosidade de um óleo usando o seguinte método: A viscosidade de um fluido pode ser medida determinando-se o tempo de decaimento das oscilações para um oscilador de propriedades conhecidas e que esteja operando mergulhado no fluido. Desde que a rapidez do oscilador dentro do fluido seja relativamente pequena, de forma a evitar turbulência, a força de arraste do fluido sobre uma esfera é proporcional à rapidez v da esfera, em relação ao fluido: $F_r = 6\pi a\eta v$, onde η é a viscosidade do fluido e a é o raio da esfera. Assim, a constante b é dada por $6\pi a\eta$. Suponha que seu aparato consista em uma mola rija de constante de força igual a 350 N/cm e de uma esfera de ouro (6,00 cm de raio) pendurada na mola. (*a*) Qual é a viscosidade que você mede, para o óleo, se o tempo de decaimento para este sistema é 2,80 s? (*b*) Qual é o fator Q do sistema?

OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

84 • Um oscilador linearmente amortecido perde 2,00 por cento de sua energia em cada ciclo. (*a*) Qual é o seu fator Q? (*b*) Se sua freqüência de ressonância é 300 Hz, qual é a largura da curva de ressonância $\Delta\omega$ quando o oscilador é excitado?

85 • Determine a freqüência de ressonância para cada um dos três sistemas mostrados na Figura 14-33.

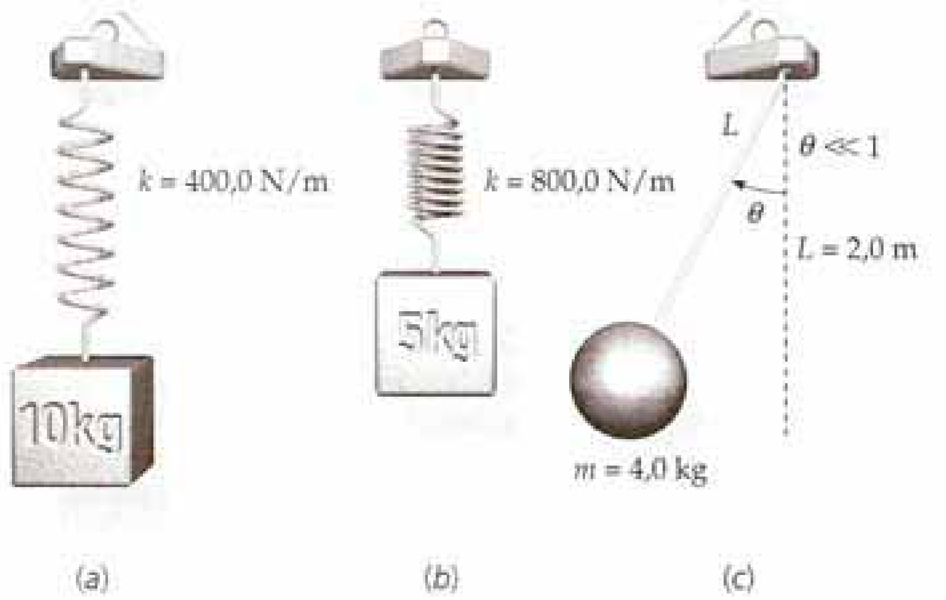


FIGURA 14-33 Problema 85

86 •• Um oscilador amortecido perde 3,50 por cento de sua energia a cada ciclo. (*a*) Quantos ciclos decorrem, até que metade de sua energia seja dissipada? (*b*) Qual é o seu fator Q? (*c*) Se a freqüência natural é 100 Hz, qual é a largura da curva de ressonância quando o oscilador é excitado por uma força senoidal?

87 •• Um corpo de 2,00 kg oscila preso a uma mola que tem uma constante de força igual a 400 N/m. A constante de amortecimento linear vale $b = 2{,}00$ kg/s. O sistema é excitado por uma força senoidal de valor máximo igual a 10,0 N e freqüência angular $\omega = 10{,}0$ rad/s. (*a*) Qual é a amplitude das oscilações? (*b*) Se a freqüência de excitação varia, em que freqüência ocorrerá ressonância? (*c*) Qual é a amplitude de oscilação na ressonância? (*d*) Qual é a largura da curva de ressonância $\Delta\omega$?

88 •• **Aplicação em Engenharia, Rico em Contexto** Suponha que você tenha o mesmo aparato descrito no Problema 83, com a mesma esfera de ouro, agora pendurada em uma mola menos rija, com uma constante de força de apenas 35,0 N/cm. Você estudou a viscosidade do etileno glicol com este equipamento e encontrou uma viscosidade de 19,9 mPa · s. Agora, você decide excitar este sistema com uma força externa oscilante. (*a*) Se a magnitude da força de excitação sobre o equipamento é de 0,110 N, e o equipamento é excitado em ressonância, qual será a amplitude da oscilação resultante? (*b*) Se o sistema não fosse excitado, mas largado oscilando, que porcentagem de sua energia seria perdida em cada ciclo?

PROBLEMAS GERAIS

89 • **Vários Passos** O deslocamento de uma partícula a partir do equilíbrio é dado por $x(t) = 0{,}40\cos(3{,}0t + \pi/4)$, com x em metros e t em segundos. (*a*) Determine a freqüência f e o período T deste movimento. (*b*) Encontre uma expressão para a velocidade da partícula como função do tempo. (*c*) Qual é a sua rapidez máxima?

90 • **Aplicação em Engenharia** Um astronauta chega a um novo planeta e utiliza um instrumento simples para determinar a aceleração da gravidade local. Antes de chegar, ele tinha registrado que o raio do planeta era de 7550 km. Se o seu pêndulo simples de 0,500 m de comprimento tem um período de 1,0 s, qual é a massa do planeta?

91 •• Um relógio de pêndulo marca a hora certa na superfície da Terra. Em qual caso o erro será maior: se o relógio for levado para uma mina de profundidade h, ou se ele for levantado até uma altura h? Prove sua resposta e suponha $h \ll R_T$.

92 •• A Figura 14-34 mostra um pêndulo de comprimento L com uma bolinha de massa M. A bolinha é presa a uma mola de constante de força k, como mostrado. Quando a bolinha está diretamente abaixo do suporte do pêndulo, a mola está frouxa. (*a*) Deduza uma expressão para o período de oscilação do sistema para pequenas amplitudes de vibração. (*b*) Suponha $M = 1{,}00$ kg e L tal que, na ausência da mola, o período é 2,00 s. Qual é a constante de força k, se o período de oscilação do sistema é 1,00 s?

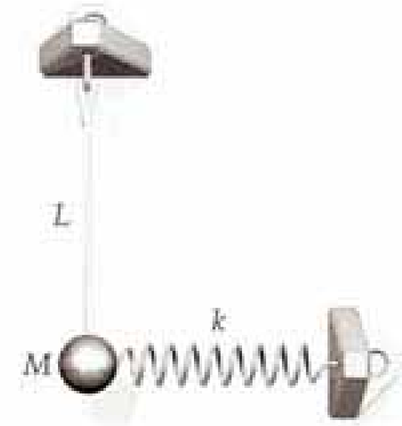


FIGURA 14-34 Problema 92

93 •• Um bloco, de massa m_1, está apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bloco, que está preso a uma extremidade de uma mola horizontal de constante de força k, oscila com uma amplitude A. Quando a mola está distendida ao máximo e o bloco está instantaneamente em repouso, um segundo bloco, de massa m_2, é colocado sobre o primeiro. (*a*) Qual é o menor valor do coeficiente de atrito estático μ_e para o qual o segundo bloco não escorrega sobre o primeiro? (*b*) Explique como a energia mecânica total E, a amplitude A, a freqüência angular ω e o período T do sistema são afetados pela colocação de m_2 sobre m_1, supondo que o coeficiente de atrito seja grande o suficiente para evitar escorregamento.

94 •• Uma caixa de 100 kg está pendurada do teto de uma sala — suspensa por uma mola com uma constante de força de 500 N/m. O comprimento da mola frouxa é 0,500 m. (*a*) Determine a posição de equilíbrio da caixa. (*b*) Uma mola idêntica é esticada e presa ao teto e à caixa, paralelamente à primeira mola. Determine a freqüência das oscilações quando a caixa é liberada. (*c*) Qual é a nova posição de equilíbrio da caixa quando atinge o repouso?

95 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** A aceleração da gravidade g varia com a localização geográfica devido à rotação da Terra e porque a Terra não é perfeitamente esférica. Isto foi constatado pela primeira vez no século XVII, quando se observou que um relógio de pêndulo cuidadosamente regulado para dar a hora certa em Paris se atrasava cerca de 90 s por dia próximo ao equador. (*a*) Mostre, usando a aproximação diferencial, que uma pequena variação da aceleração da gravidade Δg produz uma pequena variação no período ΔT de um pêndulo, dada por $\Delta T/T \approx -\frac{1}{2}\Delta g/g$. (*b*) Que variação de g é necessária para provocar uma variação no período de 90 s por dia?

96 •• Um pequeno bloco de massa igual a m_1 está sobre um pistão que vibra, verticalmente, em movimento harmônico simples descrito pela fórmula $y = A \operatorname{sen} \omega t$. (*a*) Mostre que o bloco abandonará o pistão se $\omega^2 A > g$. (*b*) Se $\omega^2 A = 3g$ e $A = 15$ cm, em que momento o bloco abandonará o pistão?

97 •• Mostre que, nas situações mostradas na Figura 14-35*a* e 14-35*b*, o corpo oscila com uma freqüência $f = (1/2\pi)\sqrt{k_{ef}/m}$, onde k_{ef} é dado por (*a*) $k_{ef} = k_1 + k_2$ e (*b*) $1/k_{ef} = 1/k_1 + 1/k_2$. *Dica: Determine a magnitude da força resultante F sobre o corpo para um pequeno deslocamento x e escreva $F = -k_{ef}\,x$. Note que na Parte (b) as molas são distendidas de quantidades diferentes, cuja soma é x.*

98 •• **RICO EM CONTEXTO** Durante um terremoto, um piso horizontal oscila horizontalmente em um movimento harmônico simples aproximado. Suponha que ele oscile em uma única freqüência, com

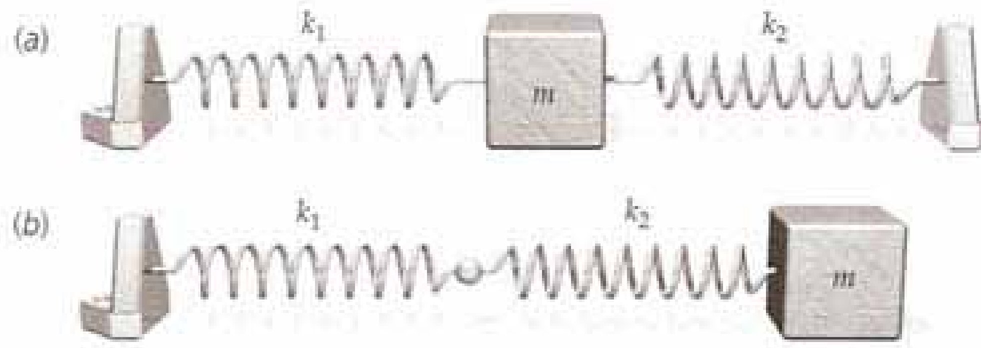


FIGURA 14-35 Problema 97

0,80 s de período. (*a*) Após o terremoto, você examina o vídeo do piso em movimento e verifica que uma caixa sobre o piso começou a escorregar quando a amplitude atingiu 10 cm. De posse destes dados, determine o coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso. (*b*) Se o coeficiente de atrito entre a caixa e o piso for 0,40, qual será a amplitude máxima de vibração antes da caixa escorregar?

99 •• Se prendermos dois blocos, de massas m_1 e m_2, a cada uma das extremidades de uma mola de constante de força k, e os fizermos oscilar largando-os do repouso após distender a mola, mostre que a freqüência de oscilação é dada por $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, onde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema.

100 •• Você verifica, no laboratório de química, que um dos modos de vibração da molécula de HCl tem uma freqüência de $8{,}969 \times 10^{13}$ Hz. Usando o resultado do Problema 99, determine a "constante de mola efetiva" entre os átomos de H e de Cl na molécula de HCl.

101 •• Se um átomo de hidrogênio no HCl fosse substituído por um átomo de deutério (formando o DCl), no Problema 100, qual seria a nova freqüência de vibração da molécula? O deutério consiste em 1 próton e 1 nêutron.

102 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Um bloco, de massa m, em repouso sobre uma mesa horizontal, é preso a uma mola que tem uma constante de força k, como mostrado na Figura 14-36. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é μ_c. A mola está frouxa se o bloco está na origem ($x = 0$) e o sentido $+x$ é para a direita. A mola é distendida de um comprimento A, com $kA > \mu_c mg$, e o bloco é liberado. (*a*) Aplique a segunda lei de Newton ao bloco para obter uma equação para sua aceleração d^2x/dt^2 durante o primeiro meio ciclo, quando o bloco se move para a esquerda. Mostre que esta equação pode ser escrita como $d^2x'/dt^2 = -\omega^2 x'$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$ e $x' = x - x_0$, com $x_0 = \mu_c mg/k = \mu_c g/\omega^2$. (*b*) Repita a Parte (*a*) para o segundo meio ciclo, quando o bloco se move para a direita e mostre que $d^2x''/dt^2 = -\omega^2 x''$, onde $x'' = x + x_0$ e x_0 tem o mesmo valor. (*c*) Use uma **planilha eletrônica** para plotar os cinco primeiros meios ciclos, com $A = 10x_0$. Descreva o movimento, se existente, após o quinto meio ciclo.

FIGURA 14-36 Problema 102

103 ••• A Figura 14-37 mostra um meio cilindro maciço e homogêneo, de massa M e raio R, em repouso sobre uma superfície horizontal. Se um dos lados deste sólido for ligeiramente empurrado para baixo e largado, ele oscilará em torno de sua posição de equilíbrio. Determine o período desta oscilação.

FIGURA 14-37 Problema 103

104 ••• Um túnel reto é cavado através da Terra, como mostrado na Figura 14-38. Suponha as paredes do túnel sem atrito. (*a*) A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma partícula de massa m que dista r do centro da Terra, quando $r < R_T$, é $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$, onde M_T é a massa da Terra e R_T é o seu raio. Mostre que a força resultante sobre uma partícula de massa m que dista x do centro do túnel é dada por $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$ e que o movimento da partícula é, portanto, um movimento harmônico simples. (*b*) Mostre que o período do movimento é independente do comprimento do túnel e é dado por $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$. (*c*) Determine o valor numérico do período, em minutos.

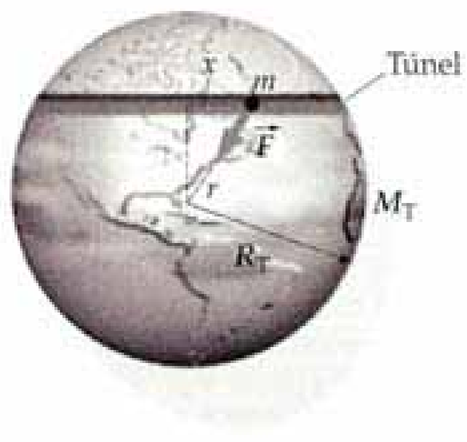


FIGURA 14-38 Problema 104

105 ••• **VÁRIOS PASSOS** Neste problema, você deve deduzir a expressão para a potência média desenvolvida por uma força de excitação sobre um oscilador forçado (Figura 14-39).

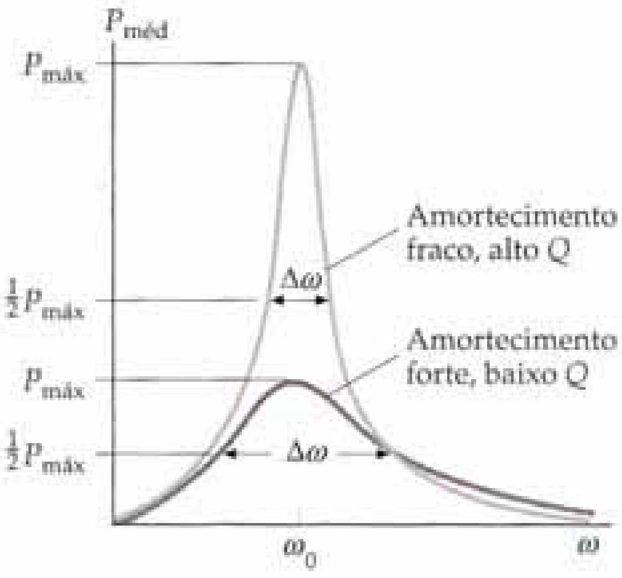


FIGURA 14-39 Problema 105

(*a*) Mostre que a potência instantânea desenvolvida pela força de excitação é dada por $P = Fv = -A\omega F_0 \cos \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \delta)$.

(*b*) Use a identidade $\operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$ para mostrar que a equação da Parte (*a*) pode ser escrita como $P = A\omega F_0 \operatorname{sen} \delta \cos^2 \omega t - A\omega F_0 \cos \delta \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t$.

(*c*) Mostre que o valor médio do segundo termo do resultado da Parte (*b*), sobre um ou mais períodos, é zero, e que, portanto, $P_{méd} = \frac{1}{2} A\omega F_0 \operatorname{sen} \delta$.

(*d*) Considerando a Equação 14-56 para tan δ, construa um triângulo retângulo no qual o lado oposto ao ângulo δ é $b\omega$ e o lado adjacente é $m(\omega_0^2 - \omega^2)$, e use este triângulo para mostrar que

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0}$$

(*e*) Use o resultado da Parte (*d*) para eliminar ωA do resultado da Parte (*c*), de forma a poder escrever a potência média desenvolvida como

$$P_{méd} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b} \operatorname{sen}^2 \delta = \frac{1}{2}\left[\frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}\right]$$

106 ••• **VÁRIOS PASSOS** Neste problema, você deve usar o resultado do Problema 105 para deduzir a Equação 14-51. Na ressonância, o denominador da fração entre colchetes no Problema 105(*e*) é $b^2\omega_0^2$ e $P_{méd}$ tem seu valor máximo. Para uma ressonância estreita, a variação de ω no numerador desta equação pode ser desprezada. Então, a potência desenvolvida terá a metade de seu valor máximo quando os valores de ω forem tais que o denominador seja igual a $2b^2\omega_0^2$.

(*a*) Mostre que, neste caso, ω satisfaz $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega + \omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$.

(*b*) Usando a aproximação $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, mostre que $\omega - \omega_0 \approx \pm b/2m$.

(*c*) Expresse b em termos de Q.

(*d*) Combine os resultados das Partes (*b*) e (*c*) para mostrar que há dois valores de ω para os quais a potência desenvolvida tem a metade do valor na ressonância, dados por

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}$$

Logo, $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$, o que é equivalente à Equação 14-51.

107 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** O potencial de Morse, muito usad para modelar forças interatômicas, pode ser escrito na forma $U(r) =$ $D(1 - e^{-\beta(r - r_0)})^2$, onde r é a distância entre os dois núcleos atômico: (*a*) Usando uma **planilha eletrônica**, ou uma **calculadora gráfica**, faç um gráfico do potencial de Morse usando $D = 5{,}00$ eV, $\beta = 0{,}20$ nm e $r_0 = 0{,}750$ nm. (*b*) Determine, para este potencial, a separação d equilíbrio e a "constante de força" para pequenos deslocamentos partir do equilíbrio. (*c*) Determine uma expressão para a freqüênci de oscilação de uma molécula diatômica *homonuclear* (isto é, de doi átomos iguais), com cada átomo tendo massa m.

do sistema aumenta e a energia potencial diminui. Quando o corpo está passando pela sua posição de equilíbrio, sua energia cinética é máxima, a energia potencial do sistema é zero e a energia total é toda ela cinética.

Após passar pelo ponto de equilíbrio, a energia cinética do corpo começa a diminuir e a energia potencial do sistema cresce até que o corpo pare momentaneamente, novamente, em seu deslocamento máximo (agora, do outro lado). Em qualquer momento, a soma das energias potencial e cinética é constante. A Figura 14-7*b* e *c* mostram os gráficos de U e de K em função do tempo. Estas curvas possuem o mesmo perfil, exceto que uma é zero quando a outra é máxima. Seus valores médios, sobre um ou mais ciclos, são iguais e, porque $U + K = E$, seus valores médios são dados por

$$U_{\text{méd}} = K_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}E \qquad \text{14-18}$$

Na Figura 14-8, a energia potencial U é plotada em função de x. A energia total E é constante e, portanto, representada por uma reta horizontal. Esta reta intercepta a curva da energia potencial em $x = A$ e em $x = -A$. Nestes dois pontos, chamados de **pontos de retorno**, os corpos oscilantes revertem o sentido do movimento e passam a voltar à posição de equilíbrio. Como $U \leq E$, o movimento é restrito a $-A \leq x \leq +A$.

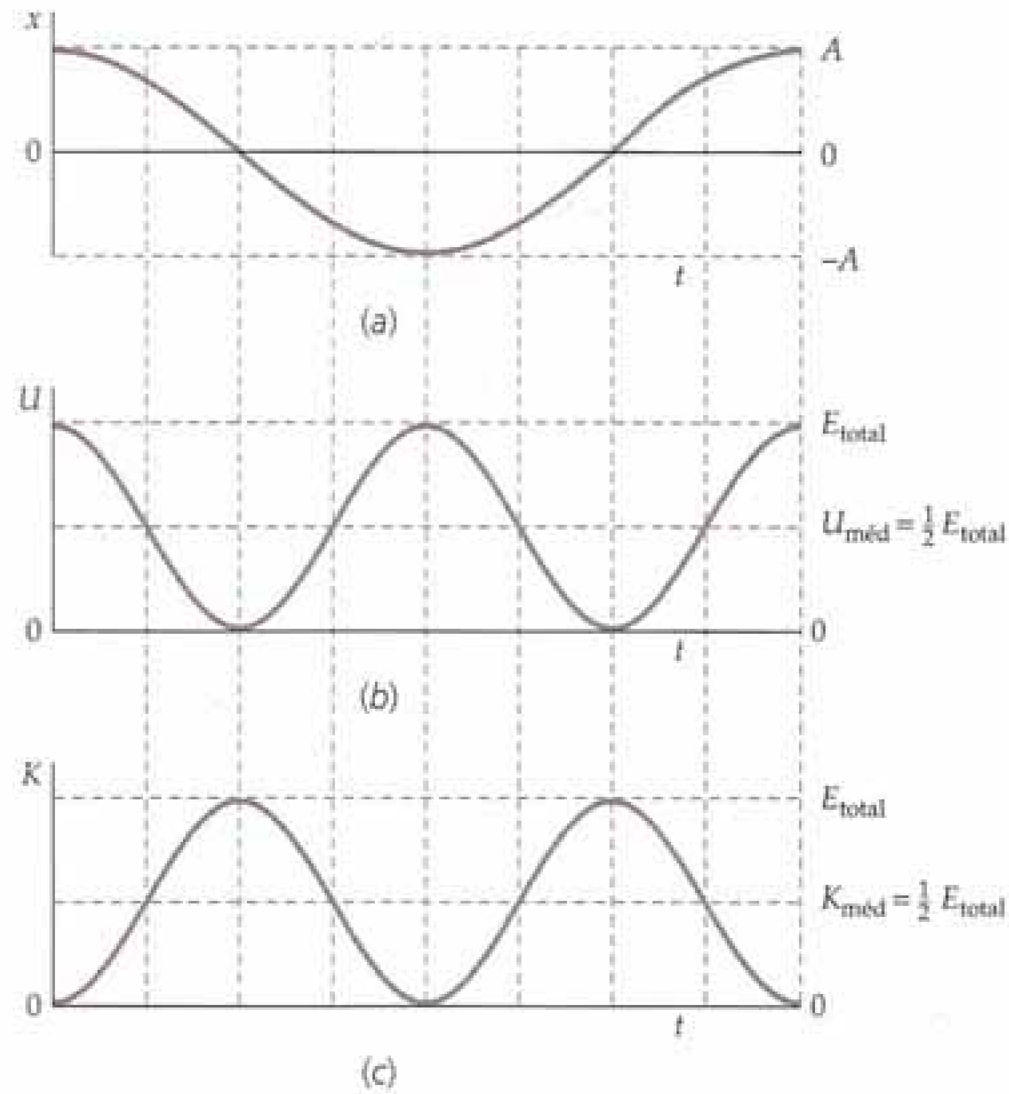


FIGURA 14-7 Gráficos de x, U e K *versus* t.

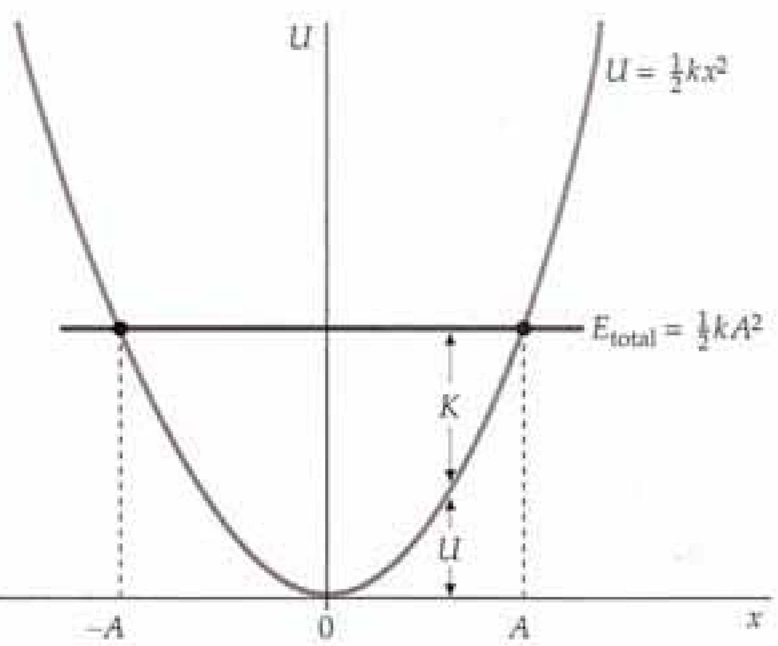


FIGURA 14-8 A função energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ para um corpo de massa m preso a uma mola (sem massa) de constante de força k. A linha horizontal representa a energia mecânica total E_{total} para uma amplitude A. A energia cinética K é representada pela distância vertical $K = E_{total} - U$. $E_{total} \geq U$, de modo que o movimento é restrito a $-A \leq x \leq +A$.

Exemplo 14-5 Energia e Rapidez de um Corpo Oscilante

Um corpo de 3,0 kg, preso a uma mola, oscila com uma amplitude de 4,0 cm e um período de 2,0 s. (*a*) Qual é a energia total? (*b*) Qual é a rapidez máxima do corpo? (*c*) Em qual posição x_1 a rapidez do corpo é a metade de seu valor máximo?

SITUAÇÃO (*a*) A energia total pode ser encontrada a partir da amplitude e da constante de força, e a constante de força pode ser encontrada a partir da massa e do período. (*b*) A rapidez máxima ocorre quando a energia cinética é igual à energia total. (*c*) Podemos relacionar a posição com a rapidez, usando conservação de energia.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Escreva a energia total E em termos da constante de força k e da amplitude A:
$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

2. A constante de força está relacionada com o período e com a massa:
$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

CAPÍTULO 15

A TRIPULAÇÃO DE UMA EMBARCAÇÃO DA NOAA (*NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION* – ADMINISTRAÇÃO NACIONAL AMERICANA PARA ASSUNTOS OCEÂNICOS E ATMOSFÉRICOS) POSICIONA UMA BÓIA DART (*DEEP-OCEAN ASSESSMENT AND REPORTING OF TSUMANIS* – AVALIAÇÃO E DESCRIÇÃO DE TSUMANIS EM ÁGUAS OCEÂNICAS PROFUNDAS) NO PACÍFICO NORTE. O TERREMOTO DE DEZEMBRO DE 2004 NO OCEANO ÍNDICO (TAMBÉM CONHECIDO COMO O TERREMOTO DE SUMATRA-ANDAMAN), COM SEU CONSEQÜENTE TSUNAMI, CAUSOU A PERDA DE CENTENAS DE MILHARES DE VIDAS. DISPOSITIVOS DETECTORES DE TSUNAMIS COMO O DART PODEM AJUDAR A PREVENIR ESTE TIPO DE PERDA CATASTRÓFICA, PREVENDO QUANDO ONDAS GIGANTES ATINGIRÃO A TERRA. *(Cortesia de NOAA e Harbor Branch Oceanographic Institution.)*

Ondas Progressivas

? Por que as ondas de tsunamis viajam tão mais rapidamente do que as ondas oceânicas superficiais?

(Veja o Exemplo 15-2.)

Tratamos, no Capítulo 14, do movimento oscilatório e de coisas que se movem com padrões repetitivos. Neste capítulo, ainda tratamos de oscilações, mas explorando a física das ondas. Ondas se propagam através de vários meios, tais como água, ar e terra, e se propagam pelo espaço onde não existe meio de propagação. Pense nas ondas oceânicas, na música, nos terremotos, na luz solar. Ondas transportam energia e quantidade de movimento linear, mas não transportam matéria.

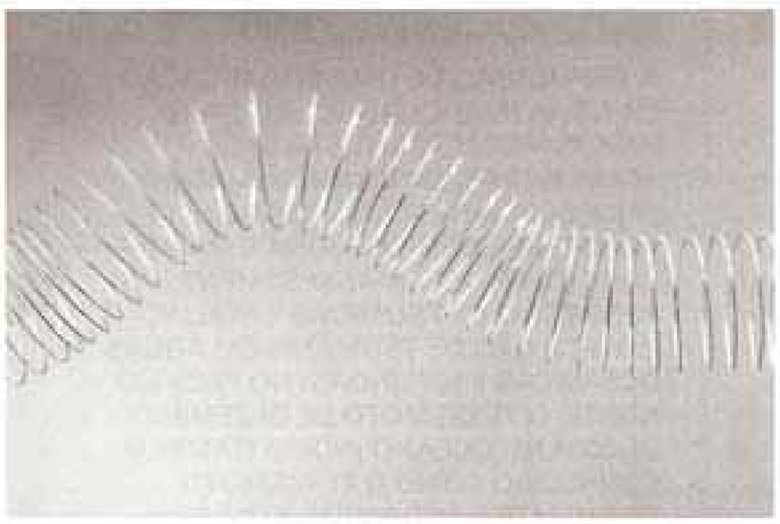
O estudo do movimento ondulatório tem levado a muitas invenções fascinantes. Radares de polícia e abridores de portas de garagem empregam, ambos, as ondas eletromagnéticas para objetivos bem diferentes — a determinação da rapidez de motoristas e a abertura de portas a alguns metros de distância. Equipamentos sonográficos, que usam ondas ultra-sônicas, permitem aos profissionais da medicina obter imagens notáveis como as de um feto no útero da mãe. Uma compreensão de como se comportam as ondas ao se depararem com obstáculos ajuda os arquitetos a criarem as melhores condições acústicas em salas de concertos.

Neste capítulo discutimos o movimento ondulatório simples. Examinamos ondas periódicas, em particular as ondas harmônicas. Também discutimos como as ondas se movem em três dimensões e exploramos o que ocorre quando ondas incidem sobre obstáculos. Finalmente, vemos o efeito Doppler e discutimos sua relevância para o mundo que nos cerca.

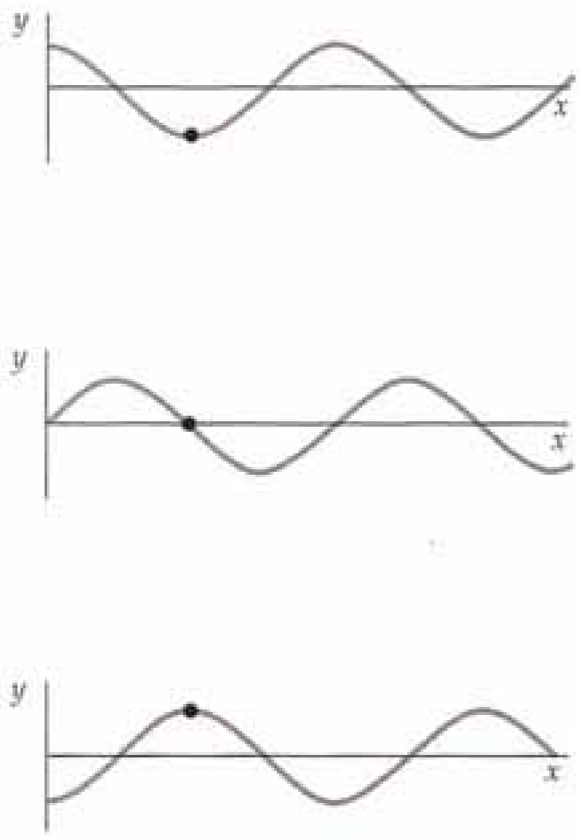
15-1 MOVIMENTO ONDULATÓRIO SIMPLES

ONDAS TRANSVERSAIS E ONDAS LONGITUDINAIS

Uma onda mecânica é causada por uma perturbação em um meio. Por exemplo, quando uma corda esticada é tocada, a perturbação produzida se propaga ao longo da corda como uma onda. A perturbação, neste caso, é a mudança da forma da corda, a partir de sua forma de equilíbrio. A propagação é conseqüência da interação entre cada segmento da corda e os segmentos adjacentes. Os segmentos da corda se movem no sentido transversal (perpendicular) da corda, enquanto os pulsos se propagam, para frente e para trás, ao longo da corda. Ondas como estas, em que o movimento do meio (a corda) é perpendicular à direção de propagação da perturbação, são chamadas de ondas **transversais** (Figura 15-1). Ondas nas quais o movimento do meio se dá ao longo da (paralelo à) direção de propagação da perturbação são chamadas de ondas **longitudinais** (Figura 15-2). Ondas sonoras são exemplos de ondas longitudinais. Quando ondas sonoras se propagam em um meio (um gás, um líquido ou um sólido), as moléculas do meio oscilam (movem-se para frente e para trás) ao longo da linha de propagação, alternadamente comprimindo ou rarefazendo (expandindo) o meio.



(a)



(b)

FIGURA 15-1 (*a*) Pulso de onda transversal em uma mola. O movimento do meio de propagação é perpendicular à direção do movimento da perturbação. (*b*) Três desenhos sucessivos de uma onda transversal se propagando para a direita em uma corda. Um elemento da corda (indicado pelo ponto) se move para cima e para baixo enquanto as cristas e os vales da onda viajam para a direita. *(Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

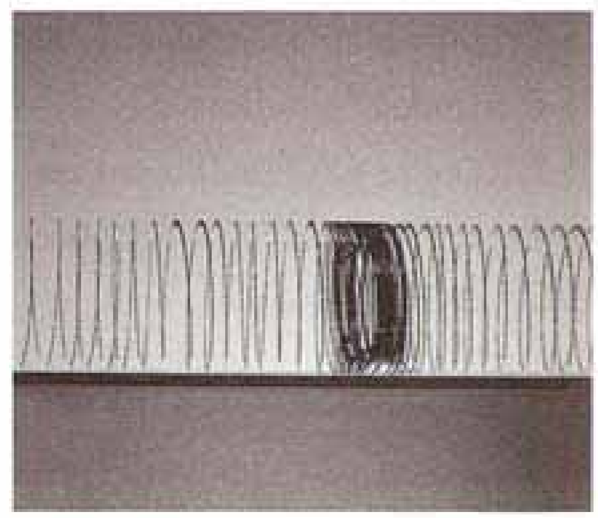


FIGURA 15-2 Pulso de onda longitudinal em uma mola. A perturbação é paralela à direção do movimento da onda. *(Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

PULSOS DE ONDA

A Figura 15-3*a* mostra um pulso em uma corda no tempo $t = 0$. A forma da corda neste instante pode ser representada por alguma função $y = f(x)$. Em um tempo posterior (Figura 15-3*b*), o pulso está mais adiante, na corda. Em um novo sistema de coordenadas, com a origem O', que se move para a direita com a mesma rapidez do pulso, o pulso está estacionário. A corda é descrita, neste referencial, por $f(x')$ em todos os tempos. As coordenadas dos dois referenciais são relacionadas por

$$x' = x - vt$$

e, portanto, $f(x') = f(x - vt)$. Logo, a forma da corda no referencial original é

$$y = f(x - vt) \qquad \text{onda movendo-se no sentido } +x \qquad 15\text{-}1$$

A mesma linha de raciocínio, para um pulso se movendo para a esquerda, nos leva a

$$y = f(x + vt) \qquad \text{onda movendo-se no sentido } -x \qquad 15\text{-}2$$

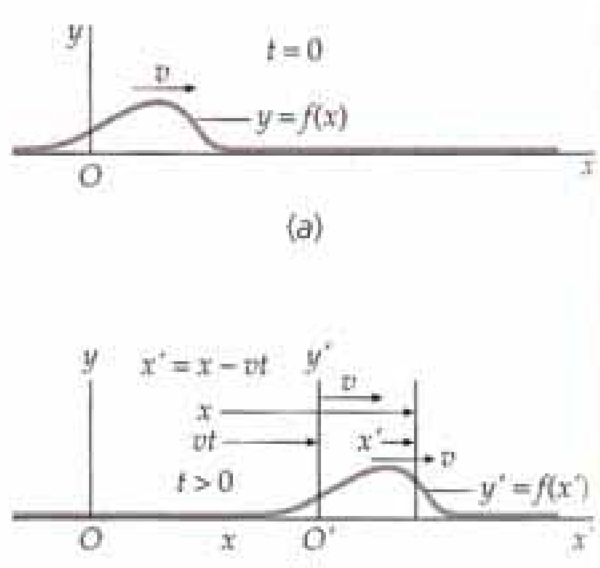


FIGURA 15-3

Nas duas expressões, v é a rapidez de propagação da onda. (Como v é uma rapidez e não uma velocidade, será sempre uma quantidade positiva.) A função $y = f(x - vt)$ é chamada de **função de onda**. Para ondas em uma corda, a função de onda representa o deslocamento transversal da corda. Para ondas sonoras no ar, a função de onda pode ser o deslocamento longitudinal das moléculas de ar, ou a pressão do ar. Estas funções de onda são soluções de uma equação diferencial chamada de *equação da onda*, que pode ser deduzida usando-se as leis de Newton.

RAPIDEZ DAS ONDAS

Uma propriedade geral das ondas é que sua rapidez em relação ao meio depende de propriedades do meio, mas é independente do movimento da fonte de ondas. Por exemplo, a rapidez do som da buzina de um carro depende apenas de propriedades do ar, e não do movimento do carro.

Para pulsos de onda em uma corda, podemos demonstrar que, quanto maior a tração, mais rapidamente se propagarão as ondas. Além disso, ondas se propagam mais rapidamente em uma corda leve do que em uma corda pesada, quando submetidas à mesma tração. Se F_T é a tração (usamos F_T para a tração, e não T, porque usamos T para o período) e μ é a massa específica linear (massa por unidade de comprimento), então a rapidez da onda é

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \qquad 15\text{-}3$$

RAPIDEZ DAS ONDAS EM UMA CORDA

Exemplo 15-1 A Fuga do Mede-palmos

Uma lagarta mede-palmos percorre a corda de um varal (Figura 15-4). A corda tem 25 m de comprimento, uma massa de 1,0 kg, e é mantida esticada por um bloco pendurado de 10 kg, como mostrado. Vivian está pendurando seu maiô a 5,0 m de uma das extremidades, quando ela vê a lagarta a 2,5 cm da outra extremidade. Ela dá um puxão na corda, enviando um terrível pulso de 3,0 cm de altura ao encontro da lagarta. Se a lagarta rasteja a 1,0 in/s, ela conseguirá chegar na extremidade esquerda do varal antes que o pulso a atinja?

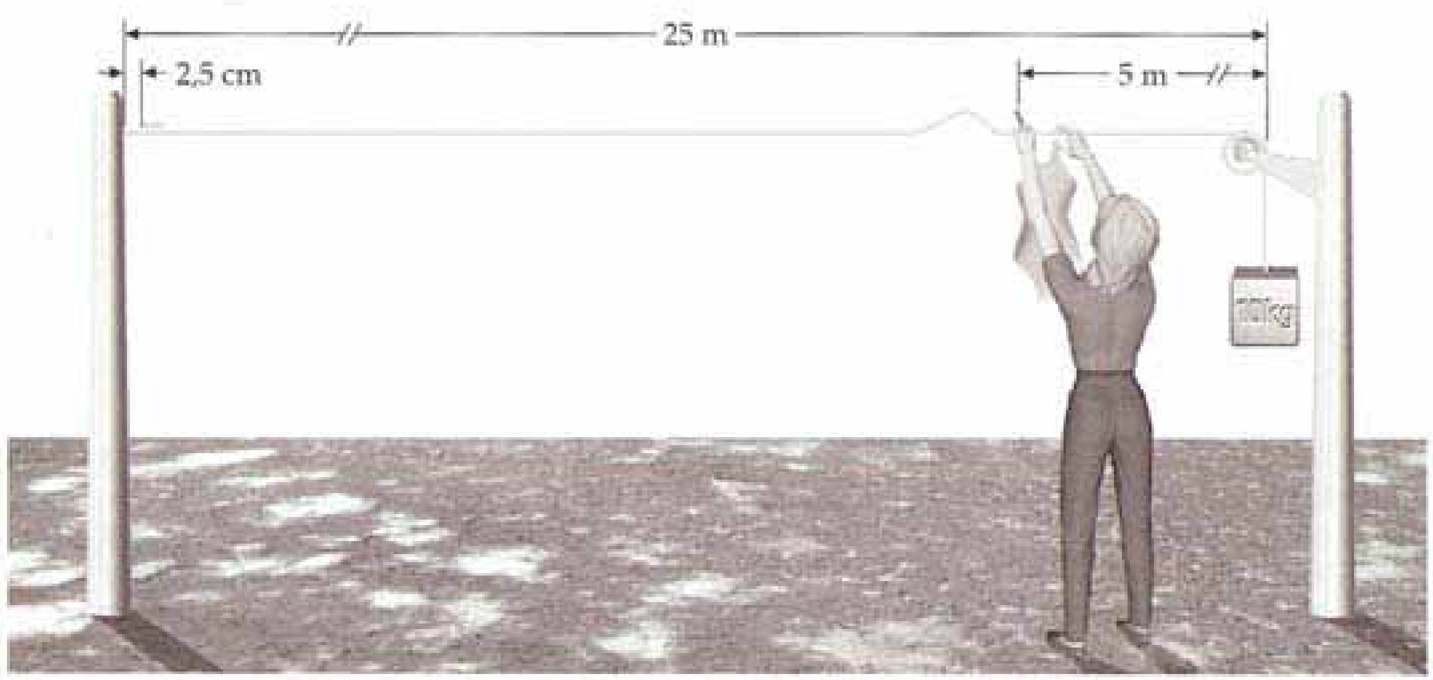


FIGURA 15-4

SITUAÇÃO Precisamos saber a rapidez da onda. Para isto, usamos a fórmula $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Seja m_c a massa da corda e $m = 10$ kg a massa do bloco pendurado.

SOLUÇÃO

1. A rapidez do pulso está relacionada à tração F_T e à massa específica linear μ: $\quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

2. Expresse a massa específica linear e a tração em termos dos parâmetros dados: $\quad \mu = \frac{m_c}{L} \quad$ e $\quad F_T = mg$

3. Substitua estes valores para calcular a rapidez: $\quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c}} = \sqrt{\frac{(10\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(25\text{ m})}{1{,}0\text{ kg}}} = 49{,}5\text{ m/s}$

4. Use esta rapidez para determinar o tempo que o pulso leva para percorrer os 20 m até a extremidade mais distante: $\quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20\text{ m}}{49{,}5\text{ m/s}} = 0{,}40\text{ s}$

5. Determine o tempo que a lagarta deve levar para percorrer os 2,5 cm que a separam da extremidade da corda, viajando a 1,0 in/s:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{2,5\text{ cm}}{1\text{ in/s}} \times \frac{1\text{ in}}{2,54\text{ cm}} = 0,98\text{ s}$$

$\Delta t' > \Delta t$ O mede-palmos não vence o pulso.

CHECAGEM O pulso viaja a 49 m/s e a lagarta viaja a 1,0 in/s = 0,025 m/s. O pulso viaja quase 2000 mais rapidamente do que a lagarta. Não admira que a lagarta não consiga vencer o pulso.

PROBLEMA PRÁTICO 15-1 Mostre que a unidade de $\sqrt{F_T/\mu}$ é o m/s, com F_T em newtons e μ em kg/m.

! Enquanto o pulso de onda do Exemplo 15-1 se move para a esquerda a 49 m/s, isto não acontece com as partículas que fazem parte da corda. O movimento delas é primeiro para cima e depois para baixo, enquanto o pulso passa por elas.

Exemplo 15-2 A Rapidez de uma Onda de Gravidade Rasa

Ondas oceânicas superficiais são possíveis devido à gravidade e são chamadas de *ondas de gravidade*. Ondas de gravidade são classificadas como ondas rasas se a profundidade da água for menor do que a metade do comprimento de onda. A rapidez de ondas de gravidade depende da profundidade e é dada por $v = \sqrt{gh}$, onde h é a profundidade. Uma onda de gravidade em mar aberto, onde a profundidade é de 5,0 km, possui um comprimento de onda de 100 km. (*a*) Qual é a rapidez desta onda? (*b*) Ela é uma onda rasa?

SITUAÇÃO Use $v = \sqrt{gh}$ para calcular a rapidez da onda. Verifique se a profundidade é maior do que a metade do comprimento de onda informado.

SOLUÇÃO

(*a*) Usando $v = \sqrt{gh}$, calcule a rapidez da onda:

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{(9,81\text{ m/s}^2)(5000\text{ m})} = \boxed{221\text{ m/s} = 797\text{ km/h}}$$

(*b*) A onda será uma onda rasa se a profundidade for menor do que a metade do comprimento de onda informado:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{5\text{ km}}{100\text{ km}} = \frac{1}{20}$$

A profundidade é igual a um vinte avos do comprimento de onda, logo a onda é

$\boxed{\text{definitivamente uma onda rasa.}}$

CHECAGEM Sabe-se que tsunamis podem viajar a 800 km/h (~500 mi/h) em mar aberto, logo nosso resultado é plausível.

INDO ALÉM Suponha que um tsunami tenha sido causado por um terremoto que elevou uma região do fundo do mar, de 50 km de largura, de uma altura aproximada de um metro. Tal tsunami terá um comprimento de onda de ~100 km, e a altura da onda poderá ser de apenas um metro, aproximadamente, em mar aberto. Tsunamis viajam tão rapidamente em mar aberto porque possuem comprimentos de onda maiores do que a profundidade do mar. Ondas oceânicas típicas possuem comprimentos de onda de 100 m ou menos, o que é bem menos do que a profundidade em alto mar. Estas ondas são ondas de águas profundas, e ondas de águas profundas viajam muito mais lentamente do que as ondas rasas. Em águas muito rasas, como muito perto da praia, outros fatores devem ser considerados quando se calcula a rapidez das ondas.

Para ondas sonoras em um fluido como o ar ou a água, a rapidez v é dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad 15\text{-}4$$

onde ρ é a massa específica de equilíbrio do meio e B é o módulo volumétrico* (Equação 13-6). Comparando as Equações 15-3 e 15-4 podemos ver que, em geral, a rapidez das ondas depende de uma propriedade elástica do meio (a tração, para ondas em cordas, e o módulo volumétrico, para ondas sonoras) e de uma propriedade inercial do meio (a massa específica linear ou a massa específica volumétrica).

* O módulo volumétrico é o negativo da razão entre a variação de pressão e a variação relativa de volume (Capítulo 13):

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Para ondas sonoras em um gás como o ar, o módulo volumétrico[†] é proporcional à pressão, que, por sua vez, é proporcional à massa específica ρ e à temperatura absoluta T do gás. A razão B/ρ é, portanto, independente da massa específica e é simplesmente proporcional à temperatura absoluta T. No Capítulo 17 mostramos que, neste caso, a Equação 15-4 é equivalente a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad 15\text{-}5$$

RAPIDEZ DO SOM EM UM GÁS

Nesta equação, T é a temperatura absoluta medida em kelvins (K), que se relaciona com a temperatura Celsius t_C por

$$T = t_C + 273{,}15 \qquad 15\text{-}6$$

A constante adimensional γ depende do tipo de gás. Para moléculas diatômicas, como O_2 e N_2, γ vale 7/5. Como O_2 e N_2 compreendem 98 por cento da atmosfera, 7/5 também é o valor de γ para o ar. (Para gases compostos de moléculas monoatômicas, como o He, γ vale 5/3.)[*] A constante R é a constante universal dos gases

$$R = 8{,}3145\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)} \qquad 15\text{-}7$$

e M é a massa molar do gás (isto é, a massa de um mol do gás), que, para o ar, vale

$$M = 29{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}$$

Exemplo 15-3 Rapidez do Som no Ar — *Tente Você Mesmo*

A temporada de competições de corrida começa, em uma escola do nordeste americano, no início do mês de abril, quando a temperatura do ar beira os 13,0°C. Ao final da temporada, o clima já é mais quente e a temperatura já beira os 33,0°C. Calcule a rapidez do som produzido pela pistola do largador, no ar, a (*a*) 13,0°C e (*b*) 33,0°C. Naturalmente, os corredores podem largar ao avistarem a fumaça da pistola, não precisando esperar que o som do tiro chegue a eles.

SITUAÇÃO A rapidez pode ser obtida usando a Equação 15-5, o valor 7/5 para γ (gás diatômico) e $29{,}0 \times 10^{-3}$ kg/mol para M.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
(*a*) 1. Use a Equação 15-5 ($v = \sqrt{\gamma RT/M}$) e os valores fornecidos para determinar a temperatura a 13,0°C. (Não esqueça de converter a temperatura para kelvins.)	$v_a = \sqrt{\frac{\gamma RT_a}{M}} = \boxed{339\ \text{m/s}}$
(*b*) 1. Da Equação 15-5, podemos ver que v é proporcional a $\sqrt{T}$. Use esta proporcionalidade para expressar a razão entre a rapidez a 33,0°C e a rapidez a 13,0°C:	$\frac{v_b}{v_a} = \sqrt{\frac{T_b}{T_a}}$
2. Calcule v a 33,0°C:	$v_b = \boxed{351\ \text{m/s}}$

CHECAGEM O resultado da Parte (*b*) é maior do que o da Parte (*a*). Isto é esperado, já que a rapidez do som aumenta com o aumento da temperatura.

INDO ALÉM Vemos, com este exemplo, que a rapidez do som no ar é cerca de 343 m/s a 20°C. (Esta temperatura é, comumente, referida como temperatura ambiente.)

PROBLEMA PRÁTICO 15-2 Para o hélio, $M = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/mol e $\gamma = 5/3$. Qual é a rapidez das ondas sonoras no gás hélio, a 20,0°C?

[†] O **módulo volumétrico isotérmico**, que descreve variações que ocorrem à temperatura constante, difere do **módulo volumétrico adiabático**, que descreve variações que ocorrem sem transferência de calor. Para ondas sonoras a freqüências audíveis, as variações de pressão acontecem tão rapidamente que não chega a ocorrer transferência de calor apreciável; logo, o módulo volumétrico apropriado é o módulo volumétrico adiabático.

[*] Estes valores de γ para gases monoatômicos e diatômicos são estabelecidos na Seção 9 do Capítulo 18.

Dedução de v para ondas em uma corda A Equação 15-3 ($v = \sqrt{F_T/\mu}$) pode ser obtida aplicando-se o teorema do impulso–quantidade de movimento linear ao movimento da corda. Suponha que você esteja segurando uma das extremidades de uma longa corda esticada, submetida a uma tração F_T, e com massa por comprimento unitário μ uniforme. (A outra extremidade da corda está presa a uma parede distante.) Repentinamente, você começa a mover sua mão para cima com uma rapidez constante u. Após um curto tempo, a corda parece com o que é mostrado na Figura 15-5, com o ponto mais à direita do segmento inclinado movendo-se para a direita com a rapidez de onda v e com todo o segmento inclinado se movendo para cima com a rapidez u. Aplicando o teorema do impulso–quantidade de movimento linear ($\vec{F}_{méd}\,\Delta t = \Delta\vec{p}$) à corda, obtemos

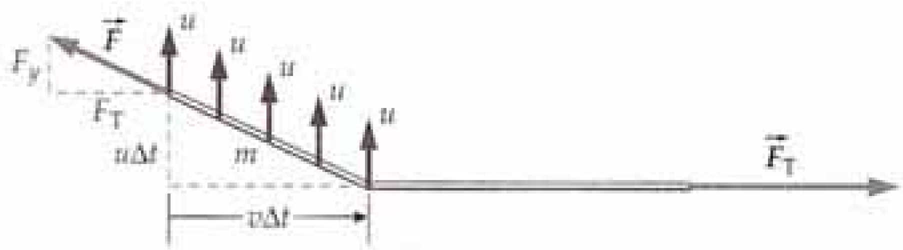


FIGURA 15-5 Enquanto a extremidade da corda se move para cima com rapidez constante u, o ponto onde a corda passa de horizontal a inclinada se move para a direita com a rapidez da onda v.

$$F_y\,\Delta t = mu - 0 \qquad 15\text{-}8$$

onde F_y é a componente para cima da força exercida por sua mão sobre a corda, m é a massa do segmento inclinado e Δt é o tempo que sua mão levou subindo. Os dois triângulos da figura são semelhantes; logo,

$$\frac{F_y}{F_T} = \frac{u\,\Delta t}{v\,\Delta t} \qquad \text{ou} \qquad F_y = \frac{u}{v}F_T$$

Substituindo F_y na Equação 15-8, fica

$$\frac{u}{v}F_T\,\Delta t = (\mu v\,\Delta t)u$$

onde m foi substituído por $\mu v\,\Delta t$. Resolvendo para v, fica

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

que é a expressão para a rapidez da onda dada na Equação 15-3.

Na discussão seguinte, mostramos que este resultado é verdadeiro não apenas para um pulso de onda com a forma da Figura 15-5, mas também para pulsos com uma grande variedade de formas.

*A EQUAÇÃO DA ONDA

Podemos aplicar a segunda lei de Newton a um segmento da corda para deduzir uma equação diferencial conhecida como equação da onda, que relaciona as derivadas espaciais de $y(x,t)$ com suas derivadas temporais. A Figura 15-6 mostra um segmento da corda. Consideramos apenas pequenos ângulos θ_1 e θ_2. Então, o comprimento do segmento é aproximadamente Δx e sua massa é $m = \mu\,\Delta x$, onde μ é a massa por comprimento unitário da corda. Mostramos, primeiro, que, para pequenos deslocamentos verticais, a força horizontal resultante sobre um segmento é zero e a tração é uniforme e constante. A força resultante na direção horizontal é zero. Isto é,

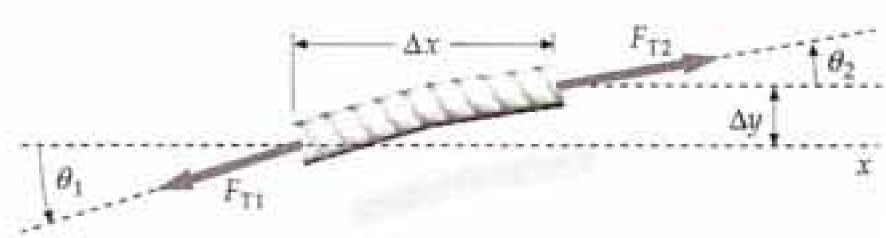


FIGURA 15-6 Segmento de uma corda tensionada, usado para a dedução da equação da onda. A força vertical resultante sobre o segmento é F_{T2} sen $\theta_2 - F_{T1}$ sen θ_1, onde F é a tração na corda. A equação da onda é deduzida aplicando-se a segunda lei de Newton ao segmento.

$$\Sigma F_x = F_{T2}\cos\theta_2 - F_{T1}\cos\theta_1 = 0$$

onde θ_2 e θ_1 são os ângulos mostrados e F_T é a tração na corda. Como supomos ângulos pequenos, podemos aproximar cos θ por 1, para cada ângulo. Então, a força horizontal resultante sobre o segmento pode ser escrita como

$$\Sigma F_x = F_{T2} - F_{T1} = 0$$

Assim,

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

O segmento se move verticalmente e a força resultante nesta direção é

$$\Sigma F_y = F_T\,\text{sen}\,\theta_2 - F_T\,\text{sen}\,\theta_1$$

Como supomos ângulos pequenos, podemos aproximar sen θ por tan θ, para cada ângulo. Então, a força vertical resultante sobre o segmento de corda pode ser escrita como

$$\sum F_y = F_T(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) \approx F_T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

A tangente do ângulo formado pela corda com a horizontal é a inclinação da linha tangente à corda. A inclinação S é a primeira derivada de $y(x,t)$ em relação a x, para t constante. Uma derivada de uma função de duas variáveis, em relação a uma delas, a outra variável sendo mantida constante, é chamada de **derivada parcial**. A derivada parcial de y em relação a x é escrita $\partial y/\partial x$. Assim, temos

$$S = \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Logo,

$$\sum F_y = F_T(S_2 - S_1) = F_T\,\Delta S$$

onde S_1 e S_2 são as inclinações das duas extremidades do segmento de corda e ΔS é a variação da inclinação. Fazendo esta força resultante igual à massa $\mu\,\Delta x$ vezes a aceleração $\partial^2 y/\partial t^2$, fica

$$F_T\,\Delta S = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{ou} \qquad F_T\frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad 15\text{-}9$$

No limite $\Delta x \to 0$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Então, no limite $\Delta x \to 0$, a Equação 15-9 se torna

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad 15\text{-}10a$$

A Equação 15-10*a* é a **equação da onda** para uma corda esticada.

Mostramos, agora, que a equação da onda é satisfeita por qualquer função de $x - vt$. Seja $\alpha = x - vt$ e considere qualquer função de onda

$$y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

Usamos y' para a derivada de y em relação a α. Então, pela regra da cadeia para derivadas,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial\alpha}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

Como

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v$$

temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -vy'$$

Tomando a segunda derivada, obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{dy'}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = +v^2 y''$$

Então,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad 15\text{-}10b$$

EQUAÇÃO DA ONDA

O mesmo resultado (Equação 15-10*b*) também pode ser obtido para qualquer função de $x + vt$. Comparando as Equações 15-10*a* e 15-10*b*, vemos que a rapidez de propagação da onda é $v = \sqrt{F_T/\mu}$, que é a Equação 15-3.

Exemplo 15-4 Função de Onda Harmônica

Na seção seguinte, ondas harmônicas são definidas pela função de onda $y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$, onde $v = \omega/k$. Mostre que esta função de onda satisfaz à Equação 15-10*b*, calculando explicitamente as segundas derivadas.

SITUAÇÃO Podemos mostrar isto calculando explicitamente $\partial^2y/\partial x^2$ e $\partial^2y/\partial t^2$, onde $y = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$, e substituindo na Equação 15-10*b*.

SOLUÇÃO

1. Calcule a segunda derivada parcial de y em relação a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A\,\text{sen}(kx - \omega t)] = A\cos(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}kA\cos(kx - \omega t) = -kA\,\text{sen}(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x}$$

$$= -k^2A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

2. De forma similar, calcule a segunda derivada parcial de y em relação a t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A\,\text{sen}(kx - \omega t)] = A\cos(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega A\,\text{sen}(kx - \omega t)\frac{\partial y(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega^2 A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

3. Substituindo estes resultados na Equação 15-10*b*, fica:

$$-k^2A\,\text{sen}(kx - \omega t) = \frac{1}{v^2}[-\omega^2 A\,\text{sen}(kx - \omega t)]$$

$$\text{ou}\quad A\,\text{sen}(kx - \omega t) = \frac{\omega^2/k^2}{v^2}A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

4. Os dois lados do resultado do passo 3 são iguais, desde que $(\omega^2/k^2)/v^2 = 1$:

$\boxed{A\,\text{sen}(kx - \omega t) \text{ é uma solução da equação da onda (Equação 15-9}b\text{), desde que } (\omega^2/k^2)/v^2 = 1. \text{ Isto é, desde que } v = \omega/k.}$

CHECAGEM Qualquer função da forma $y(x - vt)$ satisfaz à equação da onda (Equação 15-10*b*). A função $y = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ é da forma $y(x - vt)$, desde que $v = \omega/k$. Para mostrar que esta função tem a forma requerida, substituímos ω por kv para obter

$$y = A\,\text{sen}(kx - \omega t) = A\,\text{sen}(kx - kvt) = A\,\text{sen}(k[x - vt])$$

que tem a forma $y(x - vt)$.

PROBLEMA PRÁTICO 15-3 Mostre que qualquer função $y(kx + \omega t)$ satisfaz à Equação 15-10*b*, desde que $v = \omega/k$.

Dedução de v para ondas sonoras A rapidez do som é dada por $v = \sqrt{B/\rho}$ (Equação 15-4), onde B e ρ são o módulo volumétrico e a massa específica do meio, respectivamente. Esta equação pode ser obtida aplicando-se o teorema do impulso–quantidade de movimento linear ao movimento do ar em um longo cilindro (Figura 15-7) com um pistão em uma extremidade e com a outra extremidade aberta para a atmosfera. Repentinamente, você começa a mover o pistão para a direita com rapidez constante u. Após um curto tempo, Δt, o pistão terá se movido de uma distância $u\,\Delta t$ e todo o ar contido em uma distância $v\,\Delta t$ da posição inicial do pistão estará se movendo para a direita com a rapidez u. Aplicando o teorema do impulso–quantidade de movimento linear ($\vec{F}_{\text{méd}}\,\Delta t = \Delta\vec{p}$) ao ar no cilindro, obtemos

$$F\,\Delta t = mu - 0 \qquad 15\text{-}11$$

onde m é a massa do ar que se move com rapidez u e F é a força resultante sobre o ar no cilindro. O ar estava, inicialmente, em repouso. A força resultante F está relacionada com o aumento de pressão ΔP do ar, nas proximidades do pistão que se move, como

$$F = A\,\Delta P$$

onde A é a área de seção reta do cilindro.

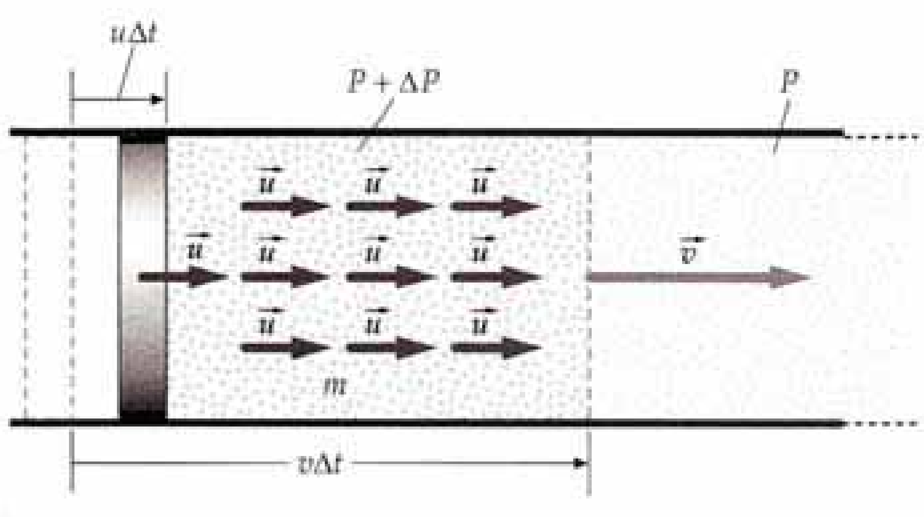


FIGURA 15-7 O ar próximo ao pistão se move para a direita com a mesma rapidez constante u do pistão. A extremidade da direita deste pulso de pressão se move para a direita com a rapidez da onda v. A pressão no pulso é maior do que a pressão no resto do cilindro de uma quantidade ΔP.

O módulo volumétrico do ar é dado por

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad \text{logo} \quad \Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{-Au\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = B\frac{u}{v}$$

onde $Au\Delta t$ é o volume varrido pelo pistão e $Av\Delta t$ é o volume inicial do ar que agora está se movendo com rapidez u. Substituindo F na Equação 15-11, fica

$$A\Delta P\Delta t = mu \qquad \text{ou} \qquad AB\frac{u}{v}\,\Delta t = (\rho Av\Delta t)u$$

onde m foi substituído por $\rho Av\,\Delta t$. Resolvendo para v, obtém-se

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

que é a mesma expressão para v da Equação 15-4.

Uma equação da onda para ondas sonoras pode ser deduzida usando-se as leis de Newton. Em uma dimensão, esta equação é

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

onde s é o deslocamento do meio na direção x e v_s é a rapidez do som no meio.

15-2 ONDAS PERIÓDICAS

Se uma extremidade de uma longa corda esticada é sacudida para cima e para baixo em movimento periódico, então uma **onda periódica** é gerada. Se uma onda periódica está viajando ao longo de uma corda esticada, ou em qualquer outro meio, cada ponto ao longo do meio oscila com o mesmo período.

ONDAS HARMÔNICAS

Ondas harmônicas são o tipo mais básico de ondas periódicas. Todas as ondas, periódicas ou não, podem ser modeladas como uma superposição de ondas harmônicas. Conseqüentemente, uma compreensão do movimento ondulatório harmônico pode ser generalizada para formar uma compreensão de qualquer tipo de movimento ondulatório. Se uma **onda harmônica** está se propagando através de um meio, cada ponto do meio oscila em movimento harmônico simples.

Se uma extremidade de uma corda é presa a um vibrador que oscila para cima e para baixo em movimento harmônico simples, um trem de onda senoidal se propaga ao longo da corda. Este trem de onda é uma onda harmônica. Como mostrado na Figura 15-8, a forma da corda é a de uma função senoidal. A menor distância além da qual a onda se repete (a distância entre cristas, por exemplo) nesta figura é chamada de **comprimento de onda** λ.

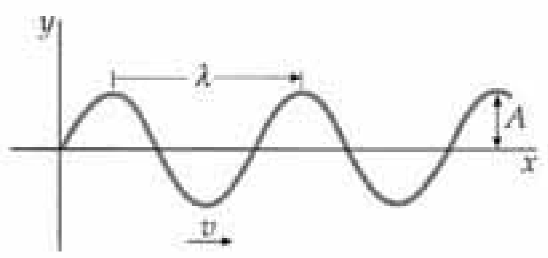


FIGURA 15-8 Uma onda harmônica em um determinado instante de tempo. A é a amplitude e λ é o comprimento de onda. Para uma onda em uma corda, esta figura pode ser obtida com uma fotografia de exposição rápida da corda.

Enquanto a onda se propaga ao longo da corda, cada ponto da corda se move para cima e para baixo — perpendicularmente à direção de propagação — em movimento harmônico simples com a freqüência f do vibrador. Durante um período T deste movimento a onda percorre uma distância de um comprimento de onda, de forma que sua rapidez é dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \qquad \text{15-12}$$

onde usamos a relação $T = 1/f$.

Como a relação $v = f\lambda$ resulta apenas das definições de comprimento de onda e de freqüência, ela é aplicável a todas as ondas periódicas.

A função seno que descreve os deslocamentos na Figura 15-8 é

$$y(x) = A\,\text{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

onde A é a amplitude, λ é o comprimento de onda e δ é uma constante de fase que depende da escolha da origem (onde $x = 0$). Esta equação é expressa mais simplesmente como

$$y(x) = A\,\text{sen}(kx + \delta) \qquad \text{15-13}$$

onde k, chamado **número de onda**, é dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad 15\text{-}14$$

Note que k tem o m^{-1} como unidade. (Como o ângulo deve estar em radianos, às vezes escrevemos a unidade de k como rad/m.) Quando trabalhando com uma onda harmônica simples, usualmente escolhemos a localização da origem de modo que $\delta = 0$.

Para uma onda viajando no sentido do aumento de x, com uma rapidez v, substitua x na Equação 15-13 por $x - vt$ (veja "Pulsos de Onda" na Seção 15-1). Com δ igual a zero, fica

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) = A \operatorname{sen}(kx - kvt)$$

ou

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}15$$

FUNÇÃO DE ONDA HARMÔNICA

onde

$$\omega = kv \qquad 15\text{-}16$$

é a freqüência angular e o argumento da função seno, $(kx - \omega t)$, é chamado de **fase**. A freqüência angular relaciona-se com a freqüência f e com o período T por

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad 15\text{-}17$$

Substituindo $\omega = 2\pi f$ na Equação 15-16 e usando $k = 2\pi/\lambda$, obtemos

$$2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

ou $v = f\lambda$, que é a Equação 15-12.

Se uma onda harmônica que viaja ao longo de uma corda é descrita por $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, então a velocidade de um ponto da corda em um valor fixo de x é

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A \operatorname{sen}(kx - \omega t)] = -\omega A \cos(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}18$$

VELOCIDADE TRANSVERSAL

A aceleração deste ponto é dada por $\partial^2 y/\partial t^2$.

Exemplo 15-5 Uma Onda Harmônica em uma Corda

A função de onda $y(x,t) = (0{,}030\ \text{m}) \times \operatorname{sen}[(2{,}2\ \text{m}^{-1})x - (3{,}5\ \text{s}^{-1})t]$ descreve uma onda harmônica em uma corda. (*a*) Em que sentido viaja esta onda e qual é sua rapidez? (*b*) Determine o comprimento de onda, a freqüência e o período desta onda. (*c*) Qual é o deslocamento máximo de qualquer ponto da corda? (*d*) Qual é a rapidez máxima de qualquer ponto da corda?

SITUAÇÃO (*a*) Para encontrar o sentido do movimento, expresse $y(x,t)$ ou como uma função de $(x - vt)$ ou como uma função de $(x + vt)$ e use as Equações 15-1 e 15-2. Para determinar a rapidez da onda, use $\omega = kv$ (Equação 15-16). (*b*) O comprimento de onda, a freqüência e o período podem ser determinados do número de onda k e da freqüência angular ω. (*c*) O deslocamento máximo de um ponto da corda é a amplitude A. (*d*) A velocidade de um ponto da corda é $\partial y/\partial t$.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A função de onda dada é da forma $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Usando $\omega = kv$ (Equação 15-16), escreva a função de onda como uma função de $x - vt$. Depois, use as Equações 15-1 e 15-2 para encontrar o sentido de propagação:

$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ e $\omega = kv$

logo $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - kvt) = A \operatorname{sen}[k(x - vt)]$

A onda viaja no $\boxed{\text{sentido } +x.}$

2. Como a forma é $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, conhecemos A, ω e k. Use isto para calcular a rapidez:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{3{,}5\ \text{s}^{-1}}{2{,}2\ \text{m}^{-1}} = 1{,}59\ \text{m/s}$$

$$= \boxed{1{,}6\ \text{m/s}}$$

(*b*) O comprimento de onda λ se relaciona com o número de onda k, e o período T e a freqüência f se relacionam com ω:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2\ \text{m}^{-1}} = 2{,}86\ \text{m} = \boxed{2{,}9\ \text{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5\ \text{s}^{-1}} = 1{,}80\ \text{s} = \boxed{1{,}8\ \text{s}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}80\ \text{s}} = 0{,}557\ \text{Hz} = \boxed{0{,}56\ \text{Hz}}$$

(*c*) O deslocamento máximo de um segmento da corda é a amplitude A:

$$A = \boxed{0{,}030\ \text{m}}$$

(*d*) 1. Calcule $\partial y/\partial t$ para determinar a velocidade de um ponto da corda:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (0{,}030\ \text{m})\frac{\partial[\text{sen}(2{,}2\ \text{m}^{-1}x - 3{,}5\ \text{s}^{-1}t)]}{\partial t}$$
$$= (0{,}030\ \text{m})(-3{,}5\ \text{s}^{-1})\cos(2{,}2\ \text{m}^{-1}x - 3{,}5\ \text{s}^{-1}t)$$
$$= -(0{,}105\ \text{m/s})\cos(2{,}2\ \text{m}^{-1}x - 3{,}5\ \text{s}^{-1}t)$$

2. A rapidez transversal máxima ocorre quando a função cosseno tem o valor ± 1:

$$v_{y,\text{máx}} = 0{,}105\ \text{m/s} = \boxed{0{,}11\ \text{m/s}}$$

CHECAGEM Incluímos explicitamente as unidades para mostrar como que elas se combinam. Elas servem como um teste de plausibilidade. Para sermos breves, com freqüência omitiremos as unidades.

Transferência de energia através de ondas em uma corda Considere, novamente, uma corda presa a um vibrador. O vibrador transfere energia ao segmento de corda preso a ele. Por exemplo, quando o vibrador se move para cima a partir de sua posição de equilíbrio, ele distende levemente o segmento de corda adjacente — aumentando sua energia potencial elástica. Além disso, em seu movimento para cima a partir do equilíbrio, o vibrador vai freando, reduzindo a energia cinética do segmento de corda preso a ele. Enquanto a onda se move ao longo da corda, energia é transferida de cada segmento para o seu adjacente, de maneira similar.

Potência é a taxa de transferência de energia. Podemos calcular a potência considerando o trabalho realizado pela força que um segmento da corda exerce sobre um segmento vizinho. A taxa com que o trabalho é realizado por esta força é a potência. A Figura 15-9 mostra uma onda harmônica se movendo para a direita ao longo de um segmento de corda. Isto é, supomos uma função de onda com a forma

$$y(x,t) = A\ \text{sen}(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}19$$

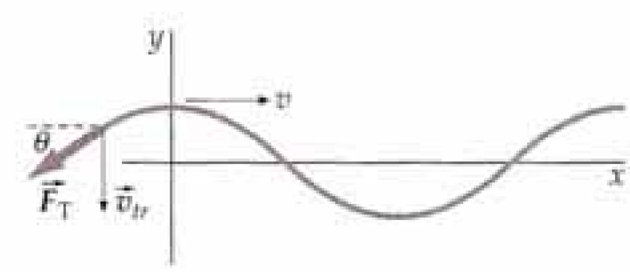


FIGURA 15-9 A força de tração $\vec{F}_T$ tem uma componente no sentido da velocidade transversal $\vec{v}_{tr}$, de modo que neste instante a força realiza trabalho positivo sobre a extremidade da corda.

A força de tração $\vec{F}_T$, na extremidade esquerda do segmento, é tangente à corda, como mostrado. Para calcular a potência transferida por esta força, usamos a fórmula $P = \vec{F}_T \cdot \vec{v}_{tr}$ (Equação 6-16), onde $\vec{F}_T$ é a tração e $\vec{v}_{tr}$, a velocidade transversal, é a velocidade da extremidade do segmento. Para obter uma expressão para a potência, primeiro expressamos os vetores em função de suas componentes. Isto é, $\vec{F}_T = F_{Tx}\hat{i} + F_{Ty}\hat{j}$ e $\vec{v}_{tr} = v_y\hat{j}$. Fazendo o produto escalar, fica $P = F_{Ty}v_y$. Obtemos v_y derivando a Equação 15-18. Vemos, na figura, que $F_{Ty} = -F_T\,\text{sen}\,\theta < -F_T\tan\theta$, onde usamos a aproximação para ângulos pequenos $\text{sen}\,\theta < \tan\theta$. Como $\tan\theta$ é a inclinação da linha tangente à corda, temos $\tan\theta = \partial y/\partial x$. Então,

$$P = F_{Ty}v_y \approx -F_T v_y \tan\theta = -F_T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad 15\text{-}20$$

Aplicando a Equação 15-20 para uma onda harmônica (fazendo as derivadas da Equação 15-19), temos

$$P = -F_T[-\omega A\cos(kx - \omega t)][kA\cos(kx - \omega t)] = F_T\omega kA^2\cos^2(kx - \omega t)$$

Usando $v = \sqrt{F_T/\mu}$ (Equação 15-3) e $v = \omega/k$ (Equação 15-16), substituímos F_T e o primeiro k para obter

$$P = \mu v\omega^2 A^2\cos^2(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}21$$

onde v é a rapidez da onda. A potência média em qualquer ponto x é, então,

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \qquad 15\text{-}22$$

porque o valor médio de $\cos^2(kx - \omega t)$ é $\frac{1}{2}$. Esta média é tomada sobre todo o período T do movimento, com x mantido constante.

A energia se propaga ao longo de uma corda esticada com uma rapidez média igual à rapidez da onda v, de modo que a energia média $(\Delta E)_{\text{méd}}$ que flui pelo ponto P durante o tempo Δt (Figura 15-10a e Figura 15-10b) é

$$(\Delta E)_{\text{méd}} = P_{\text{méd}}\,\Delta t = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \Delta t$$

Esta energia se distribui em um comprimento $\Delta x = v\,\Delta t$, de modo que a energia média no comprimento Δx é

$$(\Delta E)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\,\Delta x \qquad 15\text{-}23$$

Note que, como a potência média, a energia média por unidade de comprimento é proporcional ao quadrado da amplitude da onda.

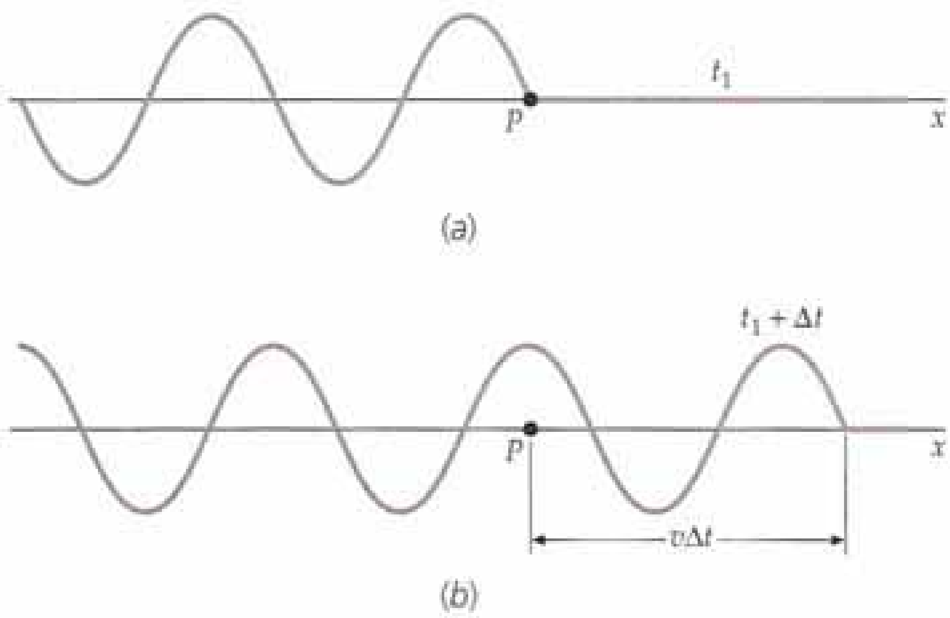


FIGURA 15-10 A onda atingiu o ponto P no tempo t_1. Durante o tempo Δt, a onda avançou uma distância $v\,\Delta t$ além do ponto P.

Exemplo 15-6 Energia Total Média de uma Onda em uma Corda

Uma onda harmônica, de 25 cm de comprimento de onda e 1,2 cm de amplitude, se move ao longo de um segmento de 15 m de uma corda de 60 m que tem uma massa de 320 g e sofre uma tração de 12 N. (a) Quais são a rapidez e a freqüência angular da onda? (b) Qual é a energia total média da onda?

SITUAÇÃO A rapidez média é $v = \sqrt{F_T/\mu}$, onde F_T é dado e $\mu = m/L$. Determinamos ω de $\omega = 2\pi f$, onde $f = v/\lambda$. A energia é determinada usando $(\Delta E)_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x$ (Equação 15-23).

SOLUÇÃO

(a) 1. A rapidez está relacionada com a tração e com a massa específica linear:
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{m}{L}$$

2. Calcule a rapidez da onda:
$$v = \sqrt{\frac{F_T L}{m}} = \sqrt{\frac{(12\text{ N})(60\text{ m})}{(0{,}32\text{ kg})}} = 47{,}4\text{ m/s} = \boxed{47\text{ m/s}}$$

3. A freqüência angular é determinada a partir da freqüência, que é encontrada conhecendo-se a rapidez e o comprimento de onda:
$$\omega = 2\pi f \quad \text{e} \quad v = f\lambda,$$
logo
$$\omega = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{47{,}4\text{ m/s}}{0{,}25\text{ m}} = 1190\text{ rad/s} = \boxed{1200\text{ rad/s}}$$

(b) A energia total média de uma onda harmônica na corda é dada por $(\Delta E)_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x$ (Equação 15-23):
$$(\Delta E)_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\,\Delta x = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2 A^2\,\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}\frac{0{,}32\text{ kg}}{60\text{ m}}(1190\text{ s}^{-1})^2(0{,}012\text{ m})^2(15\text{ m})$$
$$= 8{,}19\text{ J} = \boxed{8{,}2\text{ J}}$$

CHECAGEM O resultado para a energia média, na Parte (b), tem como unidade

$$1\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\,\text{m}^3}{\text{m}} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\text{ N}\cdot\text{m} = 1\text{ J}$$

onde usamos o fato de que $1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$. Como a unidade é correta, o resultado da Parte (b) é plausível.

PROBLEMA PRÁTICO 15-4 Calcule a taxa média com que a energia é transmitida ao longo da corda.

ONDAS SONORAS HARMÔNICAS

Ondas sonoras harmônicas podem ser geradas por um diapasão ou por um alto-falante vibrando em movimento harmônico simples. A fonte vibratória faz com que as moléculas de ar próximas a ela oscilem em movimento harmônico simples em torno de suas posições de equilíbrio. Estas moléculas colidem com as moléculas vizinhas, fazendo com que elas oscilem e estas, por sua vez, colidem com suas vizinhas, fazendo-as oscilar, e assim por diante, desta forma propagando-se a onda sonora. A Equação 15-15 descreverá uma onda sonora harmônica se a função de onda $y(x,t)$ for substituída por $s(x,t)$, que representa os deslocamentos das moléculas em relação às suas posições de equilíbrio. Assim,

$$s(x,t) = s_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}24$$

Estes deslocamentos ocorrem ao longo da direção de propagação da onda, e causam variações da massa específica e da pressão do ar. A Figura 15-11 mostra o deslocamento de moléculas de ar e variações da massa específica causados por uma onda sonora em algum instante fixo. A pressão é máxima onde a massa específica é máxima. Vemos, nesta figura, que a onda de massa específica, e, portanto, a onda de pressão, está defasada de 90° em relação à onda de deslocamento. (Nos argumentos das funções seno e cosseno expressaremos, sempre, os ângulos de fase em radianos. No entanto, em descrições verbais dizemos, usualmente, que "duas ondas estão defasadas de 90°", em vez de "duas ondas estão defasadas de $\pi/2$ radianos.") Onde o deslocamento é zero, a massa específica, e, portanto, a pressão, está em um máximo ou em um mínimo, e onde o deslocamento é máximo ou mínimo a massa específica, e, portanto, a pressão, está com seu valor de equilíbrio. Uma onda de deslocamento dada pela Equação 15-24, portanto, implica uma onda de pressão dada por

$$p = p_0 \operatorname{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -p_0 \cos(kx - \omega t) \qquad 15\text{-}25$$

onde p é a pressão menos a pressão de equilíbrio local, e p_0, o valor máximo de p, é a chamada amplitude de pressão. Pode ser mostrado que a amplitude de pressão p_0 está relacionada com a amplitude de deslocamento s_0 por

$$p_0 = \rho\omega v s_0 \qquad 15\text{-}26$$

onde v é a rapidez de propagação e ρ é a massa específica de equilíbrio do gás. Então, quando uma onda sonora harmônica viaja no ar, o deslocamento das moléculas de ar, a pressão e a massa específica variam todos senoidalmente com a freqüência da fonte vibratória.

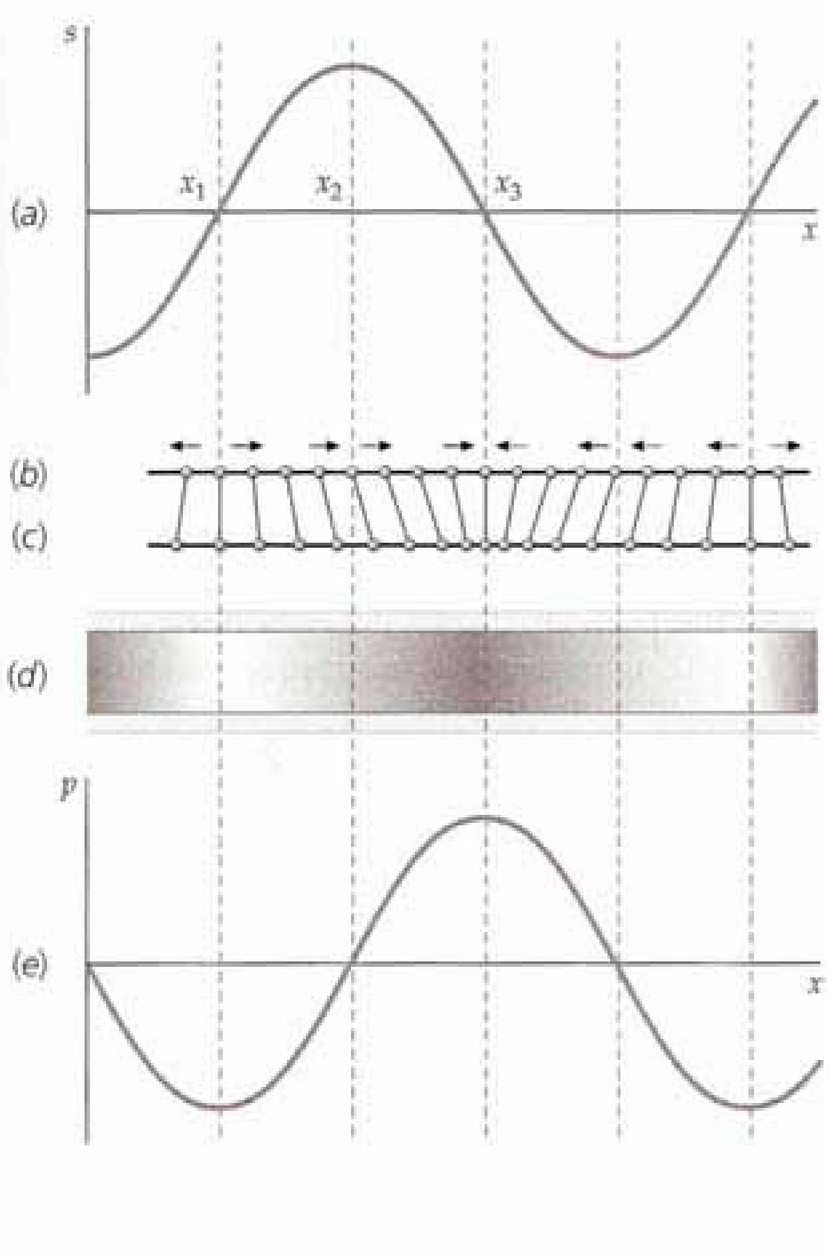


FIGURA 15-11 (*a*) Deslocamento do equilíbrio de moléculas de ar em uma onda sonora harmônica *versus* posição, em determinado instante. Os pontos x_1 e x_3 são pontos de deslocamento zero. (*b*) Algumas moléculas representativas, igualmente espaçadas, em suas posições de equilíbrio 1/4 de ciclo antes. As setas indicam os sentidos de suas velocidades, naquele instante. (*c*) Moléculas próximas dos pontos x_1, x_2 e x_3 após a chegada da onda sonora. O deslocamento é negativo logo à esquerda de x_1, indicando que as moléculas do gás são deslocadas para a esquerda, afastando-se do ponto x_1, neste instante. O deslocamento é positivo logo à direita de x_1, indicando que as moléculas são deslocadas para a direita, também afastando-se do ponto x_1. Logo, no ponto x_1 a massa específica é mínima porque as moléculas do gás dos dois lados são deslocadas afastando-se do ponto. No ponto x_3 a massa específica é máxima, porque as moléculas dos dois lados são deslocadas aproximando-se deste ponto. No ponto x_2, a massa específica não varia, porque as moléculas do gás, dos dois lados deste ponto, sofrem deslocamentos iguais no mesmo sentido. (*d*) A massa específica do ar, neste instante. A massa específica é máxima em x_3 e mínima em x_1, ambos pontos de deslocamento zero. Seu valor de equilíbrio ocorre em x_2, que é um ponto de deslocamento máximo. (*e*) Variação da pressão, que é proporcional à variação da massa específica, *versus* posição. A variação da pressão e o deslocamento (variação da posição) são defasados de 90°.

PROBLEMA PRÁTICO 15-5

Sons com freqüências entre cerca de 20 Hz e cerca de 20.000 Hz são audíveis aos humanos (apesar de muitas pessoas apresentarem audição limitada acima de 15.000 Hz). Se a rapidez do som no ar é 343 m/s, quais são os comprimentos de onda que correspondem às freqüências audíveis mais alta e mais baixa?

Energia das ondas sonoras A energia média de uma onda sonora harmônica, em um elemento de volume ΔV, é dada pela Equação 15-23 com A substituído por s_0 e com $\mu\,\Delta x$ substituído por $\rho\,\Delta V$, onde ρ é a massa específica de equilíbrio do meio.

$$(\Delta E)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2\,\Delta V \qquad \text{15-27}$$

A energia por unidade de volume é a densidade média de energia $\eta_{\text{méd}}$:

$$\eta_{\text{méd}} = \frac{\Delta E_{\text{méd}}}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \qquad \text{15-28}$$

onde η é a letra grega minúscula eta.

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Ondas eletromagnéticas incluem luz, ondas de rádio, raios X, raios gama e microondas, entre outras. Os vários tipos de ondas eletromagnéticas diferem apenas no comprimento de onda e na freqüência. Diferentemente das ondas mecânicas, as ondas eletromagnéticas não requerem um meio de propagação. Elas viajam no vácuo com a rapidez c, que é uma constante universal, $c \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s. A função de onda para ondas eletromagnéticas é um campo elétrico $\vec{E}(x,t)$ associado à onda. (Campos elétricos são apresentados no Capítulo 21 (Volume 2). Uma equação de onda, similar às de ondas em cordas e de ondas sonoras, é deduzida das leis da eletricidade e do magnetismo no Capítulo 30 — Volume 2.) O campo elétrico é perpendicular à direção de propagação, de forma que as ondas eletromagnéticas são ondas transversais.

As ondas eletromagnéticas são produzidas quando cargas elétricas livres aceleram ou quando elétrons ligados a átomos e a moléculas sofrem uma transição para estados mais baixos de energia. Ondas de rádio, que têm freqüências no entorno de 1 MHz para AM e de 100 MHz para FM, são produzidas por correntes elétricas macroscópicas oscilando em antenas de rádio. A freqüência das ondas emitidas é igual à freqüência de oscilação das cargas. Ondas de luz, que possuem freqüências da ordem de 10^{14} Hz, são geralmente produzidas por transições atômicas ou moleculares envolvendo elétrons ligados. O espectro de ondas eletromagnéticas é discutido no Capítulo 31 (Volume 2).

15-3 ONDAS EM TRÊS DIMENSÕES

A Figura 15-12 mostra ondas circulares bidimensionais na superfície da água em um tanque de ondas. Estas ondas são geradas por gotas d'água caindo na superfície. As cristas de onda formam círculos concêntricos chamados de **frentes de onda**. Para uma fonte sonora pontual, as ondas se afastam em três dimensões, e as frentes de onda são superfícies esféricas concêntricas.

O movimento de qualquer conjunto de frentes de onda pode ser indicado por raios, que são linhas retas orientadas perpendiculares às frentes de onda (Figura 15-13). Para ondas circulares ou esféricas, os raios são linhas radiais.

Em um meio homogêneo, como o ar com massa específica constante, as frentes de onda viajam em linhas retas no sentido dos raios, lembrando um feixe de partículas. A uma grande distância da fonte pontual, uma seção suficientemente pequena da frente de onda pode ser aproximada por uma superfície plana, e os raios são aproximados por linhas paralelas; tal onda é chamada de **onda plana** (Figura 15-14). O análogo bidimensional de uma onda plana é uma *onda linear*, que é uma pequena parte de uma frente de onda circular muito distante da fonte. Ondas lineares também podem ser produzidas em um tanque de ondas por uma fonte linear, como na Figura 15-15.

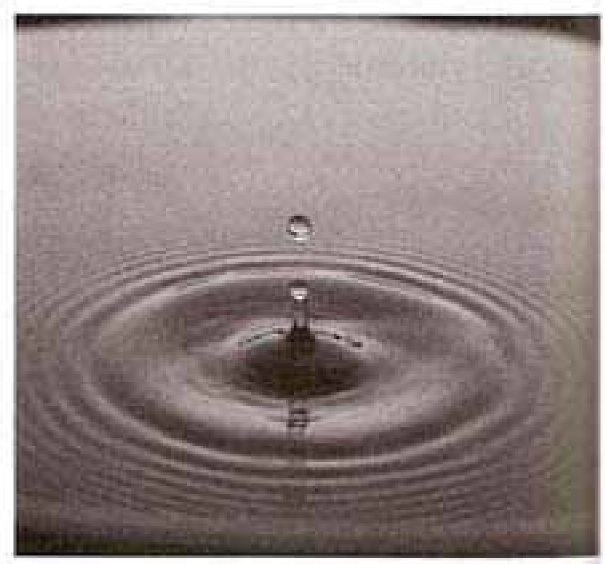


FIGURA 15-12 Frentes de onda circulares emitidas de uma fonte pontual em um tanque de ondas. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

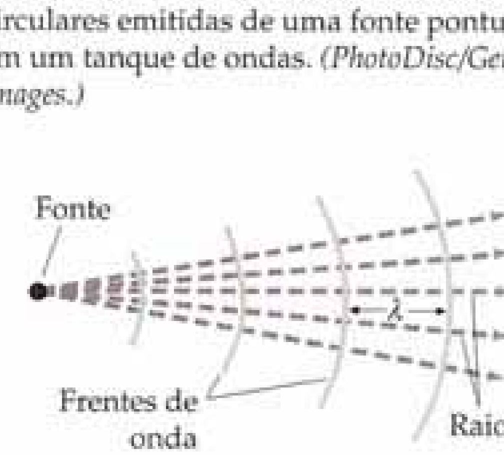


FIGURA 15-13 O movimento das frentes de onda pode ser representado por raios traçados perpendicularmente a elas. Para uma fonte pontual, os raios são linhas que partem radialmente da fonte.

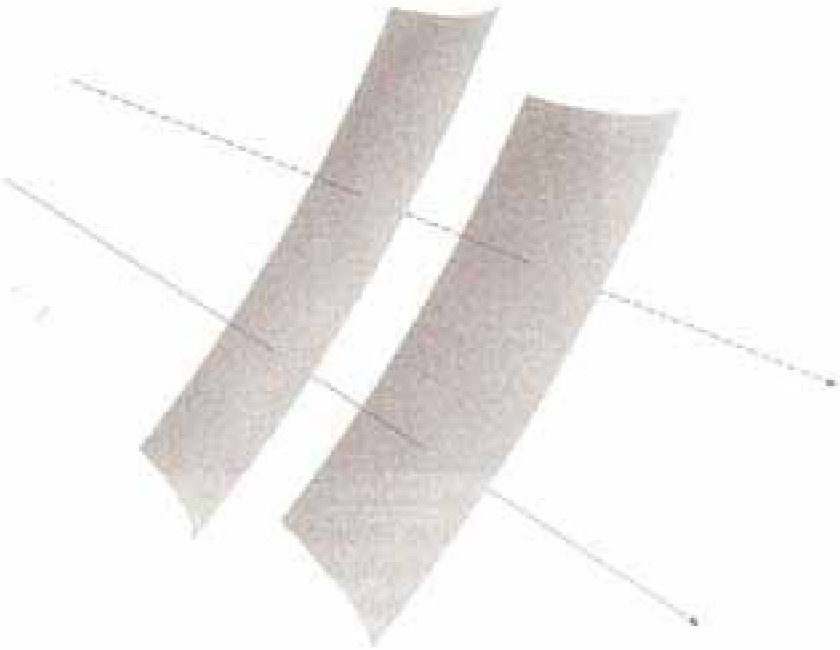


FIGURA 15-14 Ondas planas. A grandes distâncias de uma fonte pontual, as frentes de onda são aproximadamente planos paralelos, e os raios são aproximadamente linhas paralelas perpendiculares às frentes de onda.

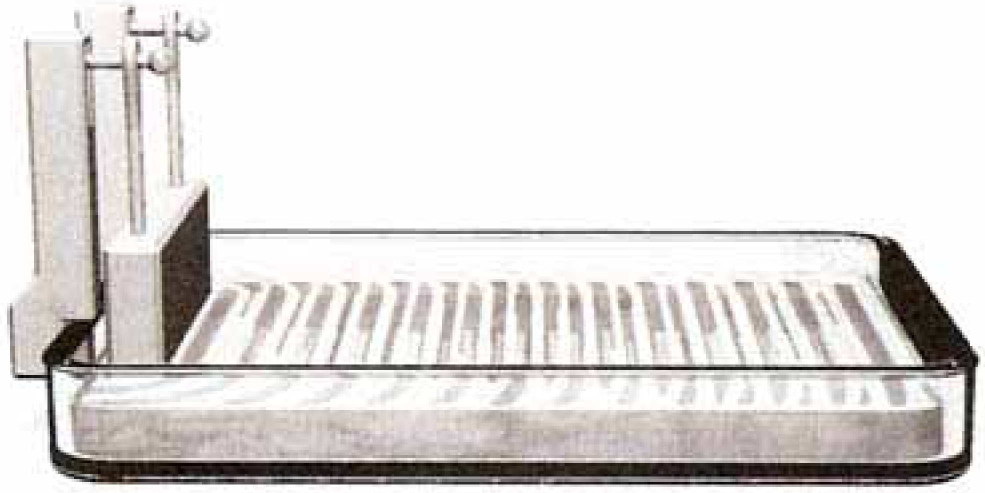


FIGURA 15-15 Um análogo bidimensional de uma onda plana pode ser gerado em um tanque de ondas por uma placa que oscila para cima e para baixo na água, produzindo as frentes de onda, que são linhas retas.

INTENSIDADE DE ONDA

Se uma fonte pontual emite ondas uniformemente em todas as direções, então a energia a uma distância r da fonte é distribuída uniformemente em uma superfície esférica de raio r e área $A = 4\pi r^2$. Se $P_{\text{méd}}$ é a potência média emitida pela fonte, então a potência média por unidade de área a uma distância r da fonte é $P_{\text{méd}}/(4\pi r^2)$. A potência média por unidade de área que incide perpendicularmente na direação de propagação é chamada de **intensidade**:

$$I = \frac{P_{\text{méd}}}{A} \qquad 15\text{-}29$$

DEFINIÇÃO DE INTENSIDADE

No SI, a intensidade é medida em watts por metro quadrado (W/m²). A uma distância r da fonte pontual, a intensidade é

$$I = \frac{P_{\text{méd}}}{4\pi r^2} \qquad 15\text{-}30$$

INTENSIDADE DE UMA FONTE PONTUAL

A intensidade de uma onda tridimensional varia inversamente com o quadrado da distância à fonte pontual.

Existe uma relação simples entre a intensidade de uma onda e a densidade de energia no meio através do qual ela se propaga. A Figura 15-16 mostra uma onda esférica cujo raio acaba de atingir o valor r_1. O volume interno ao raio r_1 contém energia, porque as partículas nessa região estão oscilando. A região externa a r_1 não contém energia, porque a onda ainda não a alcançou. Após um curto tempo Δt, a onda terá passado por r_1 varrendo uma curta distância $\Delta r = v\,\Delta t$. A energia média na casca esférica de área superficial A, espessura $v\,\Delta t$ e volume $\Delta V = A\,\Delta r = Av\,\Delta t$, vale

$$(\Delta E)_{\text{méd}} = \eta_{\text{méd}}\,\Delta V = \eta_{\text{méd}} Av\,\Delta t$$

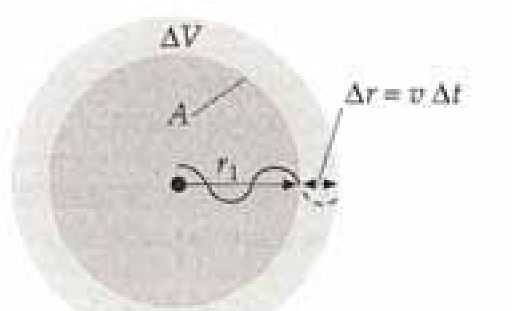


FIGURA 15-16

A taxa de transferência de energia é a potência através da casca. A potência incidente média é

$$P_{\text{méd}} = \frac{(\Delta E)_{\text{méd}}}{\Delta t} = \eta_{\text{méd}} Av$$

e a intensidade da onda é

$$I = \frac{P_{\text{méd}}}{A} = \eta_{\text{méd}} v \qquad 15\text{-}31$$

Então, a intensidade é igual ao produto da rapidez da onda v pela densidade média de energia $\eta_{\text{méd}}$. Substituindo $\eta_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$, da Equação 15-28, para a densidade de energia em uma onda sonora harmônica, obtemos

$$I = \eta_{\text{méd}} v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v} \tag{15-32}$$

onde usamos $s_0 = p_0/(\rho\omega v)$ da Equação 15-26. Este resultado — que a intensidade de uma onda sonora é proporcional ao quadrado da amplitude — é uma propriedade geral das ondas harmônicas.

O ouvido humano pode acomodar uma grande faixa de intensidades de onda sonora, desde cerca de 10^{-12} W/m² (que é, usualmente, tomado como o limiar de audição) até cerca de 1 W/m² (uma intensidade grande o suficiente para provocar dor na maioria das pessoas). As amplitudes de pressão que correspondem a estas intensidades extremas são cerca de 3×10^{-5} Pa para o limiar de audição e 30 Pa para o limiar da dor. (Lembre-se de que um pascal é um newton por metro quadrado.) Estas variações de pressão muito pequenas são somadas ou subtraídas da pressão atmosférica normal de cerca de 101,3 kPa.

Ondas sonoras emitidas por um aparelho telefônico e propagando-se no ar. As ondas foram feitas visíveis varrendo-se o espaço em frente ao aparelho com uma fonte de luz cujo brilho é controlado por um microfone. *(De Winston E. Kock, Lasers and Holography, 1978, Dover Publications, New York.)*

Exemplo 15-7 Um Alto-falante

O diafragma de um alto-falante, de 30 cm de diâmetro, está vibrando a 1,0 kHz com uma amplitude de 0,020 mm. Supondo que as moléculas de ar na vizinhança tenham a mesma amplitude de vibração, determine (*a*) a amplitude de pressão imediatamente à frente do diafragma, (*b*) a intensidade do som imediatamente à frente do diafragma e (*c*) a potência sonora irradiada. (*d*) Se o som é irradiado uniformemente para o hemisfério à frente, determine a intensidade a 5,0 m do alto-falante.

SITUAÇÃO (*a*) e (*b*) A amplitude de pressão é calculada diretamente de $p_0 = \rho\omega v s_0$ (Equação 15-26) e a intensidade é calculada de $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v$ (Equação 15-32). (*c*) A potência irradiada é a intensidade vezes a área do diafragma. (*d*) A área de um hemisfério de raio r é $2\pi r^2$. Podemos usar a Equação 15-29 com $A = 2\pi r^2$.

SOLUÇÃO

(*a*) A Equação 15-26 relaciona a amplitude de pressão com a amplitude de deslocamento, a freqüência, a rapidez da onda e a massa específica do ar:

$$p_0 = \rho\omega v s_0 = (1{,}29\ \text{kg/m}^3)2\pi\ (10^3\ \text{Hz})(343\ \text{m/s})(2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m})$$
$$= 55{,}6\ \text{N/m}^2 = \boxed{56\ \text{Pa}}$$

(*b*) A Equação 15-32 relaciona a intensidade com estas mesmas grandezas:

$$I = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \tfrac{1}{2}(1{,}29\ \text{kg/m}^3)[2\pi\ (1{,}0\ \text{kHz})]^2(2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m})^2(343\ \text{m/s})$$
$$= 3{,}494\ \text{W/m}^2 = \boxed{3{,}5\ \text{W/m}^2}$$

(*c*) A potência é a intensidade vezes a área do diafragma:

$$P_{\text{méd}} = IA = (3{,}494\ \text{W/m}^2)\pi(0{,}15\ \text{m})^2 = 0{,}247\ \text{W} = \boxed{0{,}25\ \text{W}}$$

(*d*) Calcule a intensidade em $r = 5{,}0$ m supondo radiação uniforme para o hemisfério à frente:

$$I = \frac{P_{\text{méd}}}{A} = \frac{0{,}247\ \text{W}}{2\pi(5{,}0\ \text{m})^2} = 1{,}57 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2 = \boxed{1{,}6\ \text{mW/m}^2}$$

CHECAGEM O resultado da Parte (*d*) é menor do que o resultado da Parte (*b*), como esperado. (Esperamos que a intensidade seja maior imediatamente à frente do diafragma.)

INDO ALÉM A suposição de que a radiação é uniforme no hemisfério à frente não é muito boa, porque o comprimento de onda, neste caso, $[\lambda = v/f = (343\ \text{m/s})/(1000\ \text{s}^{-1}) = 34{,}3\ \text{cm}]$ não é grande em comparação ao diâmetro do alto-falante. Também ocorre alguma radiação para trás, como você pode observar colocando-se atrás de um alto-falante.

Alto-falantes em um concerto de rock podem emitir mais do que 100 vezes a potência do alto-falante deste exemplo.

Nível de intensidade e sonoridade Nossa percepção de sonoridade não é proporcional à intensidade, mas varia, em boa aproximação, logaritmicamente com a intensidade. Usamos, portanto, uma escala logarítmica para descrever o **nível de intensidade** β de uma onda sonora, que é medido em **decibéis** (dB) e é definido por

$$\beta = (10\text{ dB})\log\frac{I}{I_0} \qquad 15\text{-}33$$

DEFINIÇÃO — NÍVEL DE INTENSIDADE EM dB

Veja *o* **Tutorial Matemático** ***para mais informações sobre*** **Expoentes e Logaritmos**

onde *log* refere-se ao logaritmo de base 10. O decibel é um número adimensional, como o radiano. Tipicamente, escrevemos a Equação 15-33 sem explicitar a unidade. Isto é, nós a escrevemos como $\beta = 10\log(I/I_0)$. Aqui, I é a intensidade do som e I_0 é um nível de referência, usualmente tomado como o limiar de audição:

$$I_0 = 10^{-12}\text{ W/m}^2 \qquad 15\text{-}34$$

LIMIAR DE AUDIÇÃO

Nesta escala, o limiar de audição ($I = 10^{-12}$ W/m^2) corresponde a um nível de intensidade $\beta = 10\log(10^{-12}/10^{-12}) = 0$ dB, e o limiar da dor ($I = 1$ W/m^2) corresponde a $\beta = 10\log(1/10^{-12}) = 10\log 10^{12} = 120$ dB. Assim, a faixa de intensidades sonoras entre 10^{-12} W/m^2 e 1 W/m^2 corresponde a níveis de intensidade entre 0 dB e 120 dB. A Tabela 15-1 lista níveis de intensidade de alguns sons comuns.

Tabela 15-1 Intensidade e Nível de Intensidade de Alguns Sons Comuns ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2)

Fonte	I/I_0	dB	Descrição
	10^0	0	Limiar de audição
Respiração normal	10^1	10	Quase inaudível
Farfalhar	10^2	20	
Murmúrio (a 5 m)	10^3	30	Muito quieto
Biblioteca	10^4	40	
Escritório tranqüilo	10^5	50	Quieto
Conversação normal (a 1 m)	10^6	60	
Tráfego intenso	10^7	70	
Escritório barulhento com máquinas; fábrica média	10^8	80	
Caminhão pesado (a 15 m); cataratas do Niágara	10^9	90	A exposição constante prejudica a audição
Trem velho de metrô	10^{10}	100	
Ruído de construção (a 3 m)	10^{11}	110	
Concerto de rock com amplificadores (a 2 m); decolagem de jato (a 60 m)	10^{12}	120	Limiar da dor
Rebitador automático; metralhadora	10^{13}	130	
Decolagem de jato (próximo)	10^{15}	150	
Motor de foguete grande (próximo)	10^{18}	180	

Exemplo 15-8 À Prova de Som

Um isolante acústico atenua o *nível de intensidade* sonora em 30 dB. Por qual fator a *intensidade* varia?

SITUAÇÃO Inspecione a Tabela 15-1 para ver qual é a variação de intensidade para cada 10 dB de variação de nível de intensidade. Você vê algum padrão?

SOLUÇÃO

1. Da Tabela 15-1 podemos ver que, para cada decréscimo de 10 dB no nível de intensidade, a intensidade varia por um fator 1/10.

Assim, se o nível sonoro diminui 30 dB, a intensidade varia de um fator $10^{-1} \times 10^{-1} \times 10^{-1} = \boxed{10^{-3}.}$

CHECAGEM Podemos comparar este resultado com o resultado obtido diretamente usando a Equação 15-33. Isto é, $\beta_2 - \beta_1 = 10\log(I_2/I_0) - 10\log(I_1/I_0) = 10\log(I_2/I_1)$. Resolvendo para I_2, obtemos $I_2 = 10^{(\beta_2-\beta_1)/10}I_1$. Substituindo $\beta_2 - \beta_1$ por -30, fica $I_2 = 10^{-3}I_1$, o que corresponde ao resultado previamente obtido.

CHECAGEM CONCEITUAL 15-1

Quando seu rádio estraga, Chico compra um novo que produz o dobro da potência acústica que produzia o antigo. Ele espera que seu novo rádio seja duas vezes mais audível do que o rádio antigo. Ele ficará desapontado? Explique.

A sensação de sonoridade depende da freqüência, assim como da intensidade do som. A Figura 15-17 é um gráfico de nível de intensidade *versus* freqüência para sons que têm a mesma sonoridade para o ouvido humano. (Nesta figura, a freqüência está em escala logarítmica, para que se veja a grande faixa de freqüências de 20 Hz até 10 kHz.) Podemos observar, neste gráfico, que o ouvido humano é mais sensível em cerca de 4 kHz, para todos os níveis de intensidade.

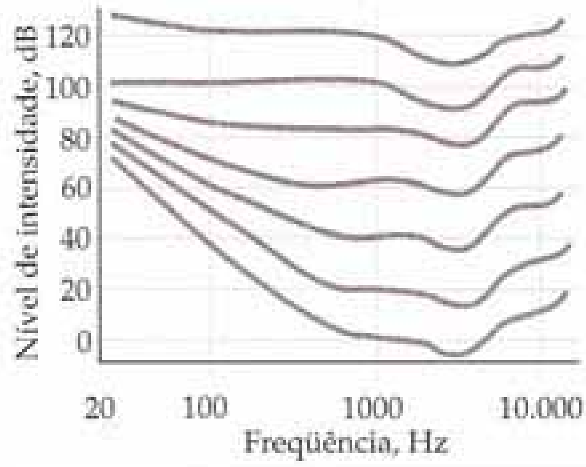


FIGURA 15-17 Nível de intensidade *versus* freqüência para sons percebidos como de mesma sonoridade. A curva mais baixa está abaixo do limite de audição para todos, menos para um por cento da população. A segunda curva mais baixa é aproximadamente o limiar de audição para cerca de 50 por cento da população.

Exemplo 15-9 Cachorros Latindo

Um cachorro latindo emite cerca de 1,0 mW de potência acústica. (*a*) Se a potência é uniformemente distribuída em todas as direções, qual é o nível de intensidade sonora a uma distância de 5,0 m? (*b*) Qual seria o nível de intensidade de dois cachorros, cada um deles a 5,0 m de distância, latindo ao mesmo tempo e emitindo, cada um, 1,0 mW de potência?

SITUAÇÃO O nível de intensidade sonora é determinado a partir da intensidade, que é calculada de $I = P_{\text{méd}}/(4\pi r^2)$. Para dois cachorros, as intensidades se somam.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. O nível de intensidade β está relacionado à intensidade I. Assim, precisamos primeiro calcular a intensidade I:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

2. Usando $I = P_{\text{méd}}/(4\pi r^2)$, calcule o nível de intensidade a $r = 5{,}0$ m:

$$I_1 = \frac{P_{1\,\text{méd}}}{4\pi r^2} = \frac{1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{W}}{4\pi(5{,}0\ \text{m})^2} = 3{,}18 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

3. Use seu resultado para determinar o nível de intensidade a 5 m:

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{3{,}18 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-12}} = \boxed{65{,}0\ \text{dB}}$$

(*b*) Se I_1 é a intensidade de um cachorro latindo, a intensidade de dois cachorros latindo é $I_2 = 2I_1$:

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10\left(\log 2 + \log \frac{I_1}{I_0}\right)$$

$$= 10 \log 2 + \beta_1 = 3{,}01 + 65{,}0 = \boxed{68{,}0\ \text{dB}}$$

CHECAGEM Se o resultado da Parte (*b*) é correto, então sempre que a intensidade é dobrada o nível de intensidade aumenta em ~3 dB. Para confirmar isto, dividimos 65 dB por 3 dB para obter 21,7, de forma que dobrar o limiar de intensidade 21,7 vezes deve dar uma intensidade de $I_1 \approx 3 \times 10^{-6}$ W/m². Isto é, $2^{21{,}7}I_0$ deve ser igual a cerca de 3×10^{-6} W/m². Multiplicando 1×10^{-12} W/m² por $2^{21{,}7}$ dá $3{,}4 \times 10^{-6}$ W/m², de forma que nosso resultado da Parte (*b*) é plausível.

15-4 ONDAS INCIDINDO SOBRE BARREIRAS

REFLEXÃO, TRANSMISSÃO E REFRAÇÃO

Quando uma onda incide sobre a fronteira que separa duas regiões de valores diferentes de rapidez de onda, parte da onda é refletida e parte é transmitida. A Figura 15-18*a* mostra um pulso em uma corda leve que está emendada em uma corda mais pesada (uma com rapidez de onda menor). Neste caso, o pulso refletido na fronteira é invertido. Se a segunda corda é mais leve do que a primeira (Figura 15-18*b*), então o pulso refletido não é invertido. O pulso transmitido para a segunda corda nunca é invertido. Uma corda presa em um ponto fixo é equivalente a uma corda emendada em outra corda com uma massa por unidade de comprimento extremamente grande, de forma que, para um pulso incidente em uma corda presa em um ponto fixo, o pulso refletido é invertido. Se a corda está emendada em outra com menor massa por unidade de comprimento, o pulso refletido não é invertido. As alturas dos pulsos incidente, transmitido e refletido, mostradas na Figura 15-18, são h_{in}, h_t e h_r, respectivamente. O **coeficiente de reflexão** r é a altura do pulso refletido dividida pela altura do pulso incidente, e o **coeficiente de transmissão** τ é a altura do pulso transmitido dividida pela altura do pulso incidente. Isto é, $r = h_r/h_{in}$ e $\tau = h_t/h_{in}$. As expressões para r e τ são

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \qquad 15\text{-}35$$

COEFICIENTES DE REFLEXÃO E DE TRANSMISSÃO

Estas expressões para os coeficientes de reflexão e de transmissão r e τ são conhecidas como *relações de Fresnel*. Elas podem ser deduzidas fazendo com que a tração, a altura da corda e a inclinação da corda permaneçam todas contínuas no ponto em que a massa por unidade de comprimento é descontínua. (A terceira lei de Newton requer que a inclinação seja contínua.) Note que τ nunca é negativo e que r é negativo se $v_2 < v_1$. Isto significa que o pulso transmitido nunca é invertido e que o pulso refletido é invertido se $v_2 < v_1$. Além disso, as relações de Fresnel são válidas tanto para ondas de luz quanto para ondas sonoras.

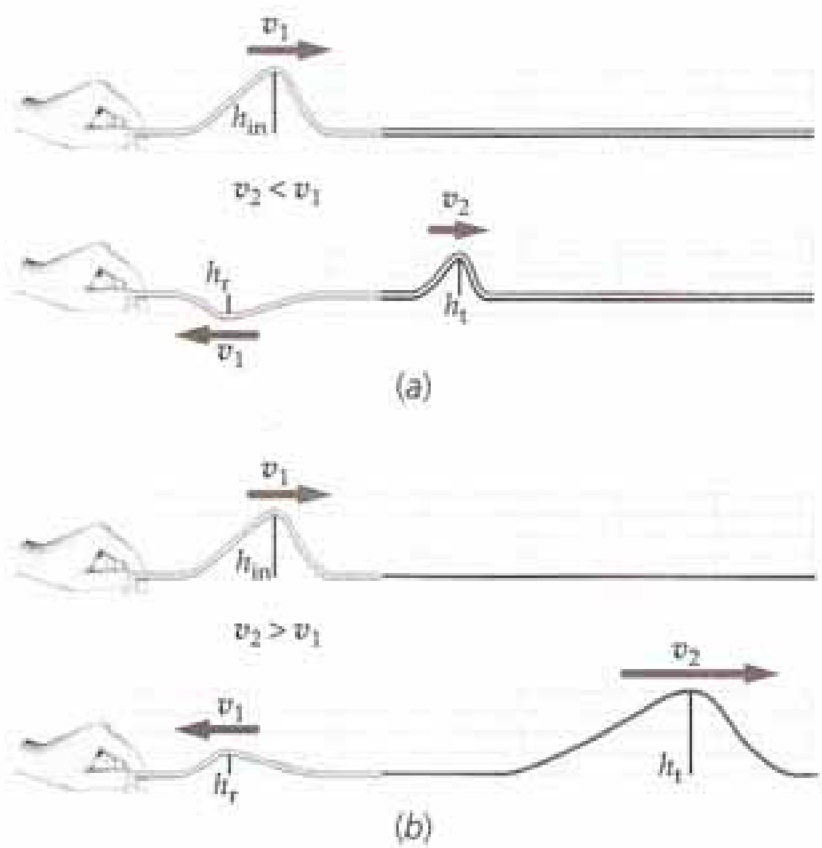


FIGURA 15-18 As frentes dos pulsos são mais inclinadas do que as partes de trás porque a extremidade da corda foi levantada mais rapidamente do que abaixada. (*a*) Um pulso de onda percorrendo uma corda presa a outra corda mais massiva, onde a rapidez da onda é reduzida à metade. O pulso refletido é invertido, o que não ocorre com o pulso transmitido. (*b*) Um pulso de onda percorrendo uma corda presa a outra corda menos massiva, onde a rapidez da onda é o dobro. Neste caso, o pulso refletido não é invertido.

Exemplo 15-10 Dois Fios Soldados

Dois fios de diferentes massas específicas lineares são soldados um no outro, pelas pontas, e depois submetidos a uma tração F_T (a mesma para os dois fios). A rapidez de onda no primeiro fio é o dobro daquela no segundo fio. Uma onda harmônica, viajando no primeiro fio, incide sobre a emenda dos fios. (*a*) Se a amplitude da onda incidente é A, quais são as amplitudes das ondas refletida e transmitida? (*b*) Qual é a razão μ_2/μ_1 entre as massas específicas dos fios? (*b*) Que fração da potência média incidente é refletida na emenda e que fração é transmitida?

SITUAÇÃO Para calcular as amplitudes das ondas refletida e transmitida, use $A_r = rA$ e $A_t = \tau A$, onde A_r e A_t são as amplitudes das ondas refletida e transmitida, respectivamente, e r e τ são os coeficientes de reflexão e de transmissão dados pela Equação 15-35. Cada potência é expressa usando-se $P_{méd} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$ (Equação 15-22). As ondas incidente, refletida e transmitida têm a mesma freqüência. Como a onda refletida e a onda incidente estão no mesmo meio, elas têm a mesma rapidez de onda v_1. É informado que a rapidez de onda v_2, no segundo fio, vale $\frac{1}{2}v_1$ (Figura 15-19).

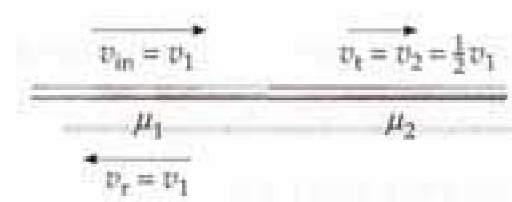


FIGURA 15-19

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Expresse as amplitudes refletida e transmitida em termos da amplitude incidente e dos coeficientes de reflexão e de transmissão (Equação 15-35):

$$A_r = rA \quad \text{e} \quad A_t = \tau A$$

2. Use a informação $v_1 = 2v_2$ para explicitar os coeficientes de reflexão e de transmissão:

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{v_2 - 2v_2}{v_2 + 2v_2} = -\frac{1}{3}$$

$$\tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2v_2}{v_2 + 2v_2} = \frac{2}{3}$$

logo $A_r = \boxed{-\frac{1}{3}A}$ e $A_t = \boxed{\frac{2}{3}A}$

(*b*) 1. A fórmula que relaciona a massa específica com a rapidez da onda é $v = \sqrt{F_T/\mu}$ (Equação 15-3). F_T é a mesma nos dois lados da emenda. Resolva para μ_2 e μ_1:

$$v_1^2 = \frac{F_T}{\mu_1} \quad \text{e} \quad v_2^2 = \frac{F_T}{\mu_2}$$

$$\text{logo} \quad \mu_1 = \frac{F_T}{v_1^2} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \frac{F_T}{v_2^2}$$

2. Divida μ_2 por μ_1 e use a informação dada $v_1 = 2v_2$:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(2v_2)^2}{v_2^2} = \boxed{4}$$

(*c*) 1. Escreva expressões para as potências incidente, refletida e transmitida usando $P_{méd} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$ (Equação 15-22):

$$P_{\text{in méd}} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2A^2v_1$$

$$P_{\text{r méd}} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2A_r^2v_1$$

$$P_{\text{t méd}} = \tfrac{1}{2}\mu_2\omega^2A_t^2v_2$$

2. Substitua os resultados da Parte (*a*) nas expressões para a potência refletida e para a potência transmitida:

$$P_{\text{r méd}} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2\left(-\frac{1}{3}A\right)^2 v_1 = \frac{1}{18}\mu_1\omega^2A^2v_1$$

$$P_{\text{t méd}} = \tfrac{1}{2}\mu_2\omega^2\left(\frac{2}{3}A\right)^2 v_2 = \frac{2}{9}\mu_2\omega^2A^2v_2$$

3. Obtenha expressões para P_r/P_{in} e para P_t/P_{in}:

$$\frac{P_{\text{r méd}}}{P_{\text{in méd}}} = \frac{\frac{1}{18}\mu_1\omega^2A^2v_1}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2A^2v_1} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{P_{\text{t méd}}}{P_{\text{in méd}}} = \frac{\frac{2}{9}\mu_2\omega^2A^2v_2}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2A^2v_1} = \frac{4}{9}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{v_2}{v_1}$$

4. Simplifique, usando o resultado da Parte (*b*) e a informação $v_1 = 2v_2$:

$$\frac{P_{\text{t méd}}}{P_{\text{in méd}}} = \frac{4}{9}4\frac{v_2}{2v_2} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

CHECAGEM A fração de potência refletida mais a fração de potência transmitida é igual a um, como é de se esperar.

INDO ALÉM A onda refletida é invertida em relação à onda incidente, logo elas estão defasadas de 180°. Uma amplitude negativa corresponde a um deslocamento de fase de 180°.

PROBLEMA PRÁTICO 15-6 Repita o Exemplo 15-10, agora com $v_2 = 2v_1$.

A conservação da energia nos dá uma outra relação entre os coeficientes de reflexão e de transmissão. Esta relação, estabelecida no Problema 15-70, é dada por

$$1 = r^2 + \frac{v_1}{v_2}\tau^2 \qquad 15\text{-}36$$

onde r^2 é a fração da potência incidente que é refletida e $(v_1/v_2)\tau^2$ é a fração transmitida.

PROBLEMA PRÁTICO 15-7

Mostre que os valores de r e de τ para os fios do Exemplo 15-10 satisfazem à Equação 15-36.

Em três dimensões, um fronteira entre duas regiões com diferentes valores de rapidez de onda é uma superfície. A Figura 15-20 mostra um raio incidente sobre uma superfície de fronteira. Este exemplo pode ser uma onda de pressão ultra-sônica no ar atingindo uma superfície sólida ou líquida. O raio refletido forma um ângulo com a normal à superfície igual àquele formado pelo raio incidente, como mostrado.

O raio transmitido se aproxima ou se afasta da normal — conforme a rapidez da onda no segundo meio seja menor ou maior do que aquela do meio incidente. O desvio do raio transmitido é chamado de **refração**. Quando a rapidez da onda no segundo meio é maior do que aquela no meio de incidência (como acontece quando uma onda de luz, em vidro ou em água, é refratada para o ar), o raio que descreve o sentido de propagação é afastado da normal, como mostrado na Figura 15-21. À medida que o ângulo de incidência aumenta, o ângulo de refração também aumenta, até que para um ângulo crítico de incidência o ângulo de refração é 90°. Para ângulos

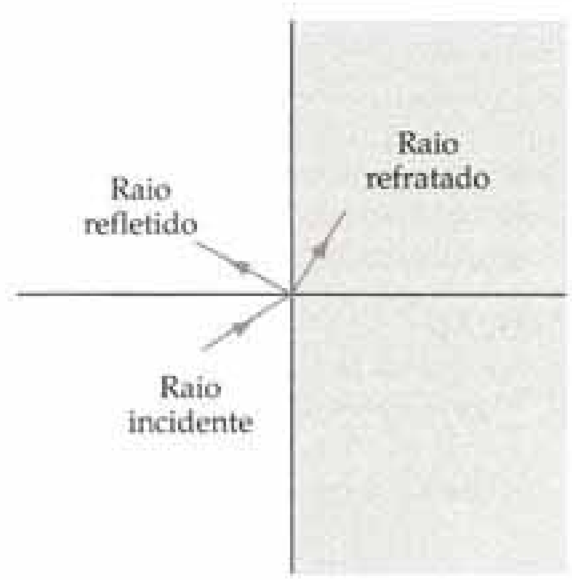


FIGURA 15-20 Uma onda incidindo sobre uma superfície de separação de dois meios, nos quais a rapidez da onda tem valores diferentes. Parte da onda é refletida e parte é transmitida. A variação da direção do raio transmitido (refratado) é chamada de refração.

de incidência maiores do que o ângulo crítico não existe raio refratado, um fenômeno conhecido como **reflexão interna total**.

A quantidade de energia refletida por uma superfície depende da superfície. Paredes planas rígidas, pavimentos e tetos são bons refletores de ondas sonoras, enquanto materiais porosos e menos rígidos, como tecidos de cortinas e revestimentos de móveis, absorvem muito do som incidente. A reflexão de ondas sonoras desempenha um importante papel no projeto de um anfiteatro, de uma biblioteca, ou de um auditório de música. Se um anfiteatro possui muitas superfícies planas refletoras, é difícil compreender o que se fala por causa dos muitos ecos que chegam simultaneamente aos ouvidos do espectador. É comum se colocar material absorvente nas paredes e no teto para reduzir tais reflexões. Em uma sala de concertos, uma concha refletora é colocada atrás da orquestra, e painéis refletores são pendurados do teto para refletir e dirigir o som de volta para a platéia.

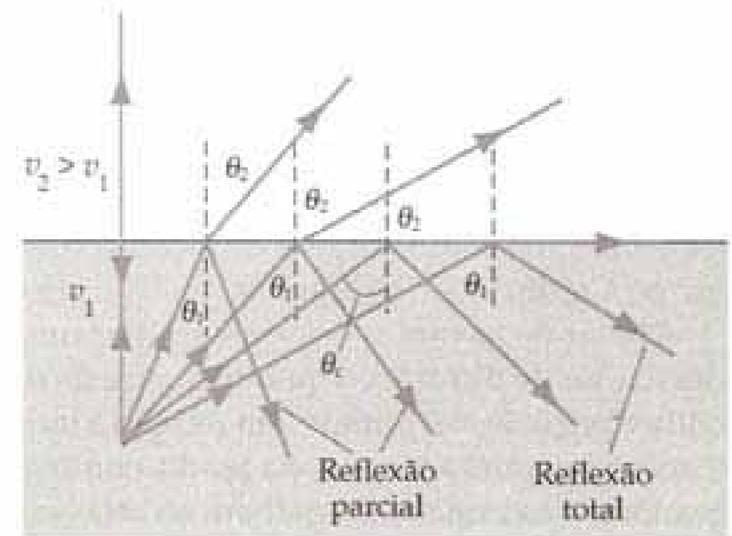


FIGURA 15-21 A luz emitida de uma fonte dentro d'água é afastada da normal quando entra no ar. Para ângulos de incidência acima de um ângulo crítico θ_c não existe raio transmitido, uma condição conhecida como reflexão interna total.

Exemplo 15-11 Balão Reforçando a Audição — *Conceitual*

Uma popular demonstração de física usa um balão meteorológico cheio de dióxido de carbono. Se o balão é colocado entre você e uma fonte sonora, sua audição melhora. Por que isto acontece?

SITUAÇÃO A massa molar do dióxido de carbono é maior do que a massa molar efetiva do ar. Então, o som viaja mais rapidamente no ar do que no dióxido de carbono, à pressão atmosférica. Para "ver" por que o som se torna mais audível quando o balão está entre você e a fonte sonora, desenhe um diagrama de raios sonoros atravessando o balão. Os raios refratarão (se desviarão) quando transmitidos através de uma superfície onde a rapidez do som muda.

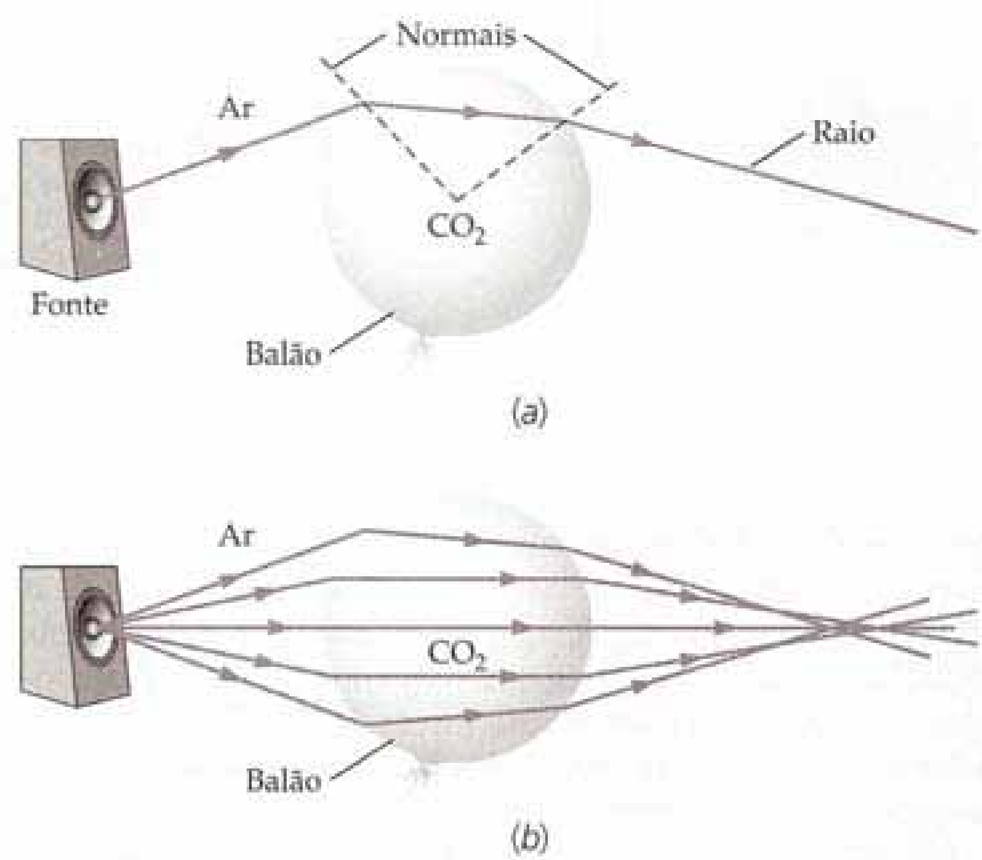


FIGURA 15-22

SOLUÇÃO

1. Trace um raio a partir da fonte sonora e passando pela metade superior do balão (Figura 15-22*a*). O raio refratará aproximando-se da normal, ao entrar no balão, e afastando-se da normal, ao sair do balão:
2. Repita o passo 1 para quatro ou cinco raios, incluindo alguns passando pela metade inferior do balão (Figura 15-22*b*).
3. Use o diagrama para explicar por que o som é mais audível quando o balão está entre você e a fonte sonora: O som é mais audível na região onde os raios se interceptam.

CHECAGEM O balão é, para o som, o que uma lente de aumento é para a luz. No vidro a luz viaja mais lentamente do que no ar, da mesma forma que no CO_2 o som viaja mais lentamente do que no ar.

DIFRAÇÃO

Se uma frente de onda é parcialmente bloqueada por um obstáculo, a parte não bloqueada da frente de onda desvia-se atrás do obstáculo. Este desvio de frentes de onda é chamado de **difração**. Quase toda a difração ocorre com aquela parte da frente de onda que passa a poucos comprimentos de onda da borda do obstáculo. Para as partes da frente de onda que passam a uma distância maior do que alguns comprimentos de onda do obstáculo, a difração é desprezível e a onda se propaga em linhas retas na direção dos raios incidentes. Quando frentes de onda encontram uma barreira com uma fenda (furo) de apenas alguns comprimentos de onda, as partes das frentes de onda que atravessam a fenda passam todas a alguns comprimentos de onda da borda. Assim, frentes de onda planas se desviam e se espalham, tornando-se ondas esféricas ou circulares (Figura 15-23). Isto contrasta com o caso de um feixe de *partículas* atingindo uma barreira com uma fenda, onde a parte do feixe que atravessa a fenda não sofre variação na direção das partículas (Figura 15-24). A difração é uma das características-chave que distingue ondas de partículas. Discutiremos como surge a difração ao estudarmos a interferência e a difração da luz no Capítulo 35 (Volume 3).

Apesar de as ondas que passam por uma fenda sofrerem sempre algum grau de desvio, ou de difração, o quanto ocorre de difração depende de se o comprimento de onda é pequeno ou grande, em relação à largura da fenda. Se o comprimento de onda é maior ou igual à largura da fenda, como na Figura 15-23, os efeitos da difração são grandes, e as ondas se espalham ao atravessar a fenda — como se elas fossem originadas em uma fonte pontual. Por outro lado, se o comprimento de onda é pequeno em relação à fenda, o efeito da difração é pequeno, como mostrado na Figura 15-25.

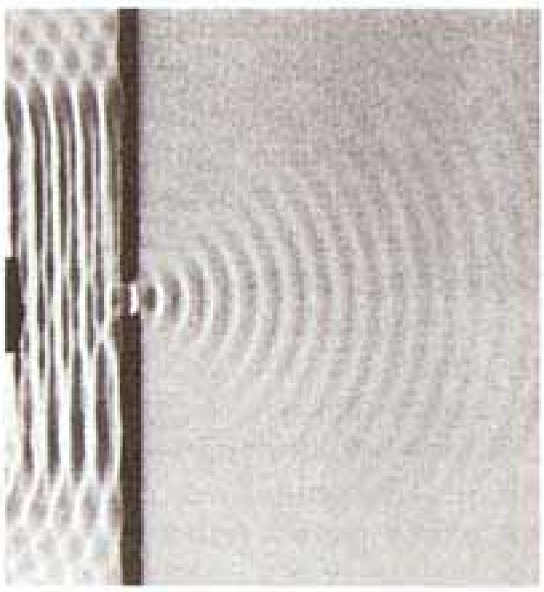


FIGURA 15-23 Ondas planas, em um tanque de ondas, encontrando uma barreira com uma fenda cujo tamanho é aproximadamente de um comprimento de onda. Depois da barreira, as ondas são circulares concêntricas em torno da fenda, como se existisse uma fonte pontual na fenda. *(Fundamental Photographers.)*

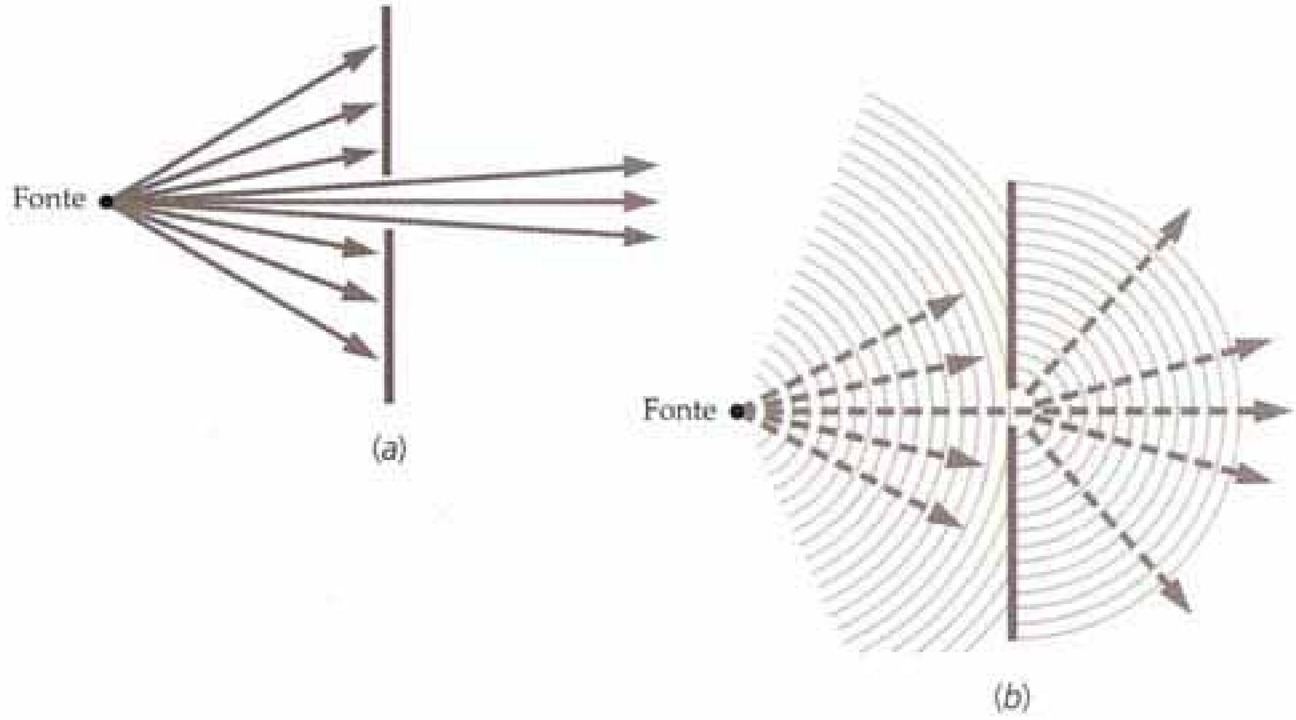


FIGURA 15-24 Comparação de partículas com ondas atravessando uma pequena fenda em uma barreira. (*a*) As partículas transmitidas restringem-se a um feixe estreito. (*b*) As ondas transmitidas se espalham (irradiam-se) largamente a partir da fenda, que atua como uma fonte pontual de ondas circulares.

Próximo às bordas da fenda as frentes de onda são distorcidas e as ondas se desviam levemente. Em sua maior parte, no entanto, as frentes de onda não são afetadas e ondas se propagam em linhas retas, à semelhança de um feixe de partículas. A aproximação de ondas se propagando em linhas retas na direção dos raios, sem difração, é conhecida como **aproximação linear**. Frentes de onda são distorcidas *nas proximidades* das bordas de qualquer obstáculo que bloqueie parte das frentes de onda. Por *nas proximidades* queremos dizer a alguns comprimentos de onda das bordas.

Como os comprimentos de onda do som audível (que ocupam uma faixa de alguns centímetros a até alguns metros) são geralmente grandes em comparação com fendas e obstáculos (portas, janelas e pessoas, por exemplo), a difração de ondas sonoras é um fenômeno observado regularmente. Por outro lado, os comprimentos de onda da luz visível (de 4×10^{-7} a 7×10^{-7} m) são tão pequenos em comparação com o tamanho de objetos e aberturas comuns, que a difração da luz não é facilmente percebida; a luz parece viajar em linhas retas. No entanto, a difração da luz é um importante fenômeno que estudaremos em detalhes no Capítulo 35 (Volume 3).

A difração coloca uma limitação na precisão com que pequenos objetos podem ser localizados por ondas refletidas por eles e na qualidade da resolução de detalhes dos objetos. Ondas não são bem refletidas por objetos menores do que um comprimento de onda e, portanto, detalhes não podem se observados em uma escala menor do que o comprimento de onda utilizado. Se ondas de comprimento de onda λ são usadas para localizar um objeto, então sua posição pode ser estabelecida apenas com uma incerteza de um comprimento de onda.

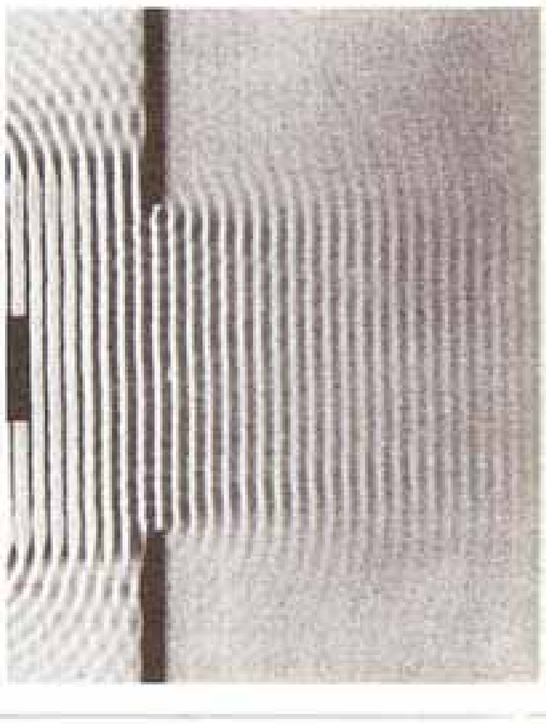


FIGURA 15-25 Ondas planas em um tanque de ondas encontrando uma barreira com uma fenda cujo tamanho é grande em comparação a λ. A onda continua para a frente, com apenas um leve espalhamento nas regiões próximas aos dois lados da fenda. *(Fundamental Photographers.)*

Ondas sonoras com freqüências acima de 20.000 Hz são chamadas de **ondas ultra-sônicas**. Devido a seus comprimentos de onda muito pequenos, feixes estreitos de ondas ultra-sônicas podem ser emitidos e refletidos por objetos pequenos. Morcegos podem emitir e detectar freqüências de até cerca de 120 kHz, o que corresponde a um comprimento de onda de 2,8 mm, que eles usam para localizar pequenas presas, como traças. Sistemas de localização por eco, chamados de sonares, são usados para detectar o perfil de objetos submersos, com ondas sonoras. As freqüências usadas pelos localizadores comerciais de cardumes estão na faixa de 25 a 200 kHz, e os golfinhos produzem cliques de eco-localização na mesma faixa de freqüência. Em medicina, ondas de ultra-som são usadas com fins diagnósticos. Ondas de ultra-som atravessam o corpo humano e informações sobre a freqüência e a intensidade das ondas transmitidas e refletidas são processadas para construir uma imagem tridimensional do interior do corpo, chamada de sonograma.

15-5 O EFEITO DOPPLER

Se uma fonte sonora e um receptor estão se movendo, um em relação ao outro, a freqüência recebida não é a mesma freqüência da fonte. Se eles estão se aproximando, a freqüência recebida é maior do que a freqüência da fonte; se eles estão se afastando, a freqüência recebida é menor do que a freqüência da fonte. Este é o chamado **efeito Doppler**. Um exemplo familiar é a queda de tom do som de uma buzina de um carro que efetua uma ultrapassagem e se afasta.

Na discussão que se segue, todos os movimentos são em relação ao meio. Considere a fonte se movendo com rapidez u_f, mostrada nas Figuras 15-26*a* e *b*, e um receptor estacionário. A fonte tem freqüência f_f (e período $T_f = 1/f_f$). A freqüência recebida f_r, o número de cristas de onda passando pelo receptor por unidade de tempo, está relacionada com o comprimento de onda λ (a distância entre cristas sucessivas) e com a rapidez de onda v por

$$f_r\lambda = v \quad \text{(receptor estacionário)} \qquad 15\text{-}37$$

Uma crista de onda deixa a fonte no tempo t_1 (Figura 15-26*c*) e a crista de onda seguinte deixa a fonte no tempo t_2. O tempo entre estes dois eventos é $T_f = t_2 - t_1$, e durante este tempo a fonte e a crista que deixa a fonte no tempo t_1 percorrem as distâncias u_fT_f e vT_f, respectivamente. Conseqüentemente, no tempo t_2 a distância entre a fonte e a crista que a deixa no tempo t_1 é igual ao comprimento de onda λ. Atrás da fonte, $\lambda = \lambda_b = (v + u_f)T_f$ e, à frente da fonte, $\lambda = \lambda_a = (v - u_f)T_f$, desde que $u_f < v$. (Se $u_f \geq v$, nenhuma frente de onda alcança a região à frente da fonte.) Podemos expressar λ_b e λ_a como

$$\lambda = (v \pm u_f)T_f = \frac{v \pm u_f}{f_f} \qquad 15\text{-}38$$

onde o sinal negativo é usado se $\lambda = \lambda_a$ e o sinal negativo vale para $\lambda = \lambda_b$. Substituímos T_f por $1/f_f$. Substituindo λ na Equação 15-37 e rearranjando, fica

$$f_r = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v \pm u_f} f_f \quad \text{(receptor estacionário)} \qquad 15\text{-}39$$

Quando um receptor se move em relação ao meio, a freqüência recebida é diferente simplesmente porque o receptor passa por um número maior ou menor de cristas de onda em um determinado tempo. Seja T_r o tempo entre chegadas de cristas sucessivas

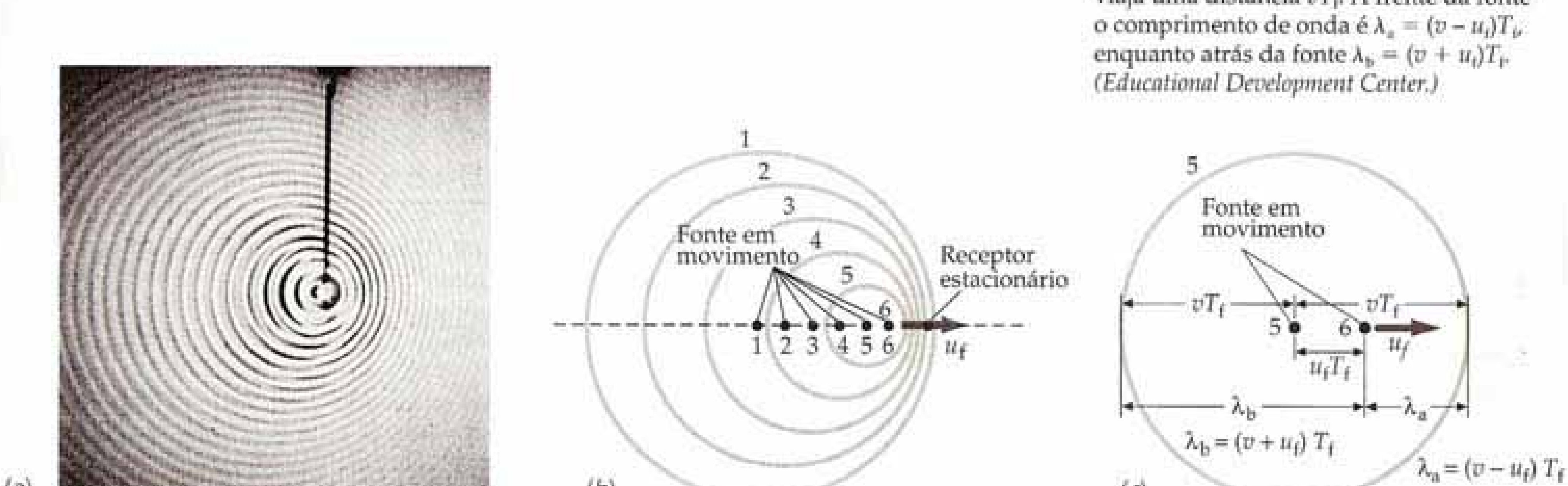


FIGURA 15-26 (*a*) Ondas em um tanque de ondas, produzidas por uma fonte pontual que se move para a direita. As frentes de onda estão mais próximas entre si à frente da fonte e mais afastadas atrás da fonte. (*b*) Frentes de onda sucessivas emitidas por uma fonte pontual que se move com rapidez u_f para a direita. Os números das frentes de onda correspondem às posições da fonte quando a onda foi emitida. (*c*) A fonte vibra um ciclo no tempo T_f. Durante o tempo T_f a fonte percorre uma distância u_fT_f e a quinta frente de onda viaja uma distância vT_f. À frente da fonte o comprimento de onda é $\lambda_a = (v - u_f)T_f$, enquanto atrás da fonte $\lambda_b = (v + u_f)T_f$. (*Educational Development Center.*)

para um receptor se movendo com a rapidez u_r. Então, durante o tempo entre chegadas de duas cristas sucessivas, cada crista terá viajado uma distância vT_r e, durante o mesmo tempo, o receptor terá percorrido uma distância u_rT_r. Se o receptor se move no sentido oposto ao da onda (Figura 15-27) então, durante o tempo T_r a distância percorrida por uma crista mais a distância percorrida pelo receptor é igual ao comprimento de onda. Isto é, $vT_r + u_rT_r = \lambda$, ou $T_r = \lambda/(v + u_r)$. [Se o receptor se move no mesmo sentido da onda, então $vT_r - \lambda = u_rT_r$, ou $T_r = \lambda/(v - u_r)$.] Como $f_r = \lambda/T_r$, temos

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{v \pm u_r}{\lambda} \qquad \text{15-40}$$

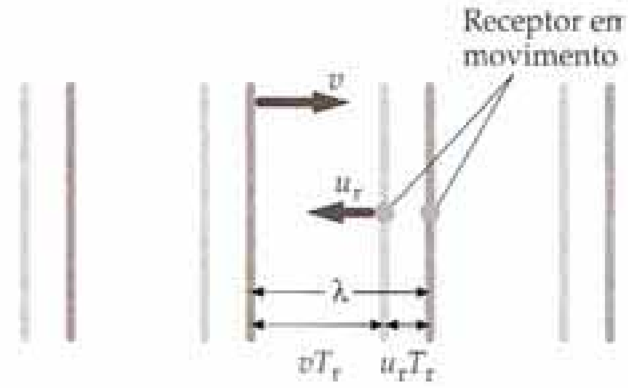


FIGURA 15-27 O tempo entre as chegadas das cristas da onda no receptor é T_r. As cristas da onda são representadas pelas linhas mais escuras quando uma crista de onda chega ao receptor, e são representadas pelas linhas mais claras quando a crista seguinte chega ao receptor. Durante o tempo T_r o receptor percorre a distância u_rT_r, enquanto a crista da onda percorre a distância vT_r.

onde, se o receptor se move no mesmo sentido da onda, a freqüência recebida é menor e escolhemos o sinal negativo. Se o receptor se move no sentido oposto ao da onda, a freqüência é maior e escolhemos o sinal positivo. Substituindo λ na Equação 15-38, obtemos

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \qquad \text{15-41a}$$

As escolhas corretas dos sinais positivo ou negativo são mais facilmente determinadas lembrando que a freqüência tende a crescer tanto quando a fonte se move ao encontro do receptor quanto quando o receptor se move ao encontro da fonte. Por exemplo, se o receptor está se movendo ao encontro da fonte, o sinal positivo é selecionado no numerador, o que faz com que aumente a freqüência recebida; se a fonte está se afastando do receptor, o sinal positivo é selecionado no denominador, de modo que a equação prevê uma diminuição da freqüência recebida. A Equação 15-41*a* fica mais simétrica, tornando-se mais fácil de lembrar, se expressa na forma

$$\frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f} \qquad \text{15-41b}$$

Pode ser mostrado (veja o Problema 83) que, se ambos u_f e u_r são muito menores do que a rapidez da onda v, então o deslocamento de freqüência $\Delta f = f_r - f_f$ é dado aproximadamente por

$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm\frac{u}{v} \qquad (u \ll v) \qquad \text{15-42}$$

onde $u = u_f \pm u_r$ é a rapidez da fonte em relação ao receptor.

Em um referencial no qual o meio se move (por exemplo, o referencial do solo se o ar é o meio e um vento está soprando), a rapidez de onda v é substituída por $v' = v \pm u_v$, onde u_v é a rapidez do vento em relação ao solo.

! As Equações 15-37 a 15-42 são válidas apenas no referencial do meio de propagação.

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolvendo Problemas Envolvendo o Deslocamento Doppler

SITUAÇÃO A solução de problemas envolvendo deslocamento Doppler implica usar a equação

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$$

(Equação 15-41*a*).

SOLUÇÃO

1. Determine a rapidez da fonte u_f e a rapidez do receptor u_r no referencial de propagação do meio.
2. Determine os sentidos de movimento da fonte e do receptor, no mesmo referencial.
3. Substitua valores na Equação 15-41*a*. Tanto a fonte se movendo ao encontro do receptor quanto o receptor se movendo ao encontro da fonte tendem a aumentar a freqüência recebida. Assim, se a fonte se move ao encontro do receptor, escolha o sinal negativo no denominador, e se o receptor se move ao encontro da fonte, escolha o sinal positivo no numerador.

4. Se a onda é refletida antes de atingir o receptor, trate o refletor primeiro como um receptor e aplique a Equação 15-41*a*, e depois trate o refletor como uma fonte e aplique a Equação 15-41*a* novamente.

CHECAGEM Se a distância entre a fonte e o receptor está diminuindo, então a freqüência recebida f_r é maior do que a freqüência da fonte f_f. Se esta distância está aumentando, então f_r é menor do que f_f.

Exemplo 15-12 Buzinando

A freqüência da buzina de um carro é 400 Hz. Se a buzina é tocada quando o carro se move com uma rapidez u_f = 34 m/s (cerca de 122 km/h) em ar parado, ao encontro de um receptor estacionário, determine (*a*) o comprimento de onda do som que chega ao receptor e (*b*) a freqüência recebida. Tome a rapidez do som no ar como 343 m/s. (*c*) Determine o comprimento de onda do som que chega ao receptor e a freqüência recebida, se o carro está parado quando a buzina é tocada e um receptor se move com uma rapidez u_r = 34 m/s ao encontro do carro.

SITUAÇÃO (*a*) As ondas à frente da fonte são comprimidas, logo usamos o sinal negativo em $\lambda = (v \pm u_f)/f_f$ (Equação 15-38). (*b*) Calculamos a freqüência recebida usando $f_r = [(v \pm u_r)/(v \pm u_f)]f_f$ (Equação 15-41*a*). (*c*) Para um receptor em movimento, usamos as mesmas equações das Partes (*a*) e (*b*).

SOLUÇÃO

(*a*) Usando a Equação 15-38, calcule o comprimento de onda à frente do carro. À frente da fonte o comprimento de onda é menor; escolha o sinal de acordo:

$$\lambda = \frac{v - u_f}{f_f} = \frac{343\text{ m/s} - 34\text{ m/s}}{400\text{ Hz}} = 0{,}773\text{ m} = \boxed{0{,}77\text{ m}}$$

(*b*) Usando a Equação 15-41*a*, com $u_r = 0$, resolva para a freqüência recebida:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v - u_f} f_f = \left(\frac{343}{343 - 34}\right)(400\text{ Hz}) = 444\text{ Hz} = \boxed{440\text{ Hz}}$$

(*c*) 1. Usando a Equação 15-38 com $u_f = 0$, calcule o comprimento de onda à frente da fonte:

$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f} = \frac{343\text{ m/s}}{400\text{ Hz}} = 0{,}858\text{ m} = \boxed{0{,}86\text{ m}}$$

2. A freqüência recebida é dada pela Equação 15-41*a*, com $u_f = 0$. O receptor está se aproximando da fonte, logo a freqüência aumenta. Escolha o sinal de acordo:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v + u_r}{v} f_f = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) f_f = \left(1 + \frac{34}{343}\right)(400\text{ Hz}) = \boxed{440\text{ Hz}}$$

CHECAGEM O receptor está se movendo com cerca de 10 por cento da rapidez do som e a freqüência recebida é cerca de 10 por cento maior do que a freqüência da fonte, o que é plausível. (Cuidado, no entanto; isto funciona apenas quando a fonte está em repouso.)

INDO ALÉM A freqüência f_r também pode ser obtida usando a Equação 15-40.

PROBLEMA PRÁTICO 15-8 Um trem apita com uma freqüência de 630 Hz, em um dia sem vento, ao se aproximar a 90 km/h de um observador estacionário. (*a*) Qual é o comprimento de onda das ondas sonoras à frente do trem? (*b*) Qual é a freqüência escutada pelo observador? (Use 343 m/s como rapidez do som.)

Exemplo 15-13 A Rapidez da Onda

Rico em Contexto

Você trabalha para uma companhia de seguros. Um asteróide que caiu no oceano gerou um tsunami. Quando as ondas chegam à terra, uma onda de 10 m de altura provoca grandes estragos. Seu chefe quer saber com que rapidez as grandes ondas estavam se movendo. Sabendo que você tinha estudado física, ele lhe pede para resolver a questão. Tudo de que você dispõe é uma gravação de uma fita de áudio encontrada em uma árvore, depois que as ondas recuaram. A fita contém a gravação de uma sirene e, entre os toques da sirene local de alarme, ouve-se um fraco eco da própria sirene. Você mede as freqüências do som produzido pela sirene e pelo seu eco, e verifica que a sirene tinha uma freqüência de 4000 Hz, enquanto o eco tinha uma freqüência de 4080 Hz. Qual era a rapidez de aproximação da grande onda?

SITUAÇÃO Você verifica, com o serviço de meteorologia, que não havia vento quando o tsunami chegou. Além disso, a temperatura registrada é de 20°C, logo a rapidez do som era de 343 m/s. Primeiro, aplique a equação do efeito Doppler (Equação 15-41*a*) para calcular a freqüência do som recebido pelo tsunami em termos da rapidez u da grande onda. Aplique a equação novamente, agora considerando a grande onda como a fonte sonora e o gravador como receptor. Suponha que o gravador não estivesse se movendo.

SOLUÇÃO

1. Aplique a equação do efeito Doppler com $u_t = 0$ para relacionar a freqüência f_r recebida pela grande onda com sua rapidez u:
$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_t} f_t = \frac{v + u}{v} f_t \qquad f_r = \frac{v + u}{v} f_t$$

2. Aplique a equação do efeito Doppler, agora com $u_r = 0$, para relacionar a freqüência f_r' recebida pelo gravador com a rapidez da grande onda. Use o resultado para f_r do passo 1 como a freqüência da grande onda fazendo o papel de fonte sonora:
$$f_r' = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_t} f_t' = \frac{v}{v - u} f_r \qquad f_r' = \frac{v}{v - u} f_r$$

3. Temos, agora, duas equações e duas incógnitas. Substitua o resultado do passo 1 no resultado do passo 2 e simplifique:
$$f_r' = \frac{v}{v - u} f_r = \frac{v}{v - u}\,\frac{v + u}{v} f_t \qquad f_r' = \frac{v + u}{v - u} f_t$$

4. Resolva para a rapidez u:
$$u = \frac{f_r' - f_t}{f_r' + f_t} v = \frac{4400\ \text{Hz} - 4000\ \text{Hz}}{4400\ \text{Hz} + 4000\ \text{Hz}} 343\ \text{m/s} = \boxed{16{,}3\ \text{m/s}}$$

CHECAGEM Dezesseis metros por segundo é cerca de duas vezes mais rápido do que o alcançado por uma pessoa em uma arrancada em condições ideais. Se você já assistiu a vídeos de tsunamis chegando à praia, sabe que este é um resultado plausível.

Outro exemplo familiar do efeito Doppler é o radar usado pela polícia para medir a rapidez de um carro. Ondas eletromagnéticas emitidas pelo transmissor do radar atingem o carro em movimento. O carro atua tanto como um receptor em movimento quanto como uma fonte em movimento, quando a onda reflete nele de volta para o receptor do radar. A Equação 15-41*a* não é válida para ondas eletromagnéticas. Ondas eletromagnéticas requerem o uso das fórmulas do efeito Doppler relativístico. (O efeito Doppler relativístico é discutido após o Exemplo 15-14.) Acontece que, se $u \ll c$, onde c é a rapidez da luz, a Equação 15-42 vale para ondas eletromagnéticas.

Exemplo 15-14 O Radar da Polícia *Tente Você Mesmo*

O radar de um carro da polícia emite ondas eletromagnéticas que viajam com a rapidez da luz, c. A corrente elétrica na antena do radar oscila com a freqüência f_t. As ondas são refletidas por um carro que se afasta com uma rapidez u em relação ao carro da polícia. Existe uma diferença de freqüência Δf entre f_t e f_r', a freqüência recebida pelo carro da polícia. Determine u em termos de f_t e de Δf.

SITUAÇÃO A onda do radar atinge o carro com a freqüência f_r. Esta freqüência é menor do que f_t porque o carro está se afastando da fonte. A variação de freqüência é dada por $\Delta f/f_t = \pm u/v$ (Equação 15-42) com $v = c$. O carro, depois, atua como uma fonte em movimento emitindo ondas de freqüência f_r. O radar detecta ondas com a freqüência $f_r' < f_r$ porque a fonte (o carro em movimento) se afasta do carro da polícia. A diferença de freqüência é $f_r' - f_t$.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
1. A unidade de radar deve ser capaz de determinar a rapidez com base apenas no que ele transmite e detecta.	A unidade de radar deve determinar u em termos de f_t e f_r'. Resolvemos $\Delta f/f = \pm u/v$ (Equação 15-42) para u em termos de f_t e de $\Delta f = f_r' - f_t$.
2. A diferença de freqüência Δf é a diferença de freqüência $\Delta f_1 = f_r - f_t$ mais a diferença de freqüência $\Delta f_2 = f_r' - f_r$.	$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$

3. Usando a Equação 15-42 com $v = c$, substitua as diferenças de freqüência do passo 2. $\quad \Delta f = -\frac{u}{c}f_t - \frac{u}{c}f_r = -\frac{u}{c}(f_t + f_r)$

4. Usando novamente a Equação 15-42, resolva para f_r em termos de f_t. $\quad \frac{\Delta f_t}{f_t} = -\frac{u}{c}$ logo $f_r = \left(1 - \frac{u}{c}\right)f_t$

5. Substitua o resultado do passo 4 no resultado do passo 3 e simplifique. $\quad \Delta f = -\frac{u}{c}\left(2 - \frac{u}{c}\right)f_t$

6. Em comparação com 2, u/c é desprezível. Use isto para simplificar o resultado do passo 5 e resolva para u em termos de Δf e de f_t. $\quad \Delta f \approx -2\frac{u}{c}f_t$ logo $u = -\frac{\Delta f}{2f_t}c = \boxed{\frac{|\Delta f|}{2f_t}c}$

CHECAGEM O resultado do passo 6 é uma razão adimensional vezes a rapidez da luz, logo tem a dimensão correta de rapidez. Então, dimensionalmente o resultado do passo 6 é plausível.

INDO ALÉM A diferença de freqüência entre duas ondas de freqüências quase iguais é fácil de detectar porque as duas ondas interferem para produzir uma onda cuja amplitude oscila com a freqüência $|\Delta f|$, chamada de freqüência de batimento. Interferência e batimentos são discutidos no Capítulo 16.

PROBLEMA PRÁTICO 15-9 Calcule Δf se $f_t = 1{,}50 \times 10^9$ Hz, $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s e $u = 50{,}0$ m/s.

O deslocamento Doppler e relatividade Vimos, no Exemplo 15-12 (e Equações 15-39, 15-40 e 15-41), que a magnitude do deslocamento Doppler de freqüência depende de quem se move em relação ao meio, se é a fonte ou se é o receptor. Para o som, estas duas situações são fisicamente diferentes. Por exemplo, movendo-se em relação ao ar parado, você sente o ar passando por você. Em seu referencial, existe um vento. Para ondas sonoras no ar, portanto, podemos dizer se é a fonte ou se é o receptor que se move, observando se existe um vento no referencial da fonte ou no do receptor. No entanto, luz e outras ondas eletromagnéticas se propagam através do espaço vazio no qual não existe meio de propagação. Não existe nenhum "vento" para nos dizer se é a fonte ou se é o receptor que se move. De acordo com a teoria da relatividade de Einstein, o movimento absoluto não pode ser detectado, e todos os observadores medem a mesma rapidez c para a luz, independentemente de seu movimento em relação à fonte. Assim, a Equação 15-41 não pode ser correta para o deslocamento Doppler da luz. Duas modificações devem ser feitas para o cálculo do efeito Doppler relativístico para a luz. Primeiro, a rapidez das ondas que passam por um receptor é c, que é independente do movimento do receptor. Segundo, o intervalo de tempo entre a emissão de cristas de onda sucessivas, que é $T_t = 1/f_t$ no referencial da fonte, é diferente no referencial do receptor quando os dois referenciais estão em movimento relativo, por causa da dilatação do tempo e da contração do comprimento relativísticos (Equações R-9 e R-3). (Discutimos o efeito Doppler relativístico no Capítulo 39 — Volume 3.) Resulta que a freqüência recebida depende apenas da rapidez relativa de aproximação (ou de afastamento) u, e relaciona-se com a freqüência emitida por

$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \pm u}}\,f_t \qquad 15\text{-}43$$

Escolha os sinais que desloquem para cima a freqüência quando a fonte e o receptor se aproximam, e vice-versa. Novamente, quando $u \ll c$, $\Delta f/f_t \approx \pm u/c$, como dado pela Equação 15-42.

ONDAS DE CHOQUE

Em nossas deduções das expressões para o deslocamento Doppler, supusemos uma rapidez u da fonte menor do que a rapidez da onda v. Se uma fonte se move com rapidez maior do que a da onda, então não haverá ondas à frente da fonte. O que ocorrerá é que as ondas se empilharão atrás da fonte para formar uma onda de choque. No caso de ondas sonoras, esta onda de choque é ouvida como um estrondo sônico ao chegar ao receptor.

Ondas de choque de um avião supersônico. *(Sandia National Laboratory.)*

A Figura 15-28 mostra uma fonte originalmente no ponto P_1, movendo-se para a direita com rapidez u. Após um tempo t, a onda emitida do ponto P_1 terá viajado uma

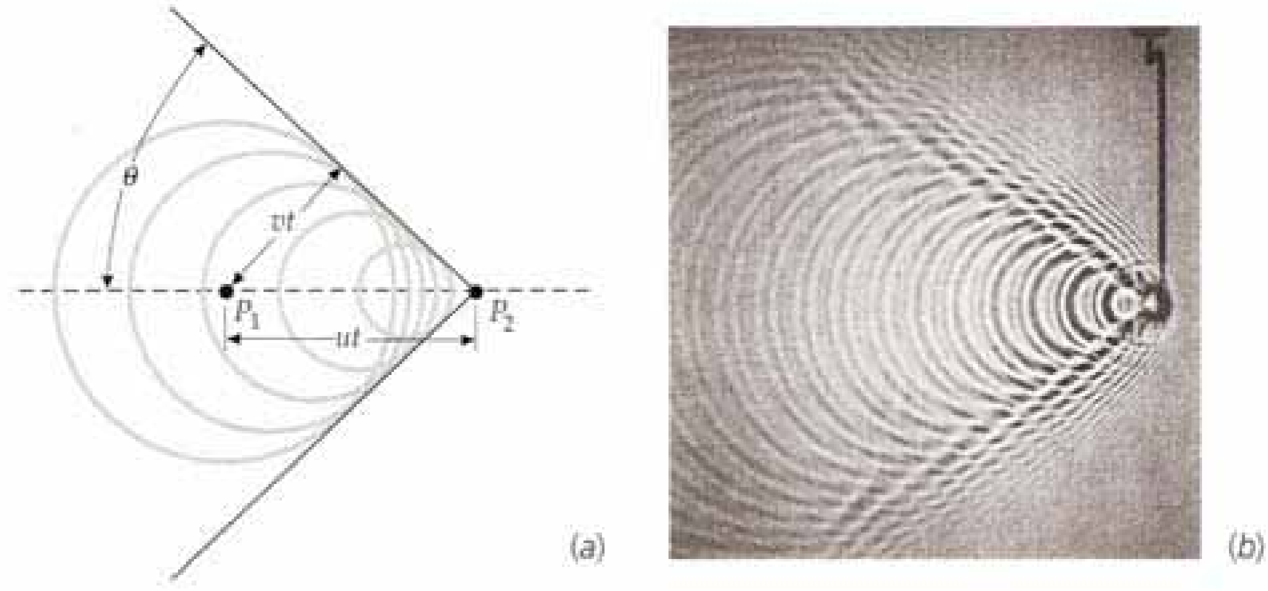


FIGURA 15-28 (*a*) Fonte se movendo com uma rapidez u maior do que a rapidez do som v. A superfície envoltória das frentes de onda forma um cone com a fonte no vértice. (*b*) Ondas em um tanque de ondas produzidas por uma fonte se movendo com uma rapidez $u > v$. (*Educational Development Center.*)

distância vt. A fonte terá viajado uma distância ut e estará no ponto P_2. A linha que liga esta nova posição da fonte à frente de onda emitida quando a fonte estava em P_1 forma um ângulo θ, chamado de **ângulo de Mach**, com a trajetória da fonte, dado por

$$\text{sen}\,\theta = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u} \qquad \text{15-44}$$

Assim, a onda de choque está confinada a um cone que se estreita à medida que u aumenta. A razão entre a rapidez da fonte u e a rapidez da onda v é chamada **número de Mach**:

$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v} \qquad \text{15-45}$$

A Equação 15-44 também se aplica à radiação eletromagnética chamada de *radiação Cerenkov*, que é emitida quando uma partícula carregada se move em um meio com uma rapidez u maior do que a rapidez da luz v naquele meio. (De acordo com a teoria especial da relatividade, é impossível para uma partícula ter rapidez maior do que c, a rapidez da luz no vácuo. Em um meio como o vidro, no entanto, elétrons e outras partículas podem se mover mais rapidamente do que a luz naquele meio.) O brilho azulado que cerca os elementos combustíveis de um reator nuclear é um exemplo da radiação Cerenkov.

Exemplo 15-15 Um Estrondo Sônico

Tente Você Mesmo

Um avião supersônico, voando para o leste a uma altitude de 15 km, passa diretamente acima do ponto P. O estrondo sônico é escutado no ponto P quando o avião está 22 km a leste do ponto P. Qual é a rapidez do avião supersônico?

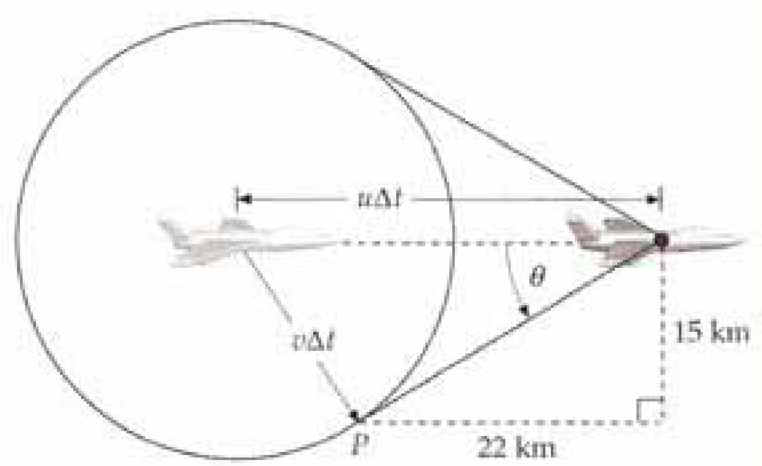


FIGURA 15-29 No tempo em que o avião se move uma distância $u\,\Delta t$, o som se move uma distância $v\,\Delta t$.

SITUAÇÃO A rapidez do avião está relacionada com o seno do ângulo de Mach (Equação 15-2). Faça um desenho para calcular o seno do ângulo de Mach.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos — Respostas

1. Esboce a posição do avião (Figura 15-29) para o instante em que o estrondo sônico é ouvido em P e para o instante em que o som foi produzido. Chame de $v\,\Delta t$ a distância percorrida pelo som e de $u\,\Delta t$ a distância percorrida pelo avião.

2. Com a ajuda do esboço, calcule u:

$$\tan\theta = \frac{15\text{ km}}{22\text{ km}} \quad \text{logo} \quad \theta = 34{,}3^\circ$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{v\,\Delta t}{u\,\Delta t} = \frac{v}{u} \quad \text{logo} \quad u = \frac{v}{\text{sen}\,\theta} = 609\text{ m/s} = \boxed{610\text{ m/s}}$$

CHECAGEM A rapidez do som é 343 m/s, logo 610 m/s é plausível para a rapidez de um avião supersônico.

Física em foco

Tudo Tremeu: Bacias Sedimentares e Ressonância Sísmica

Em 18 de abril de 1906 a cidade de São Francisco (EUA) foi devastada por um poderoso terremoto. Todos os prédios da parte baixa da cidade ruíram. Estes prédios eram construídos sobre *sedimentos não consolidados* pantanosos — cascalho, areia, terra e argila. Alguns edifícios chegaram a afundar um ou mais andares, chão adentro, enquanto os tremores liquefaziam suas fracas bases de apoio. Prédios em elevações rochosas tiveram melhor sorte.

Os danos causados a prédios construídos sobre terrenos pantanosos de cascalho, areia, terra e argila são maiores que os causados a prédios construídos sobre rocha firme.

Cidades localizadas sobre sedimentos não consolidados e nas proximidades de grandes falhas são mais vulneráveis aos terremotos do que outras. Se elas são parcialmente cercadas por elevações rochosas ou montanhas, o perigo aumenta. Algumas cidades vulneráveis são Seattle,[*,†] Istambul,[‡] Roma,[#] Los Angeles,[°] São Francisco[§] e Taipé.[¶]

Sedimentos não consolidados representam muito mais risco aos terremotos do que as rochas. Quando ocorre um terremoto, parte de sua energia é transmitida através de ondas sísmicas. Estas ondas fazem o solo vibrar em uma larga faixa de freqüências. Na rocha, as ondas vibram com amplitudes relativamente pequenas. Quanto menos firme a rocha ou o sedimento, menor será a rapidez de propagação e maior será a amplitude.[**] Em cascalho, as ondas vibram mais lentamente e possuem maior amplitude. Em terreno pantanoso, as ondas vibram ainda mais lentamente e possuem amplitude muito maior. Se você dá uma pancadinha no lado de um pote com gelatina, você pode ouvir o som produzido. Se se trata de um pote metálico ou de vidro, o som terá uma freqüência de centenas de hertz. Mas a gelatina atenua e espalha as freqüências maiores, e ressoa em freqüências menores. O mesmo princípio rege a vulnerabilidade aos terremotos para muitas cidades.[††]

Desafortunadamente, as freqüências de ressonância de muitos prédios são próximas às freqüências de ressonância das ondas sísmicas em sedimentos pouco firmes.[‡‡] Assim, não apenas os sedimentos vibram com maior amplitude, mas eles vibram mais fortemente nas freqüências mais próximas das freqüências de ressonância dos prédios. Este problema foi claramente constatado no relatório governamental sobre o terremoto de São Francisco de 1906.[##] Prédios localizados em áreas de sedimentos não consolidados foram muito mais danificados do que aqueles localizados em terrenos mais altos e mais firmes.

A situação fica pior em cidades construídas sobre sedimentos parcialmente cercados por áreas rochosas. Nelas, as ondas ressoam na bacia sedimentar com amplitudes maiores. Isto ocorreu em 1906, quando a cidade de Santa Rosa foi muito afetada, mesmo estando mais longe do epicentro do terremoto do que outras, menos afetadas. Santa Rosa é localizada sobre sua própria bacia sedimentar e é cercada por rochas.[°°] A ressonância da bacia faz com que os sedimentos vibrem com amplitude ainda maior. Esta amplitude maior provoca danos maiores. Usualmente, os danos provêm da aceleração horizontal causada pelas ondas sísmicas. Até a edição de normas rigorosas sobre terremotos, em 1970, os edifícios nos Estados Unidos não eram construídos para suportar forças horizontais. Na maioria das cidades, mais da metade das construções datam de antes da adoção dessas normas rigorosas.

Os geofísicos usam modelos para essas bacias e para seus sedimentos, para prever áreas que sejam suscetíveis de sofrer grandes danos em terremotos.[§§] Essas previsões são usadas para melhorar as normas ou para exigir que pontes,[¶¶] quebramares[***] e edifícios[†††] sejam projetados e construídos de acordo com as melhores práticas existentes para redução de risco. Na próxima vez que você sacudir um pote de gelatina, pense nas bacias sedimentares e nos danos sísmicos.

---

* Chang, S., et al., "Expected Ground Failure," Paper presented at the Seattle Fault Earthquake Scenario Conference, 2005. Seattle: Earthquake Engineering Research Institute. http://seattlescenario.eeri.org/presentations/Ch%202%20Ground%20Failure%20-%20Chang.pdf

† Pierepiekarz, M. et al., "Buildings," Paper presented at the Seattle Fault Earthquake Scenario Conference, 2005. Seattle: Earthquake Engineering Research Institute. http://seattlescenario.eeri.org/presentations/Ch%205%20Buildings%20-%20Pierepiekarz.pdf

‡ Erdik, M. *Earthquake Vulnerability of Buildings and a Mitigation Strategy: Case of Istanbul.* World Bank. http://info.worldbank.org/etools/docs/library/114715/istanbul03/docs/istanbul03/06erdik3-n%5B1%5D.pdf as of June 2006.

Perkins, S. "Rome at Risk: Seismic Shaking Could Be Long and Destructive," *Science News*, Feb. 25, 2006, 115.

° Perkins, S., "Portrait of Destruction," *Science News*, May 21, 2005, 325.

§ Zoback, M. L., "The 1906 Earthquake—Lessons Learned, Lessons Forgotten, and Future Directions," Paper presented at the American Geophysical Union Meeting, San Francisco, Dec. 5–9, 2005. http://www.ucmp.berkeley.edu/museum/events/shortcourse2006/zoback/

¶ Altenburger, E., "Earthquake Hazards in Taiwan—The September 1999 Chichi Earthquake," *FOCUS on Geography*, Winter 2004, 1–8.

** O'Connell, D. R.H., "Replications of Apparent Nonlinear Seismic Response with Linear Wave Propagation Models," *Science*, Mar. 26, 1999, Vol. 283, No. 5410, p. 2045-2050.

†† Page, R. A., Blume, J. A., and Joyner, W. B., "Earthquake Shaking and Damage to Buildings." *Science*, Aug. 22, 1975, Vol. 189., No. 4203, p. 601-608.

‡‡ Seed, H. B., et al., "Soil Conditions and Building Damage in 1967 Caracas Earthquake," *Journal of Soil Mechanics Division of American Society of Civil Engineers*, 1972, Vol. 98, No. 8, 787–806.

Lawson, A., et al., *Report of the State Earthquake Investigation Commission*. 1908. Washington, DC: Carnegie Institution.

°° Sloan, D., "Portrait of a Tectonic Landscape," *Bay Nature*, Spring 2006, Vol. 6, No. 2, 24–27.

§§ United States Geological Survey, "1906 Ground Motion Simulations," Earthquake Hazards Program. http://earthquake.usgs.gov/regional/nca/1906/simulations/, as of June 2006.

¶¶ Treyger, S., Jones, M., and Orsolini, G., "Suspending the Big One," *Roads and Bridges*, May 2004, 22–25.

*** Banijamali, B., "Rubble Mounds Feel the Rumble," *Dredging and Port Construction*, June 2005, 35–41.

††† Gonchar, J., "One Project, but Many Seismic Solutions," *Architectural Record*, May 2006, 167–174.

Resumo

1. No movimento ondulatório, a energia e a quantidade de movimento são transportadas de um ponto do espaço para outro sem haver transporte de matéria.
2. A relação $v = f\lambda$ vale para todas as ondas harmônicas.

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1. Ondas Transversais e Ondas Longitudinais	Nas ondas transversais, como as ondas em uma corda, a perturbação é perpendicular à direção de propagação. Nas ondas longitudinais, como as ondas sonoras, a perturbação tem a direção da propagação.	
2. Rapidez das Ondas	A rapidez v da onda é independente do movimento da fonte da onda. A rapidez de uma onda, em relação ao meio, depende da massa específica e das propriedades elásticas do meio.	
Ondas em uma corda	$v = \sqrt{F_T/\mu}$	15-3
Ondas sonoras	$v = \sqrt{B/\rho}$	15-4
Ondas sonoras em um gás	$v = \sqrt{\gamma RT/M}$	15-5
	onde T é a temperatura absoluta,	
	$T = t_C + 273{,}15$	15-6
	R é a constante universal dos gases,	
	$R = 8{,}314\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$	15-7
	M é a massa molar do gás, que, para o ar, vale $29{,}0 \times 10^{-3}$ kg/mol, e γ é uma constante que depende do tipo de gás. Para um gás diatômico como o ar, $\gamma = 7/5$. Para um gás monoatômico, como o hélio, $\gamma = 5/3$.	
Ondas eletromagnéticas	A rapidez das ondas eletromagnéticas no vácuo é uma constante universal $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s	
***3. Equação da Onda**	$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	15-10*b*
4. Ondas Harmônicas		
Função de onda	$y(x,t) = A\ \mathrm{sen}\,(kx \pm \omega t)$	15-15
	onde A é a amplitude, k é o número de onda e ω é a freqüência angular. Use o sinal negativo para uma onda que se propaga no sentido $+x$ e o sinal positivo para uma onda que se propaga no sentido $-x$.	
Número de onda	$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	15-14
Freqüência angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	15-17
Rapidez	$v = f\lambda = \omega/k$	15-12, 15-16
Energia	A energia de uma onda harmônica é proporcional ao quadrado da amplitude.	
Potência de ondas harmônicas em uma corda	$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$	15-22
5. Ondas Sonoras Harmônicas	Ondas sonoras podem ser consideradas tanto ondas de deslocamento quanto ondas de pressão. O ouvido humano é sensível às ondas sonoras de freqüências de cerca de 20 Hz a cerca de 20 kHz. Em uma onda sonora harmônica, a pressão e o deslocamento estão defasados de 90°.	
Amplitudes	As amplitudes de pressão e de deslocamento relacionam-se como	
	$p_0 = \rho\omega v s_0$	15-26
	onde ρ é a massa específica do meio.	
Densidade de energia	$\eta_{\text{méd}} = \dfrac{(\Delta E)_{\text{méd}}}{\Delta V} = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$	15-28

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
6. Intensidade	A intensidade de uma onda é a potência média por unidade de área. $$I = \frac{P_{\text{méd}}}{A}$$	15-29
Intensidade média I de uma onda sonora	$$I = \eta_{\text{méd}} v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v}$$	15-32
*Nível de intensidade β em dB	Os níveis sonoros de intensidade são medidos em uma escala logarítmica. $$\beta = (10\ \text{dB}) \log \frac{I}{I_0}$$ onde $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ é tomado como o limiar de audição.	15-33
7. Reflexão e Refração	Quando uma onda incide sobre uma superfície de separação entre duas regiões com diferentes valores para a rapidez da onda, parte da onda é refletida e parte é transmitida.	
	Os coeficientes de reflexão e de transmissão são $$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$	15-35
8. Difração	Se uma frente de onda é parcialmente bloqueada por um obstáculo, a parte não bloqueada da frente de onda difrata (é desviada) na região atrás do obstáculo.	
Aproximação linear	Se uma frente de onda é parcialmente bloqueada por um obstáculo, quase toda a difração ocorre para a parte da frente de onda que passa a alguns comprimentos de onda das bordas do obstáculo. Para as partes da frente de onda que passam mais longe das bordas do que alguns comprimentos de onda, a difração é desprezível e a onda se propaga em linhas retas no sentido dos raios incidentes.	
9. Efeito Doppler	Quando uma fonte sonora e um receptor estão em movimento relativo, a freqüência recebida f_r é maior do que a freqüência da fonte f_f se a distância entre fonte e receptor está diminuindo, e menor se esta distância está aumentando.	
Fonte em movimento	$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f}$$	15-38[4]
Receptor em movimento	$$f_r = \frac{v \pm u_r}{\lambda}$$	15-40[3]
Fonte e receptor em movimento	$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \quad \text{ou} \quad \frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f}$$ Escolha os sinais que levam a um aumento da freqüência para fonte ou receptor se aproximando, e uma diminuição caso contrário.	15-41[3]
Rapidez pequena de fonte ou receptor	$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm\frac{u}{v} \quad (u \ll v), \text{ onde } \quad u_f = u_f \pm u_r,$$	15-42[3]
Efeito Doppler relativístico	$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \pm u}} f_f$$ Escolha os sinais que levam a um aumento da freqüência para fonte ou receptor se aproximando, e uma diminuição caso contrário.	15-43
10. Ondas de Choque	Quando a rapidez da fonte é maior do que a rapidez da onda, as ondas atrás da fonte são confinadas em um cone de ângulo θ dado por	
Ângulo de Mach	$$\text{sen}\,\theta = \frac{u}{v}$$	15-44
Número de Mach	$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v}$$	15-45

Resposta da Checagem Conceitual

15-1 Chico ficará desapontado. O dobro da potência acústica produzirá o dobro da *intensidade* a uma dada distância do rádio, mas não o dobro do *nível de intensidade*.

Respostas dos Problemas Práticos

15-1 $\sqrt{\dfrac{\text{N}}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2} = \text{m/s}$

15-2 1,01 km/s

15-3 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2\dfrac{d^2y}{d^2\beta}$ e $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2\dfrac{d^2y}{d^2\beta}$, onde $\beta = kx + \omega t$. Logo

$k^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow \omega = kv$

15-4 26 W

15-5 $\lambda = 17$ m a 20 Hz, 17 mm a 20.000 Hz

15-6 (*a*) $A_r = +\frac{1}{3}A$ e $A_t = \frac{4}{3}A$, (*b*) $\dfrac{\mu_2}{\mu_1} = \dfrac{1}{4}$,
(*c*) $P_r/P_{in} = 1/9$ e $P_t/P_{in} = 8/9$

15-7 $1 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} + 2\dfrac{4}{9} = 1$

15-8 (*a*) $\lambda = 0{,}5$ m, (*b*) $f_r = 680$ Hz

15-9 $\Delta f = 500$ Hz

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Em problemas sobre nível de intensidade que envolvam o limiar de audição, a intensidade de referência é exatamente 1×10^{-12} W/m², por convenção. Supõe-se que este valor seja preciso com um número infinito de algarismos significativos. Logo, o número de algarismos significativos nas respostas é determinado apenas pelos dados dos problemas.

• Um só conceito, um só passo, relativamente simples
•• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
••• Desafiante, para estudantes avançados
Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • Uma corda pende verticalmente do teto. Um pulso é enviado corda acima. À medida que o pulso se aproxima do teto, ele passa a viajar mais rapidamente, mais lentamente, ou com rapidez constante? Explique sua resposta.

2 • Um pulso viaja para a direita em uma corda esticada na horizontal. Se a massa da corda por unidade de comprimento diminui da esquerda para a direita, o que acontece com a rapidez do pulso à medida que ele se propaga para a direita? (*a*) Propaga-se mais lentamente. (*b*) Propaga-se mais rapidamente. (*c*) Mantém a rapidez constante. (*d*) As informações fornecidas não são suficientes para responder.

3 • Enquanto uma onda senoidal passa por um ponto de uma corda esticada, o tempo de chegada entre duas cristas sucessivas é medido como 0,20 s. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira? (*a*) O comprimento de onda da onda é 5,0 m. (*b*) A freqüência da onda é 5,0 Hz. (*c*) A velocidade de propagação da onda é de 5,0 m/s. (*d*) O comprimento de onda da onda é 0,20 m. (*e*) Não há informação suficiente para justificar qualquer uma dessas afirmativas.

4 • Duas ondas harmônicas, em cordas idênticas, diferem apenas em amplitude. A onda A tem uma amplitude que é o dobro da amplitude da onda B. Como se comparam as energias dessas ondas? (*a*) $E_A = E_B$, (*b*) $E_A = 2E_B$, (*c*) $E_A = 4E_B$, (*d*) não há informação suficiente que permita comparar as energias.

5 • Verdadeiro ou falso: A taxa com que a energia é transportada por uma onda harmônica é proporcional ao quadrado da amplitude da onda.

6 • Os instrumentos musicais produzem sons de uma grande variedade de freqüências. Quais as ondas sonoras que possuem os maiores comprimentos de onda? (*a*) As de menores freqüências. (*b*) As de maiores freqüências. (*c*) Todas as freqüências têm o mesmo comprimento de onda. (*d*) Não há informação suficiente que permita comparar os comprimentos de onda de sons de freqüências diferentes.

7 • No Problema 6, quais as ondas sonoras que possuem as velocidades mais altas? (*a*) Os sons de menores freqüências. (*b*) Os sons de maiores freqüências. (*c*) Todas as freqüências têm a mesma rapidez de onda. (*d*) Não há informação suficiente que permita fazer esta comparação.

8 • O som viaja a 343 m/s no ar e a 1500 m/s na água. Um som de 256 Hz é produzido dentro d'água, mas você escuta o som caminhando na beira da piscina. No ar, a freqüência é (*a*) a mesma, mas o comprimento de onda do som é mais curto, (*b*) mais alta, mas o comprimento de onda do som permanece o mesmo, (*c*) mais baixa, mas o comprimento de onda do som é maior, (*d*) mais baixa, e o comprimento de onda do som é mais curto, (*e*) a mesma, e o comprimento de onda do som permanece o mesmo.

9 • Em missão de patrulha, um navio de guerra bate em uma mina, começa a incendiar e acaba explodindo. O marinheiro Abel pula n'água e começa a nadar para longe do navio destruído, enquanto o marinheiro Bruno entra em um bote salva-vidas. Mais tarde, comparando suas experiências, Abel conta a Bruno: "Eu nadava embaixo d'água e ouvi uma grande explosão vinda do navio. Quando subi à tona, ouvi uma segunda explosão. O que você pensa que aconteceu?" Bruno respondeu: "Acho que foi sua imaginação — eu só ouvi uma explosão." Explique por que Bruno escutou apenas uma explosão, enquanto Abel escutou duas.

10 • Verdadeiro ou falso: Um som de 60 dB tem o dobro da intensidade de um som de 30 dB.

11 • Em dada localização, duas ondas sonoras senoidais possuem a mesma amplitude de deslocamento, mas a freqüência do som A é o dobro da freqüência do som B. Como se comparam as densidades médias de energia das duas ondas? (*a*) A densidade média de energia de A é o dobro da densidade média de energia de B. (*b*) A densidade média de energia de A é quatro vezes a densidade média de energia de B. (*c*) A densidade média de energia de A é dezesseis vezes a densidade média de energia de B. (*d*) Os dados fornecidos não permitem comparar as densidades médias de energia.

12 • Em dada localização, duas ondas sonoras harmônicas possuem a mesma freqüência, mas a amplitude do som A é o dobro da amplitude do som B. Como se comparam as densidades médias de energia das duas ondas? (*a*) A densidade média de energia de A é o dobro da densidade média de energia de B. (*b*) A densidade média de energia de A é quatro vezes a densidade média de energia de B. (*c*) A densidade média de energia de A é dezesseis vezes a densidade média de energia de B. (*d*) Os dados fornecidos não permitem comparar as densidades médias de energia.

13 • Qual é a razão entre a intensidade de uma conversação normal e a intensidade sonora de um murmúrio (a uma distância de 5,0 m)? (*a*) 10^3, (*b*) 2, (*c*) 10^{-3}, (*d*) 1/2. *Dica: Veja a Tabela 15-1.*

14 • Qual é a razão entre o nível de intensidade de uma conversação normal e o nível de intensidade sonora de um murmúrio (a uma distância de 5,0 m)? (*a*) 10^3, (*b*) 2, (*c*) 10^{-3}, (*d*) 1/2. *Dica: Veja a Tabela 15-1.*

15 • Para aumentar o nível de intensidade sonora em 20 dB é necessário que a intensidade sonora aumente de qual fator? (*a*) 10, (*b*) 100, (*c*) 1000, (*d*) 2.

16 • Você utiliza um medidor portátil de nível sonoro para medir o nível de intensidade dos rugidos de um leão que vagueia pelo mato. Para diminuir o nível de intensidade sonora medido em 20 dB é necessário que o leão se afaste de você até que a distância entre ele e você tenha aumentado de qual fator? (*a*) 10, (*b*) 100, (*c*) 1000, (*d*) com os dados fornecidos não é possível determinar o afastamento necessário.

17 • Uma extremidade de um fio muito leve (mas forte) é presa a uma extremidade de uma corda mais grossa e mais densa. A outra extremidade do fio é presa a uma estaca firme e você puxa a outra extremidade da corda de forma que o fio e a corda fiquem bem esticados. Um pulso é enviado a partir da corda mais grossa. Verdadeiro ou falso:

(*a*) O pulso que é refletido de volta do ponto em que fio e corda estão amarrados é invertido em comparação com o pulso incidente inicial.
(*b*) O pulso que segue, passando pelo ponto em que fio e corda estão amarrados, não é invertido, em comparação com o pulso incidente inicial.
(*c*) O pulso que segue, passando pelo ponto em que fio e corda estão amarrados, possui uma amplitude menor do que a do pulso que é refletido.

18 • Luz, propagando-se no ar, incide a 45° sobre uma superfície de vidro. Verdadeiro ou falso:

(*a*) O ângulo entre o raio de luz refletido e o raio incidente é 90°.
(*b*) O ângulo entre o raio de luz refletido e o raio de luz refratado é menor do que 90°.

19 • Ondas sonoras, no ar, entram em uma sala de aula pela porta aberta, de 1,0 m de largura. Devido à difração, qual é a freqüência do som menos provável de ser ouvido por todos os alunos na sala — supondo a sala cheia? (*a*) 600 Hz, (*b*) 300 Hz, (*c*) 100 Hz, (*d*) todos estes sons são igualmente prováveis de serem ouvidos na sala. (*e*) A difração depende do comprimento de onda, e não da freqüência, logo os dados fornecidos não permitem responder.

20 • A radiação de microondas, nos modernos fornos de microondas, tem um comprimento de onda da ordem dos centímetros. Você esperaria difração significativa, se uma radiação dessas incidisse sobre uma porta de 1,00 m de largura? Explique.

21 •• É comum estrelas existirem aos pares, girando em torno de seu centro de massa comum. Se uma das estrelas é um buraco negro, ela é invisível. Explique como a existência de um desses buracos negros pode ser inferida medindo-se o deslocamento de freqüência Doppler da luz observada da outra, a estrela visível.

22 •• A Figura 15-30 mostra um pulso de onda no tempo $t = 0$ movendo-se para a direita. (*a*) Neste instante, quais são os segmentos da corda que estão se movendo para cima? (*b*) Quais são os segmentos que estão se movendo para baixo? (*c*) Existe algum segmento da corda, no pulso, instantaneamente em repouso? Responda a estas questões fazendo um esboço do pulso em um tempo ligeiramente posterior e em um tempo ligeiramente anterior, para ver como os segmentos da corda estão se movendo.

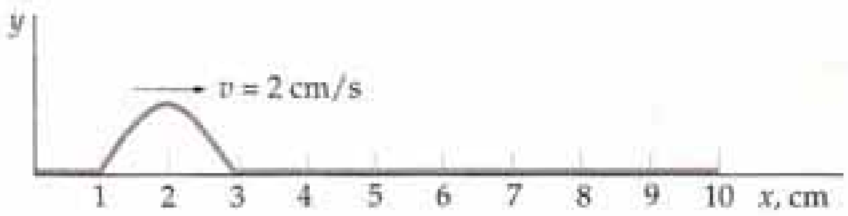


FIGURA 15-30 Problemas 22 e 23

23 •• Faça um esboço da velocidade de cada segmento da corda em função da posição, para o pulso mostrado na Figura 15-30.

24 •• Um corpo de massa m pende de uma corda muito leve presa ao teto. Você puxa a corda logo acima do corpo, produzindo um pulso de onda que sobe até o teto e volta. Compare o tempo do percurso de ida e volta deste pulso de onda com o tempo de ida e volta de um pulso de onda na mesma corda, agora com um corpo de massa $9m$ pendurado. (Suponha que a corda seja inextensível, isto é, que a distância entre a massa e o teto seja a mesma, nos dois casos.)

25 •• A rapidez do som na água é maior do que a rapidez do som no ar. A explosão de uma mina submarina, abaixo da superfície d'água, é detectada por um helicóptero que paira acima da superfície, como mostrado na Figura 15-31. Ao longo de qual caminho — A, B ou C — a onda sonora levará o menor tempo para chegar ao helicóptero? Explique sua escolha.

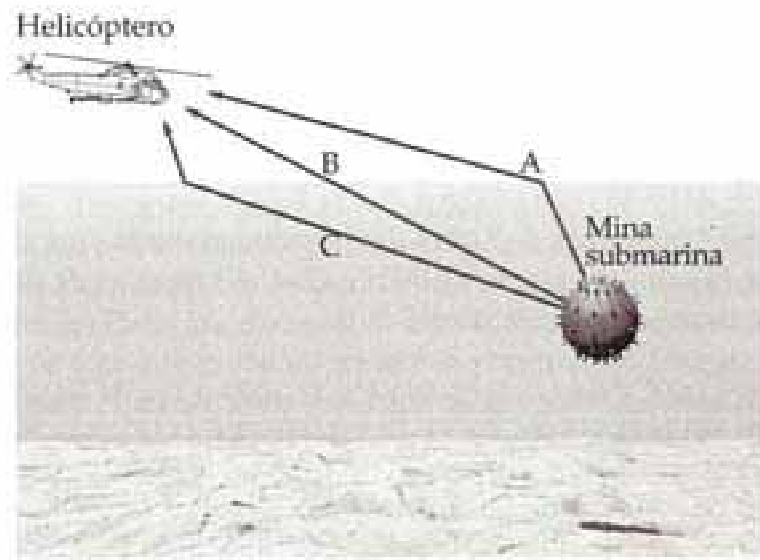


FIGURA 15-31 Problema 25

26 •• A rapidez de Mach 2, a uma altitude de 60.000 ft, significa o mesmo que a rapidez de Mach 2 próximo ao nível do chão? Explique claramente.

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

27 •• Muitos anos atrás, a partida na corrida dos 100 metros era dada pelo som de uma pistola do largador, que ficava afastado alguns metros, na parte interna das pistas. (Hoje, a pistola utilizada é usualmente apenas um gatilho, usado para acionar eletronicamente alto-falantes colocados atrás dos apoios de partida de cada competidor. Este método evita o problema de um corredor ouvir o som antes dos demais.) Estime o tempo que o corredor da pista interna leva de vantagem (em relação ao corredor da pista externa, sendo 8 o número de corredores), se todos os corredores partem ao ouvir o som da pistola do largador.

28 •• Estime a rapidez do projétil quando ele atravessa o balão de hélio da Figura 15-32. *Dica: Um transferidor pode ser útil.*

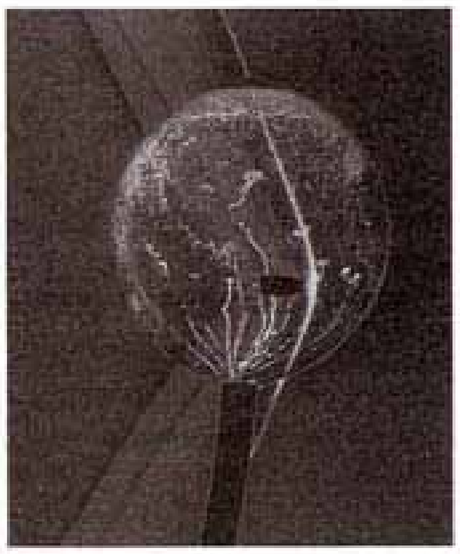


FIGURA 15-32 Problema 28 *(De Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)*

29 •• Os novos alojamentos de estudantes de uma universidade têm a forma de um semicírculo envolvendo a metade da pista de esportes. Para estimar a rapidez do som no ar, um estudante de física ambicioso postou-se no centro do semicírculo batendo palmas de forma ritmada, com uma freqüência que não lhe permitia ouvir o eco de cada batida, pois este o alcançava no mesmo instante em que ele efetuava a batida seguinte. Esta freqüência era de cerca de 2,5 batidas por segundo. Uma vez encontrada esta freqüência, ele se pôs a medir a distância aos alojamentos, verificando que ela valia 30 passos largos. Supondo que o comprimento de cada passo largo é a metade da altura do estudante [5 ft 11 in (1,80 m)], estime a rapidez do som no ar, usando estes dados. De quanto sua estimativa difere do valor comumente aceito de 343 m/s?

RAPIDEZ DAS ONDAS

30 • (*a*) O módulo volumétrico da água é $2{,}00 \times 10^9$ N/m². Use este valor para determinar a rapidez do som na água. (*a*) A rapidez do som no mercúrio é 1410 m/s. Qual é o módulo volumétrico do mercúrio ($\rho = 13{,}6 \times 10^3$ kg/m³)?

31 • Calcule a rapidez das ondas sonoras no gás hidrogênio ($M = 2{,}00$ g/mol e $\gamma = 1{,}40$) a $T = 300$ K.

32 • Uma corda de 7,00 m de comprimento tem uma massa de 100 g e está sob uma tração de 900 N. Qual é a rapidez de um pulso de onda transversal nesta corda?

33 •• (*a*) Calcule a derivada em relação à tração da rapidez do som em uma corda, dv/dF_T, e mostre que as diferenciais dv e dF_T satisfazem a $dv/v = \frac{1}{2}dF_T/F_T$. (*b*) Uma onda se move com uma rapidez de 300 m/s em uma corda que está sob uma tração de 500 N. Usando a aproximação diferencial, estime qual a variação que deve sofrer a tração para que a rapidez seja aumentada para 312 m/s. (*c*) Calcule ΔF_T exatamente e compare-o com o resultado da aproximação diferencial da Parte (*b*). Suponha que a corda não se distenda com o aumento da tração.

34 •• (*a*) Calcule a derivada em relação à temperatura absoluta da rapidez do som em uma corda e mostre que as diferenciais dv e dT satisfazem a $dv/v = \frac{1}{2}dT/T$. (*b*) Use este resultado para estimar a variação percentual da rapidez do som quando a temperatura varia de 0°C para 27°C. (*c*) Se a rapidez do som é 331 m/s a 0°C, estime seu valor a 27°C usando a aproximação diferencial. (*d*) Como se compara esta aproximação com o resultado de um cálculo exato?

35 ••• Deduza uma fórmula conveniente para a rapidez do som no ar à temperatura t em graus Celsius. Comece escrevendo a temperatura como $T = T_0 + \Delta T$, onde $T_0 = 273$ K corresponde a 0°C e $\Delta T = t$, a temperatura Celsius. A rapidez do som é uma função de T, $v(T)$. Em uma aproximação de primeira ordem, você pode escrever $v(T) \approx v(T_0) + (dv/T)_{T_0}\Delta T$, onde $(dv/T)_{T_0}$ é a derivada calculada em $T = T_0$. Calcule esta derivada e mostre que o resultado leva a

$$v = (331 \text{ m/s})(1 + (t/2T_0)) = (331 + 0{,}606t) \text{ m/s}$$

A EQUAÇÃO DA ONDA

36 • Mostre, explicitamente, que as seguintes funções satisfazem à equação da onda $\partial^2 y/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 y/\partial t^2$: (*a*) $y(x,t) = k(x + vt)^3$, (*b*) $y(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$, onde A e k são constantes e $i = \sqrt{-1}$, e (*c*) $y(x,t) = \ln[k(x - vt)]$.

37 • Mostre que a função $y = A \text{ sen } kx \cos \omega t$ satisfaz à equação da onda.

ONDAS HARMÔNICAS EM UMA CORDA

38 • Uma das extremidades de uma corda de 6,0 m de comprimento é deslocada para cima e para baixo em um movimento harmônico simples com uma freqüência de 60 Hz. Se as cristas de onda percorrem toda a corda em 0,50 s, determine o comprimento de onda das ondas na corda.

39 • Uma onda harmônica em uma corda, que tem uma massa por unidade de comprimento de 0,050 kg/m e uma tração de 80 N, possui uma amplitude de 5,0 cm. Cada ponto da corda se move em movimento harmônico simples com uma freqüência de 10 Hz. Qual é a potência transmitida pela onda que se propaga na corda?

40 • Uma corda de 2,00 m de comprimento tem uma massa de 0,100 kg. A tração é 60,0 N. Um oscilador, em uma das extremidades, envia uma onda harmônica com uma amplitude de 1,00 cm ao longo da corda. Na outra extremidade da corda toda a energia da onda é absorvida, não havendo reflexão. Qual é a freqüência do oscilador, se a potência transmitida é 100 W?

41 •• A função de onda para uma onda harmônica em uma corda é $y(x,t) = (1{,}00 \text{ mm}) \text{ sen}(62{,}8 \text{ m}^{-1}x + 314 \text{ s}^{-1}t)$. (*a*) Qual é o sentido de propagação da onda e qual é sua rapidez? (*b*) Determine o comprimento de onda, a freqüência e o período desta onda. (*c*) Qual é a maior rapidez de qualquer ponto da corda?

42 •• Uma onda harmônica em uma corda, com uma freqüência de 80 Hz e uma amplitude de 0,025 m, viaja no sentido $+x$ com uma rapidez de 12 m/s. (*a*) Escreva uma função de onda apropriada para esta onda. (*b*) Determine a maior rapidez de um ponto da corda. (*c*) Determine a maior aceleração de um ponto da corda.

43 •• Uma onda harmônica de 200 Hz, com uma amplitude de 1,2 cm, se move ao longo de uma corda de 40 m de comprimento com 0,120 kg de massa e 50 N de tração. (*a*) Qual é a energia total média

das ondas em um segmento da corda de 20 m de comprimento? (*b*) Qual é a potência transmitida quando a onda passa por um ponto da corda?

44 •• Em uma corda real, parte da energia de uma onda se dissipa enquanto a onda percorre a corda. Esta situação pode ser descrita por uma função de onda cuja amplitude $A(x)$ depende de x: $y = A(x)$ sen $(kx - \omega t)$, onde $A(x) = A_0 e^{-bx}$. Qual é a potência transportada pela onda, como função de x, para $x > 0$?

45 •• Potência deve ser transmitida ao longo de uma corda esticada, por meio de ondas harmônicas transversais. A rapidez de onda é 10 m/s e a massa específica linear da corda é 0,010 kg/m. A fonte de potência oscila com uma amplitude de 0,50 mm. (*a*) Qual é a potência média transmitida ao longo da corda se a freqüência é 400 Hz? (*b*) A potência transmitida pode ser aumentada aumentando-se a tração na corda, a freqüência da fonte ou a amplitude das ondas. De quanto cada uma dessas grandezas deve ser aumentada para provocar uma aumento da potência de uma fator de 100, se ela for a única grandeza a ser variada?

46 ••• Duas cordas muito longas são atadas uma à outra no ponto $x = 0$. Na região $x < 0$, a rapidez da onda é v_1, enquanto na região $x > 0$ a rapidez é v_2. Uma onda senoidal incide sobre o nó, da esquerda ($x < 0$); parte da onda é refletida e parte é transmitida. Para $x < 0$, o deslocamento da onda é descrito por $y(x,t) = A\,\text{sen}(k_1x - \omega t) + B\,\text{sen}(k_1x + \omega t)$, enquanto para $x > 0$, $y(x,t) = C\,\text{sen}(k_2x - \omega t)$, onde $\omega/k_1 = v_1$ e $\omega/k_2 = v_2$. (*a*) Se supomos que tanto a função de onda y quanto sua primeira derivada espacial $\partial y/\partial x$ devam ser contínuas em $x = 0$, mostre que $C/A = 2v_2/(v_1 + v_2)$ e que $B/A = (v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$. (*b*) Mostre que $B^2 + (v_1/v_2)C^2 = A^2$.

ONDAS SONORAS HARMÔNICAS

47 • Uma onda sonora no ar produz uma variação de pressão dada por $p(x,t) = 0{,}75\cos[\frac{\pi}{2}(x - 343t)]$, com p em pascais, x em metros e t em segundos. Determine (*a*) a amplitude de pressão, (*b*) o comprimento de onda, (*c*) a freqüência e (*d*) a rapidez da onda.

48 • (*a*) A nota dó central da escala musical tem uma freqüência de 262 Hz. Qual é o comprimento de onda desta nota no ar? (*b*) A freqüência do dó uma oitava acima do dó central é o dobro da do dó central. Qual é o comprimento de onda desta nota no ar?

49 • A massa específica do ar é 1,29 kg/m³. (*a*) Qual é a amplitude de deslocamento de uma onda sonora de 100 Hz de freqüência e amplitude de pressão igual a $1{,}00 \times 10^{-4}$ atm? (*b*) A amplitude de deslocamento de uma onda sonora de 300 Hz de freqüência é $1{,}00 \times 10^{-7}$ m. Qual é a amplitude de pressão desta onda?

50 • A massa específica do ar é 1,29 kg/m³. (*a*) Qual é a amplitude de deslocamento de uma onda sonora de 500 Hz de freqüência com a amplitude de pressão no limiar da dor, de 29,0 Pa? (*b*) Qual é a amplitude de deslocamento de uma onda sonora que tem a mesma amplitude de pressão da onda da Parte (*a*), mas uma freqüência de 1,00 kHz?

51 • Uma onda sonora típica bem audível, de 1,00 kHz de freqüência, tem uma amplitude de pressão de cerca de $1{,}00 \times 10^{-4}$ atm. (*a*) Em $t = 0$, a pressão é máxima em certo ponto x_1. Qual é o deslocamento nesse ponto, em $t = 0$? (*b*) Supondo a massa específica do ar igual a 1,29 kg/m³, qual é o valor máximo do deslocamento, em qualquer instante e posição?

52 • Uma oitava representa uma variação de freqüência por um fator de 2. Uma pessoa pode ouvir quantas oitavas?

53 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Nos oceanos, as baleias se comunicam por transmissão sonora através da água. Uma baleia emite um som de 50,0 Hz para dizer a um filhote teimoso para voltar ao grupo. A rapidez do som na água é de cerca de 1500 m/s. (*a*) Quanto tempo leva para o som chegar ao filhote, se ele está afastado de 1,20 km? (*b*) Qual é o comprimento de onda deste som na água? (*c*) Se as baleias estão próximas da superfície, parte da energia sonora pode refratar para o ar. Quais seriam a freqüência e o comprimento de onda do som no ar?

ONDAS EM TRÊS DIMENSÕES: INTENSIDADE

54 • Uma fonte esférica senoidal irradia som uniformemente em todas as direções. A uma distância de 10,0 m, a intensidade sonora é $1{,}00 \times 10^{-4}$ W/m². (*a*) A que distância da fonte a intensidade vale $1{,}00 \times 10^{-6}$ W/m²? (*b*) Qual é a potência irradiada por esta fonte?

55 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um alto-falante, em um concerto de rock, gera um som com uma intensidade de $1{,}00 \times 10^{-2}$ W/m² a 20,0 m de distância, com uma freqüência de 1,00 kHz. Suponha que a energia do alto-falante seja distribuída uniformemente em três dimensões. (*a*) Qual é a potência acústica total de saída do alto-falante? (*b*) A que distância a intensidade do som estará no limiar da dor de 1,00 W/m²? (*c*) Qual é a intensidade do som a 30,0 m?

56 •• Quando um alfinete de 0,100 g de massa é largado de uma altura de 1,00 m, 0,050 por cento de sua energia é convertida em um pulso sonoro que dura 0,100 s. (*a*) Estime até a que distância o alfinete pode ser ouvido, se a intensidade mínima audível é de $1{,}00 \times 10^{-11}$ W/m². (*b*) Seu resultado da Parte (*a*) é muito maior do que o da prática, devido ao ruído de fundo. Se supusermos que a intensidade deva ser pelo menos de $1{,}00 \times 10^{-8}$ W/m² para que o som seja ouvido, estime a até que distância pode estar o alfinete ao cair para ser ouvido. (Nas duas partes, suponha que a intensidade seja $P/4\pi r^2$.)

*NÍVEL DE INTENSIDADE

57 • Qual é o nível de intensidade, em decibéis, de uma onda sonora que tem uma intensidade igual a (*a*) $1{,}00 \times 10^{-10}$ W/m² e (*b*) $1{,}00 \times 10^{-2}$ W/m²?

58 • Qual é a intensidade de uma onda sonora em um determinado ponto onde o nível de intensidade é (*a*) $\beta = 10$ dB e (*b*) $\beta = 3{,}0$ dB?

59 • A uma certa distância, o nível de intensidade sonora do latido de um cachorro é 50 dB. À mesma distância, a intensidade sonora de um concerto de rock é 10.000 vezes igual à do latido do cachorro. Qual é o nível de intensidade sonora do concerto de rock?

60 • Que fração da potência acústica de um ruído deve ser eliminada para se reduzir seu nível de intensidade de 90 para 70 dB?

61 •• Uma fonte esférica irradia som uniformemente em todas as direções. À distância de 10 m, o nível de intensidade sonora é 80 dB. (*a*) A que distância da fonte o nível de intensidade é 60 dB? (*b*) Qual é a potência irradiada por esta fonte?

62 •• Henrique e Suzana estão sentados em lados opostos na platéia, dentro da tenda de um circo, quando um elefante dá um forte bramido. Se Henrique percebe um nível de intensidade sonora de 65 dB e Suzana percebe apenas 55 dB, qual é a razão entre as distâncias de Suzana e de Henrique ao elefante?

63 •• Três fontes sonoras produzem níveis de intensidade de 70 dB, 73 dB e 80 dB, quando atuando separadamente. Quando elas atuam juntas, a intensidade resultante é a soma das intensidades individuais. (*a*) Determine o nível de intensidade sonora, em decibéis, quando as três fontes atuam ao mesmo tempo. (*b*) Discuta a efetividade de se eliminar as duas fontes menos intensas para reduzir o nível de intensidade do ruído.

64 •• Mostre que, se duas pessoas estão diferentemente afastadas de uma fonte sonora, a diferença $\Delta\beta$ entre os níveis de intensidade sonora que atingem estas pessoas, em decibéis, será sempre a mesma, não importando a potência irradiada pela fonte.

65 ••• Todos, em uma festa, estão falando com a mesma intensidade. Uma pessoa está conversando com você e o conseqüente nível de intensidade sonora, onde você está, é de 72 dB. Supondo que todas as 38 pessoas na festa distem de você a mesma distância daquela pessoa com quem você conversa, determine o nível de intensidade sonora onde você está.

66 ••• Quando um violinista passa o arco pelas cordas, a força com que o arco é empurrado é bem pequena, cerca de 0,60 N. Suponha que o arco deslize pela corda lá, que vibra a 440 Hz, a 0,50 m/s. Um ouvinte, a 35 m de distância do artista, escuta um som de 60 dB. Supondo o som irradiando uniformemente em todas as direções, com que eficiência a energia mecânica dispendida pelo músico ao tocar é transformada em energia sonora?

67 ••• O nível de intensidade sonora em determinado ponto de uma sala de aula vazia é 40 dB. Quando 100 estudantes estão escrevendo durante um exame, o nível de ruído naquele ponto aumenta para 60 dB. Supondo contribuições iguais de potência sonora por parte de todos os alunos, determine o nível de intensidade sonora naquele ponto depois que 50 alunos deixaram a sala.

ONDAS EM CORDAS COM VARIAÇÃO DE RAPIDEZ

68 • Um cordão de 3,00 m de comprimento, com 25,0 g de massa, é amarrado a uma corda de 4,00 m de comprimento e 75,0 g de massa, e a combinação é submetida uma tração de 100 N. Se um pulso transversal é enviado a partir do cordão, determine os coeficientes de reflexão e de transmissão no ponto de junção.

69 • Seja uma corda tensa, com uma massa por unidade de comprimento μ_1, transportando pulsos de onda transversais que incidem sobre um ponto onde a corda é conectada a uma outra corda, com uma massa por unidade de comprimento μ_2. (*a*) Mostre que, se $\mu_1 = \mu_2$, o coeficiente de reflexão r é igual a zero e o coeficiente de transmissão τ é igual a $+1$. (*b*) Mostre que, se $\mu_2 \gg \mu_1$, $r \approx -1$ e $\tau \approx 0$. (*c*) Mostre que, se $\mu_2 \ll \mu_1$, $r \approx +1$ e $\tau \approx +2$.

70 •• Verifique a validade de $1 = r^2 + (v_1/v_2)\tau^2$ (Equação 15-36) por substituição das expressões para r e τ.

71 ••• Seja uma corda esticada com uma massa por unidade de comprimento μ_1, transportando pulsos de onda transversais da forma $y = f(x - v_1t)$ que incidem sobre um ponto P onde a corda é conectada a uma segunda corda, com uma massa por unidade de comprimento μ_2. Deduza $1 = r^2 + (v_1/v_2)\tau^2$ igualando a potência incidente no ponto P à soma das potências refletida e transmitida em P.

O EFEITO DOPPLER

Nos Problemas 72 a 75, suponha a fonte emitindo som à freqüência de 200 Hz. Suponha, também, a rapidez do som no ar parado igual a 343 m/s.

72 • Uma fonte sonora se move a 80 m/s ao encontro de um observador estacionário no ar parado. (*a*) Determine o comprimento de onda do som na região entre a fonte e o observador. (*b*) Determine a freqüência escutada pelo observador.

73 • Considere a situação descrita no Problema 72 sob o ponto de vista do referencial da fonte. Neste referencial, o observador e o ar se movem ao encontro da fonte a 80 m/s e a fonte está em repouso. (*a*) Com que rapidez, em relação à fonte, o som está viajando na região entre fonte e observador? (*b*) Determine o comprimento de onda do som na região entre fonte e observador. (*c*) Determine a freqüência escutada pelo observador.

74 • Uma fonte sonora se afasta a 80 m/s de um observador estacionário. (*a*) Determine o comprimento de onda das ondas sonoras na região entre a fonte e o observador. (*b*) Determine a freqüência escutada pelo observador.

75 • Um observador está se afastando a 80 m/s de uma fonte que está estacionária em relação ao ar. Determine a freqüência escutada pelo observador.

76 •• **RICO EM CONTEXTO** Você está assistindo à chegada de um ônibus espacial. Próximo ao final do pouso, a nave está viajando a Mach 2,50 e a uma altitude de 5000 m. (*a*) Qual é o ângulo que a onda de choque forma com a direção de vôo da nave? (*b*) Qual é a sua distância ao ônibus espacial, no momento em que você ouve a onda de choque, supondo que a nave mantenha constantes sua direção de vôo e a altitude de 5000 m, após passar diretamente sobre sua cabeça?

77 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** O detector de neutrinos japonês SuperKamiokande é um tanque de água do tamanho de um edifício de 14 andares. Quando os neutrinos colidem com os elétrons da água, a maior parte de sua energia é transferida para os elétrons. Em conseqüência, os elétrons saem com velocidades de módulos próximos de c. O neutrino é contado detectando-se a onda de choque chamada de radiação Cerenkov, que é produzida quando os elétrons rápidos atravessam a água com rapidez maior do que a rapidez da luz na água. Se o maior ângulo do cone de onda de choque de Cerenkov é 48,75°, qual é a rapidez da luz na água?

78 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Você deve calibrar os radares da polícia. Um desses aparelhos emite microondas à freqüência de 2,00 GHz. Durante os testes, estas ondas foram refletidas de um carro que se afastava diretamente do aparelho estacionário. Você detecta uma diferença de freqüência (entre as microondas recebidas e aquelas que foram enviadas) de 293 Hz. Determine a rapidez do carro.

79 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Usa-se o efeito Doppler, rotineiramente, para medir a rapidez dos ventos em tempestades. Como gerente de uma estação meteorológica, você está usando um sistema Doppler de radar que possui uma freqüência de 625 MHz para fazer refletir pulsos por gotas de chuva em uma tempestade distante 50 km. Você verifica que o pulso que recebe está com uma freqüência 325 Hz maior. Supondo o vento vindo diretamente ao seu encontro, qual é a rapidez do vento na tempestade? *Dica: O sistema de radar pode medir apenas a componente da velocidade do vento que está em sua "linha de visada".*

80 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um destróier estacionário está equipado com um sonar que envia pulsos sonoros de 40 MHz. O destróier recebe de volta os pulsos refletidos por um submarino que está diretamente abaixo dele, com uma freqüência de 39,958 MHz e após 80 ms. Se a rapidez do som na água é 1,54 km/s, (*a*) qual é a profundidade do submarino e (*b*) qual é sua rapidez vertical?

81 •• Um radar da polícia transmite microondas de $3{,}00 \times 10^{10}$ Hz, que viajam no ar a $3{,}00 \times 10^8$ m/s. Seja um carro se afastando do carro da polícia, que está parado, a 140 km/s. (*a*) Qual é a diferença de freqüência entre o sinal transmitido e o sinal recebido a partir do carro em movimento? (*b*) Suponha o carro da polícia movendo-se a 60 km/h, no mesmo sentido do outro veículo. Qual é a diferença de freqüência entre o sinal transmitido e o sinal refletido?

82 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA, RICO EM CONTEXTO** Na moderna medicina, o efeito Doppler é usado rotineiramente para se medir a taxa e a orientação do fluxo sangüíneo nas artérias e veias. "Ultrasons" de alta freqüência (sons de freqüências acima da freqüência audível pelos humanos) são tipicamente empregados. Suponha que você deve medir o fluxo sangüíneo de uma veia (localizada na perna de uma paciente mais idosa) que envia o sangue de volta para o coração. A existência de veias varicosas sugere que talvez as válvulas que controlam a orientação do fluxo podem não estar funcionando bem, o que pode provocar um refluxo do sangue de volta para os pés. Usando som de 50,0 kHz de freqüência, você aponta a fonte sonora da parte superior da coxa para os pés, e mede a freqüência do som refletido daquela área venosa como menor do que 50,0 kHz. (*a*) O seu diagnóstico sobre a condição das válvulas estava corret

Caso afirmativo, explique. (*b*) Estime a diferença de freqüência que o instrumento deve poder medir para permitir que você meça valores de rapidez abaixo de 1,00 mm/s. Tome a rapidez do som no corpo humano como a mesma na água, 1500 m/s.

83 •• Uma fonte sonora de freqüência f_f se move com rapidez u_f em relação ao ar parado, ao encontro de um receptor que se afasta da fonte com rapidez u_r em relação ao ar parado. (*a*) Escreva uma expressão para a freqüência recebida f_r'. (*b*) Use a aproximação $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ para mostrar que, se ambos u_f e u_r são pequenos em comparação a v, então a freqüência recebida é aproximadamente dada por

$$f_r' = \left(1 + \frac{u_{rel}}{v}\right) f_f$$

Onde $u_{rel} = u_f - u_r$ é a rapidez da fonte em relação ao receptor.

84 •• Para estudar o deslocamento Doppler, você leva um diapasão eletrônico que emite a freqüência do dó central (262 Hz) ao poço de desejos do campus, conhecido como "O Abismo". Quando você segura o aparelho à distância de um braço (1,0 m), você mede seu nível de intensidade como sendo 80,0 dB. Depois, você o larga dentro do poço e o escuta cair. Após 5,50 s de queda, qual é a freqüência que você escuta?

85 •• Você está em um balão de ar quente, arrastado por um vento de 36 km/h, e tem consigo uma fonte sonora que emite som de 800 Hz, quando se aproxima de um edifício alto. (*a*) Qual é a freqüência sonora percebida por uma morador em uma janela do edifício? (*b*) Qual é a freqüência refletida que você percebe?

86 •• Um carro se aproxima de uma parede refletora. Um observador estacionário, atrás do carro, ouve um som de 745 Hz de freqüência da buzina do carro e um som de 863 Hz de freqüência vindo da parede. (*a*) Qual é a rapidez do carro? (*b*) Qual é a freqüência da buzina do carro? (*c*) Qual é a freqüência que o motorista ouve como refletida pela parede?

87 •• A motorista de um carro que viaja a 100 km/h, ao encontro de uma parede vertical, dá um toque na buzina. Exatamente 1,00 s após, ela ouve o eco e nota que sua freqüência é de 840 Hz. Qual era a distância entre o carro e a parede quando a motorista tocou a buzina e qual é a freqüência da buzina?

88 •• Você está em um vôo transatlântico, viajando para o oeste a 800 km/h. Um avião experimental, voando a Mach 1,6 e 3,0 km ao norte de seu avião, também viaja de leste para oeste. Qual é a distância entre os dois aviões, quando você ouve o estrondo sônico do avião experimental?

89 ••• O telescópio espacial Hubble tem sido usado para determinar a existência de planetas orbitando estrelas distantes. Um planeta que orbita uma estrela fará com que a estrela "bamboleie" com o mesmo período que o da órbita do planeta. Devido a isto, a luz da estrela sofrerá um deslocamento Doppler para mais e para menos, periodicamente. Estime os comprimentos de onda de luz máximo e mínimo correspondentes ao comprimento de onda de 500 nm emitido pelo Sol, após sofrer os deslocamentos Doppler em razão do movimento do Sol provocado por Júpiter.

PROBLEMAS GERAIS

90 • No tempo $t = 0$, a forma de um pulso de onda em uma corda é dada pela função $y(x,0) = 0{,}120\ \text{m}^3/((2{,}00\ \text{m})^2 + x^2)$, onde x está em metros. (*a*) Esboce $y(x,0)$ *versus* x. (*b*) Escreva a função de onda $y(x,t)$ no tempo genérico t, com o pulso se movendo no sentido $+x$ com uma rapidez de 10,0 m/s e com o pulso se movendo no sentido $-x$ com uma rapidez de 10,0 m/s.

91 • Um apito, que tem uma freqüência de 500 Hz, se move em um círculo de 1,00 m de raio a 3,00 rev/s. Quais são as freqüências máxima e mínima ouvidas por um observador estacionário no plano do círculo e a 5,00 m de seu centro?

92 • Ondas oceânicas se movem para a praia com uma rapidez de 8,90 m/s e uma separação crista-a-crista de 15,0 m. Você está em um pequeno barco ancorado ao largo. (*a*) Com que freqüência as cristas de onda atingem o seu barco? (*b*) Você, agora, levanta âncora e ruma mar adentro com uma rapidez de 15,0 m/s. Com que freqüência as cristas de onda atingem, agora, o seu barco?

93 •• Um fio de 12,0 m de comprimento tem uma massa de 85,0 g e está sob uma tração de 180 N. Um pulso é gerado na extremidade esquerda do fio e, 25,0 ms após, um segundo pulso é gerado na extremidade direita do fio. Onde os pulsos se encontram primeiro?

94 •• Você está parado no acostamento de uma rodovia. Determine a rapidez de um carro cujo tom de buzina cai 10 por cento ao passar por você. (Em outras palavras, a queda total de freqüência entre o valor "de aproximação" e o valor "de afastamento" é 10 por cento.)

95 •• Um alto-falante de 20,0 cm de diâmetro está vibrando a 800 Hz com uma amplitude de 0,0250 mm. Supondo que as moléculas de ar na vizinhança tenham a mesma amplitude de vibração, determine (*a*) a amplitude de pressão logo à frente do alto-falante, (*b*) a intensidade sonora e (*c*) a potência acústica irradiada pela superfície frontal do alto-falante.

96 •• Uma onda sonora plana e harmônica, no ar, tem uma amplitude de 1,00 μm e uma intensidade de 10,0 mW/m². Qual é a freqüência da onda?

97 •• Água escoa a 7,0 m/s em um cano de 5,0 cm de raio. Uma placa, de área igual à área de seção reta do cano, é repentinamente inserida para interromper o fluxo. Determine a força exercida sobre a placa. Tome a rapidez do som na água como 1,4 km/s. *Dica: Quando a placa é inserida, uma onda de pressão se propaga através da água com a rapidez do som, v_s. A massa de água levada ao repouso em um tempo Δt é a água em um comprimento de cano igual a $v_s\,\Delta t$.*

98 •• Um dispositivo fotográfico de exposição rápida, projetado para fotografar um projétil explodindo uma bolha de sabão, é mostrado na Figura 15-33. A onda de choque do projétil deve ser detectada por um microfone que dispara o dispositivo. O microfone é colocado em uma prateleira paralela e 0,350 m abaixo da trajetória do projétil. A prateleira é usada para ajustar a posição do microfone. Se o projétil está viajando com 1,25 vez a rapidez do som, a que distância atrás da bolha de sabão deve ser colocado o microfone para disparar o dispositivo fotográfico? (Suponha que a resposta do dispositivo ao microfone seja instantânea.)

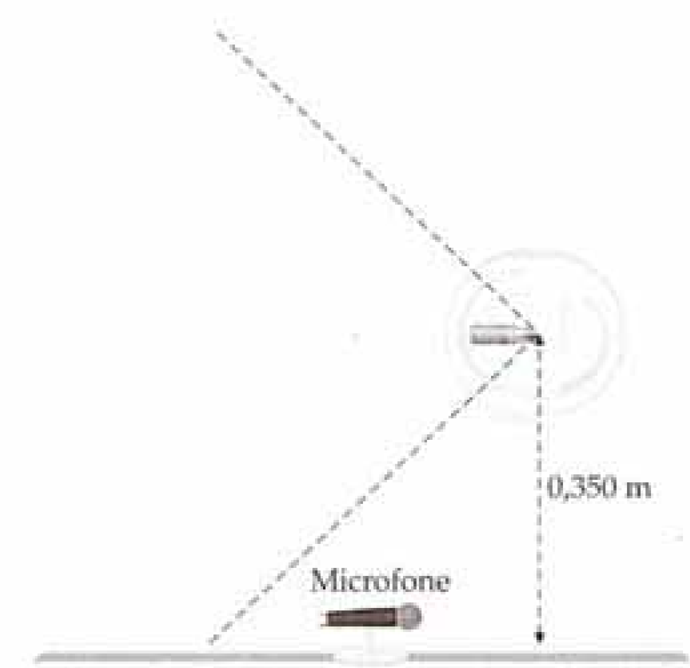


FIGURA 15-33 Problema 98

99 •• Uma coluna de soldados mantém o passo ouvindo a banda que segue à frente. O ritmo da música é de 100 passos/minuto. Uma câmara de televisão mostra que apenas os soldados da

frente e da retaguarda da coluna estão no passo certo. Os soldados do meio da coluna avançam com o pé esquerdo enquanto os da frente e os da retaguarda estão avançando com o pé direito. No entanto, o bom treinamento que os soldados receberam lhes dá a segurança de estarem todos no passo certo. Qual é o comprimento da coluna?

100 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Um morcego, voando de encontro a um obstáculo estacionário a 120 m/s, emite pulsos sonoros breves, de alta freqüência, com uma freqüência de repetição de 80,0 Hz. Qual é o intervalo entre os tempos de chegada dos pulsos refletidos percebidos pelo morcego?

101 •• Feixes de laser enviados para a Lua são um recurso rotineiro para se determinar com precisão a distância entre a Terra e a Lua. No entanto, para determinar a distância com precisão, correções devem ser feitas sobre a rapidez média da luz na atmosfera terrestre, que é 99,997 por cento da rapidez da luz no vácuo. Supondo a atmosfera terrestre com 8,00 km de altura, estime o comprimento da correção.

102 •• Um diapasão, preso a uma corda esticada, gera ondas transversais. A vibração do diapasão é perpendicular à corda. Sua freqüência é de 400 Hz e a amplitude de sua oscilação é 0,50 mm. A corda tem uma massa específica linear de 0,010 kg/m, e está sob uma tração de 1,0 kN. Suponha que não haja ondas refletidas na outra extremidade da corda. (*a*) Quais são o período e a freqüência das ondas na corda? (*b*) Qual é a rapidez das ondas? (*c*) Quais são o comprimento de onda e o número de onda? (*d*) Escreva uma função de onda apropriada para as ondas na corda. (*e*) Quais são a rapidez e a aceleração máxima de um ponto da corda? (*f*) Com que taxa média mínima a energia deve ser fornecida ao diapasão para mantê-lo oscilando com a mesma amplitude?

103 ••• Uma corda longa, de 0,100 kg/m de massa por unidade de comprimento, está sob uma tração constante de 10,0 N. Um motor induz, em uma das extremidades da corda, um movimento harmônico simples transversal de 5,00 ciclos por segundo e de 40,0 mm de amplitude. (*a*) Qual é a rapidez da onda? (*b*) Qual é o comprimento de onda? (*c*) Qual é a quantidade de movimento linear transversal máxima de um segmento da corda de 1,00 mm? (*d*) Qual é a máxima força resultante sobre um segmento da corda de 1,00 mm?

104 ••• Neste problema, você deduzirá uma expressão para a energia potencial de um segmento de um corda que transmite uma onda progressiva (Figura 15-34). A energia potencial de um segmento é igual ao trabalho realizado pela tração ao distender a corda, que vale $\Delta U = F_T(\Delta\ell - \Delta x)$, onde F_T é a tração, $\Delta\ell$ é o comprimento do segmento distendido e Δx é o seu comprimento original. (*a*) Use a expansão binomial para mostrar que $\Delta\ell - \Delta x \approx \frac{1}{2}(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$ e que, portanto, $\Delta U \approx \frac{1}{2}F_T(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$. (*b*) Calcule $\partial y/\partial x$ da equação da onda $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$ (Equação 15-15) e mostre que $\Delta U \approx \frac{1}{2}F_T k^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\,\Delta x$.

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x[1 + (\Delta y/\Delta x)^2]^{1/2}.$$

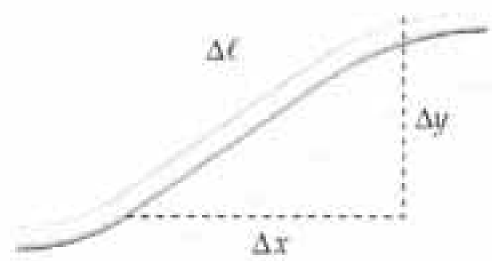


FIGURA 15-34 Problema 104

CAPÍTULO 16

COMPOSTO DE MAIS DE 6134 TUBOS COM UMA GRANDE VARIEDADE DE TAMANHOS, ESTE ÓRGÃO É CAPAZ DE PRODUZIR NOTAS DESDE UM DÓ ABAIXO DO MAIS BAIXO DÓ DE UM PIANO, COM UMA FREQÜÊNCIA DE 16 Hz, ATÉ UMA NOTA MAIS DE UMA OITAVA ACIMA DA NOTA MAIS ALTA DO PIANO, COM UMA FREQÜÊNCIA DE 10.548 Hz. *(© Garryuk / Dreamstime.com)*

Superposição e Ondas Estacionárias

? Qual é o comprimento do tubo que produz a nota de 16 Hz? (Veja o Exemplo 16-9.)

Visando uma compreensão clara do movimento ondulatório simples examinamos, no Capítulo 15, o movimento de uma seqüência de perturbações em um meio. No entanto, você já deve ter observado, no mar, o que acontece quando essas perturbações colidem e se cruzam. Quando duas ou mais ondas se sobrepõem no espaço, suas perturbações individuais também se sobrepõem, somando-se algebricamente, para criar uma onda resultante. No caso de ondas harmônicas, a sobreposição de ondas de mesma freqüência produz padrões ondulatórios espaciais que se sustentam.

A sala de concertos Walt Disney em Los Angeles, na Califórnia (EUA), que abriga o órgão aqui mostrado, é uma maravilha da engenharia e da acústica. Engenheiros civis e de estruturas trabalharam para estabelecer a integridade estrutural do órgão projetado por Frank Gehry e para garantir que o órgão seja forte o suficiente para suportar terremotos. Engenheiros acústicos criaram maquetes para testes acústicos. Uma dessas maquetes, na escala de um décimo do tamanho real, até incluía figuras de chumbo cobertas de feltro para representar os espectadores. (Ondas sonoras com 10 vezes a freqüência normal — e um décimo do comprimento de onda normal — foram usadas para testar o projeto.)

Nosso estudo de ondas não termina com este capítulo, no entanto. Continuaremos a examinar ondas nos Capítulo 34 (Volume 3), onde a natureza ondulatória dos elétrons, e de outros objetos materiais, é indispensável para nossa compreensão da física quântica.

Neste capítulo começamos com a superposição de pulsos de onda em uma corda e, depois, consideramos a superposição e a interferência de ondas harmônicas. Examinamos o fenômeno dos batimentos e estudamos ondas estacionárias, que ocorrem quando ondas harmônicas são confinadas no espaço. Finalmente, tratamos da análise de tons musicais complexos.

16-1 SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS

A Figura 16-1*a* mostra dois pulsos de onda de pequenas amplitudes e de diferentes durações que se movem em uma corda, em sentidos opostos. A forma da corda quando eles se sobrepõem pode ser determinada somando-se os deslocamentos que seriam produzidos por cada pulso separadamente. O **princípio da superposição** é uma propriedade do movimento ondulatório e estabelece que:

> Quando duas ou mais ondas se sobrepõem, a onda resultante é a soma algébrica das ondas individuais.
>
> PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Isto é, quando há dois pulsos em uma corda, a função de onda total é a soma algébrica das funções de onda individuais. Apesar de valer para muitas ondas, o princípio da superposição não vale para todas as ondas. Por exemplo, o princípio da superposição não vale se a soma de dois deslocamentos excede o limite proporcional* do meio. Nas discussões que se seguem, supomos válido o princípio da superposição.

No caso especial de dois pulsos idênticos, exceto que um está invertido em relação ao outro, como na Figura 16-1*b*, há um instante em que os pulsos se sobrepõem exatamente para somarem zero. Neste instante, a corda é horizontal. Após um curto tempo, os pulsos individuais emergem, cada um continuando com sua orientação original. Isto é, eles deixam a região de sobreposição com exatamente a mesma aparência que tinham antes de lá entrarem.

> ! Depois que dois pulsos de onda viajando em sentidos opostos, "colidem", eles continuam viajando cada um com a mesma rapidez, o mesmo tamanho e a mesma forma que tinham antes da "colisão".

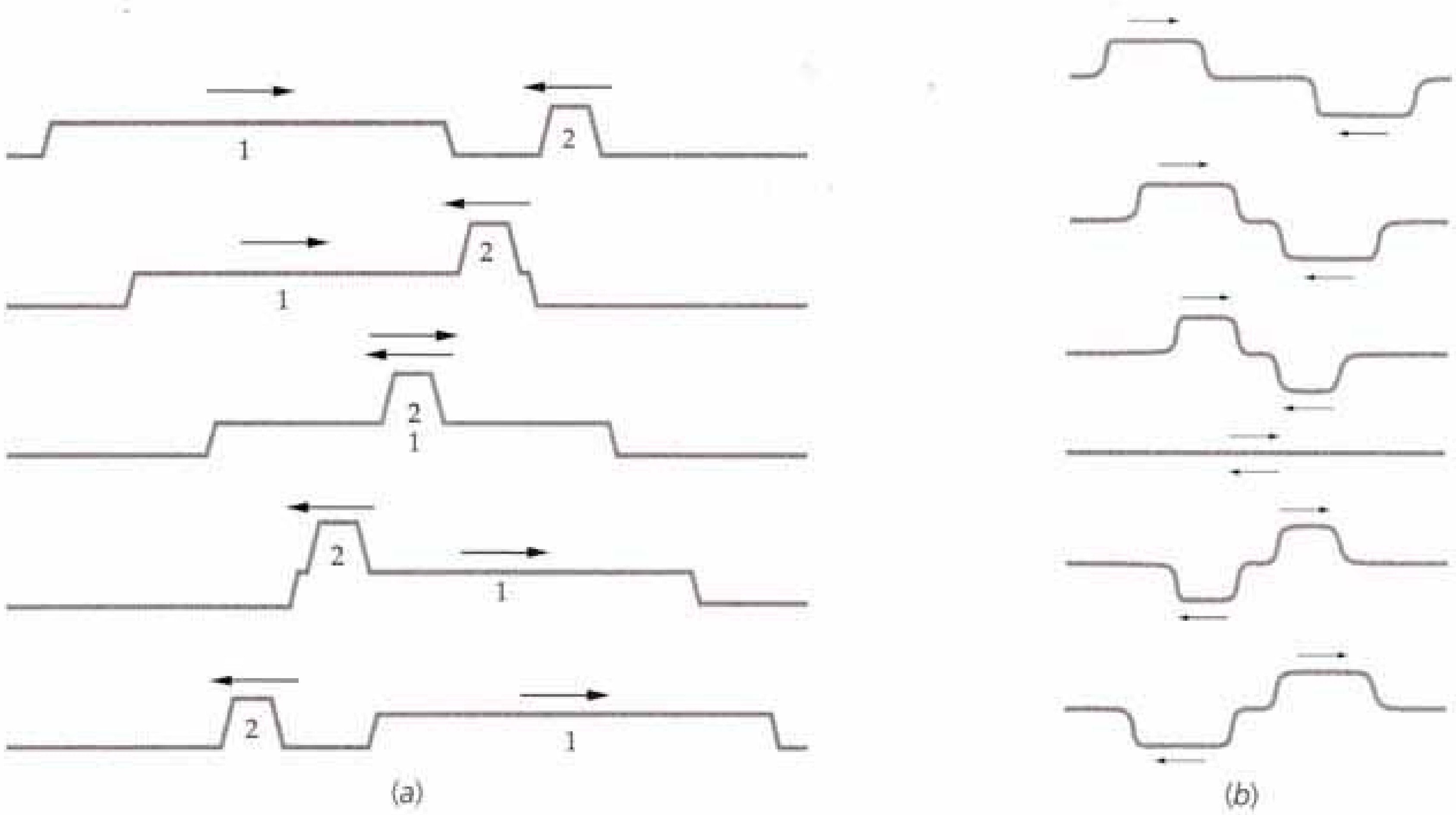


FIGURA 16-1 Pulsos de onda se movendo em sentidos opostos em uma corda. A forma da corda, quando os pulsos se sobrepõem, é determinada somando-se os deslocamentos individuais de cada pulso. (*a*) Superposição de dois pulsos com deslocamentos no mesmo sentido (para cima). A figura mostra a forma da corda em intervalos de tempo iguais, de duração Δt. Cada pulso viaja o comprimento do pulso 2 durante o tempo Δt. (*b*) Superposição de dois pulsos com deslocamentos iguais em sentidos opostos. Aqui, a soma algébrica dos deslocamentos implica a subtração de suas magnitudes.

* O limite de proporcionalidade de um material elástico é a máxima deformação relativa para a qual a tensão é proporcional à deformação relativa. Tensão e deformação relativa são discutidas na Seção 8 do Capítulo 12.

Exemplo 16-1 Pulsos Colidindo

Conceitual

Um pulso, para cima, move-se para a direita em uma corda esticada, enquanto um pulso invertido, de mesmo tamanho e forma, se move para a esquerda. Quando estes pulsos se sobrepõem há um instante em que a corda fica horizontal e nenhum pulso é visto. Isto está de acordo com o princípio da superposição. A questão é, por que os pulsos reaparecem e continuam seus caminhos após a colisão?

SITUAÇÃO O deslocamento de cada ponto da corda é zero no instante em que a corda está horizontal, mas a velocidade de cada ponto é zero nesse instante? Para um pulso para cima, a corda no perfil frontal do pulso está se movendo para cima e a corda no perfil traseiro está se movendo para baixo. Para um pulso invertido o oposto é que vale: a corda no perfil frontal está se movendo para baixo e a corda no perfil traseiro está se movendo para cima.

SOLUÇÃO

1. Plote a posição e a velocidade da corda em função da posição ao longo da corda, antes dos pulsos se sobreporem (Figura 16-2). Para um pulso para cima, a corda no perfil frontal está se movendo para cima e a corda no perfil traseiro está se movendo para baixo. Para o pulso invertido, vale o contrário: a corda no perfil frontal está se movendo para baixo e a corda no perfil traseiro está se movendo para cima.

2. Agora, plote a posição e a velocidade da corda em função da posição ao longo da corda no instante em que os pulsos se sobrepõem completamente (Figura 16-3).

3. A velocidade é zero em todos os pontos da corda no instante em que a corda é horizontal? No passo 1, os perfis de velocidade da corda são idênticos para os dois pulsos; logo, quando os dois pulsos se sobrepõem os deslocamentos somam zero, mas as velocidades não somam zero. Os pulsos reaparecem depois, porque a corda está se movendo e possui inércia. Assim, ela não permanece horizontal.

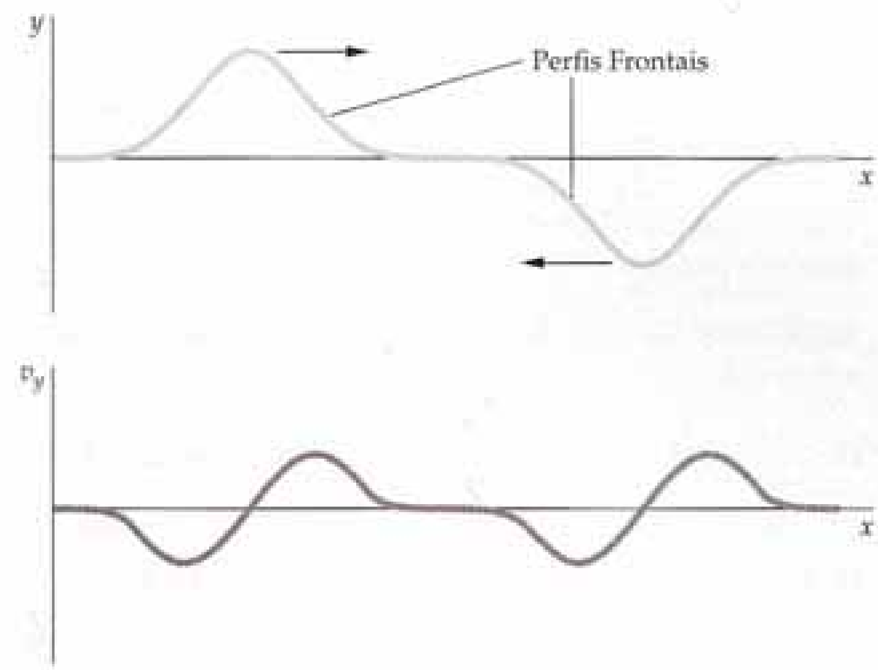


FIGURA 16-2

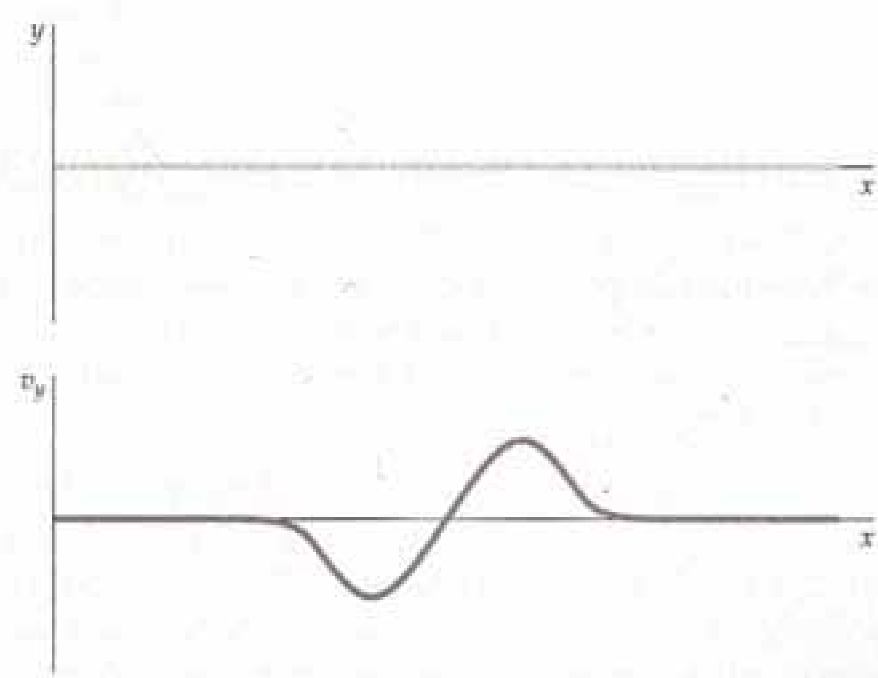


FIGURA 16-3

*SUPERPOSIÇÃO E A EQUAÇÃO DA ONDA

O princípio da superposição segue do fato de que a equação da onda (Equação 15-10*b*) é linear para pequenos deslocamentos transversais. Isto é, a função $y(x, t)$ e suas derivadas aparecem apenas na primeira potência. A propriedade que define uma equação linear é que, se y_1 e y_2 são duas soluções da equação, então a combinação linear

$$y_3 = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad 16\text{-}1$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer, também é uma solução. A linearidade da equação da onda pode ser mostrada por substituição direta de y_3. O resultado é o enunciado matemático do princípio da superposição. Se quaisquer duas ondas satisfazem a uma equação de onda, então sua soma algébrica também satisfaz à mesma equação de onda.

Exemplo 16-2 Superposição e a Equação da Onda

Mostre que, se as funções y_1 e y_2 satisfazem à equação da onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(Equação 15-10}b\text{)}$$

então a função y_3 dada pela Equação 16-1 também satisfaz à equação da onda.

SITUAÇÃO Substitua y_3 na equação da onda, suponha que y_1 e y_2 satisfaçam, cada uma, à equação da onda, e mostre que, como conseqüência, a combinação linear $C_1y_1 + C_2y_2$ satisfaz à equação da onda.

SOLUÇÃO

1. Substitua a expressão para y_3 da Equação 16-1 no lado esquerdo da equação da onda, e então separe os termos em y_1 e em y_2:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

2. Tanto y_1 quanto y_2 satisfazem à equação da onda. Escreva a equação da onda para y_1 e para y_2:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

3. Substitua os resultados do passo 2 no resultado do passo 1 e fatore o que for termo comum:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = C_1\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\left(C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right)$$

4. Desloque as constantes dentro dos argumentos das derivadas e expresse a soma das derivadas como a derivada da soma:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 C_1y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2y_2}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(C_1y_1 + C_2y_2)$$

5. O argumento da derivada temporal do passo 4 é y_3:

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}}$$

CHECAGEM O resultado do passo 5 é dimensionalmente consistente. O termo do lado esquerdo tem as dimensões $[L]/[L]^2 = [L]^{-1}$ e o termo do lado direito tem as dimensões $([T]^2/[L]^2)([L]/[T]^2) = [L]^{-1}$.

INTERFERÊNCIA DE ONDAS HARMÔNICAS

O resultado da superposição de duas ondas harmônicas de mesma freqüência depende da diferença de fase δ entre as ondas. Seja $y_1(x, t)$ a função de onda de uma onda harmônica que viaja para a direita com amplitude A, freqüência angular ω e número de onda k:

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad 16\text{-}2$$

Para esta função de onda, escolhemos a constante de fase como zero.* Se temos uma outra onda harmônica também viajando para a direita com os mesmos número de onda, amplitude e freqüência, então a equação geral para esta função de onda pode ser escrita como

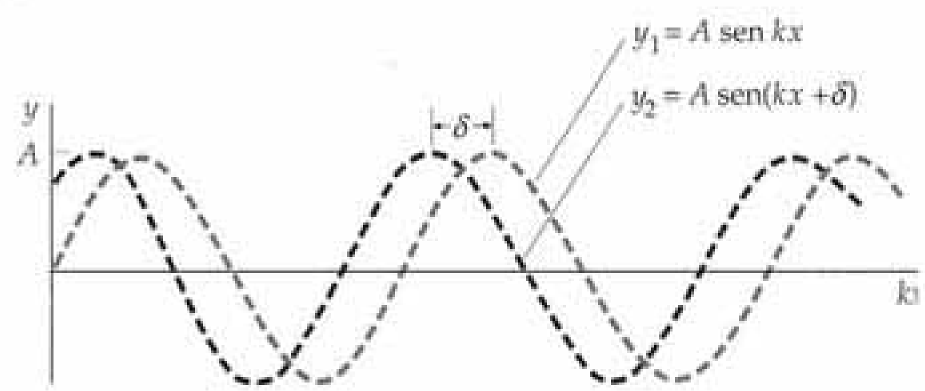


FIGURA 16-4 Deslocamento *versus* posição (em um dado instante) para duas ondas harmônicas de mesmos comprimento de onda, freqüência e amplitude, mas diferindo de δ na fase.

$$y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \qquad 16\text{-}3$$

onde δ é a constante de fase. As duas ondas descritas pelas Equações 16-2 e 16-3 diferem de fase em δ. A Figura 16-4 mostra gráficos das duas funções de onda *versus* posição no tempo $t = 0$. A onda resultante é a soma

$$y_1 + y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \qquad 16\text{-}4$$

Veja o Tutorial Matemático *para mais informações sobre* Trigonometria

Podemos simplificar a Equação 16-4 usando a identidade trigonométrica

$$\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \qquad 16\text{-}5$$

Neste caso, $\theta_1 = kx - \omega t$ e $\theta_2 = kx - \omega t + \delta$, de forma que

$$\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = -\tfrac{1}{2}\delta$$

e

$$\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta$$

Assim, a Equação 16-4 se torna

$$y_1 + y_2 = [2A\cos\tfrac{1}{2}\delta]\,\text{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \qquad 16\text{-}6$$

SUPERPOSIÇÃO DE DUAS ONDAS DE MESMAS AMPLITUDE E FREQÜÊNCIA

* Esta escolha é conveniente mas não obrigatória. Se, por exemplo, escolhemos $t = 0$ quando o deslocamento é máximo em $x = 0$, então temos que escrever $y_1 = A\cos(kx - \omega t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{2}\pi)$.

onde usamos $\cos(-\frac{1}{2}\delta) = \cos\frac{1}{2}\delta$. Vemos que o resultado da superposição de duas ondas harmônicas de mesmos número de onda k e freqüência ω é uma onda harmônica de número de onda k e freqüência ω. A onda resultante tem amplitude $2A\cos\frac{1}{2}\delta$ e uma constante de fase igual à metade da diferença entre as fases das ondas originais. O fenômeno de duas ou mais ondas de mesma freqüência, ou de freqüências quase iguais, se sobrepondo para produzir um padrão observável de intensidade é chamado de **interferência**. Neste exemplo, a intensidade, que é proporcional ao quadrado da amplitude, é uniforme. Se as duas ondas estão em fase, então $\delta = 0$, $\cos 0 = 1$, e a amplitude da onda resultante é $2A$. A interferência de duas ondas em fase é chamada de **interferência construtiva** (Figura 16-5). Se as duas ondas estão defasadas de 180°, então $\delta = \pi$, $\cos(\frac{1}{2}\delta) = 0$ e a amplitude da onda resultante é zero. A interferência de duas ondas defasadas de 180° é chamada de **interferência destrutiva** (Figura 16-6).

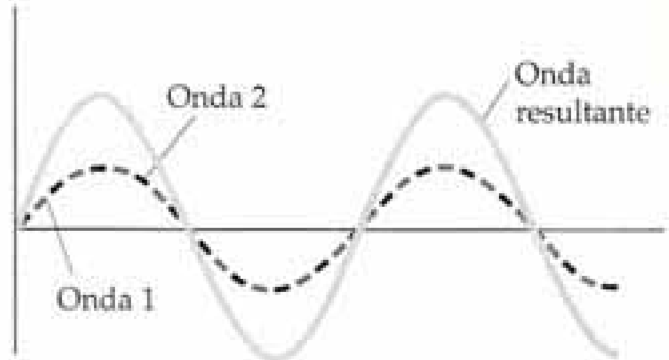


FIGURA 16-5 Interferência construtiva. Se duas ondas harmônicas de mesma freqüência estão em fase, a amplitude da onda resultante é a soma das amplitudes das ondas individuais. As ondas 1 e 2 são idênticas, de modo que parecem ser a mesma onda harmônica.

PROBLEMA PRÁTICO 16-1

Duas ondas de mesmos comprimento de onda, freqüência e amplitude estão viajando no mesmo sentido. (*a*) Se elas diferem de 90,0° em fase, e cada uma tem uma amplitude de 4,00 cm, qual é a amplitude da onda resultante? (*b*) Para que diferença de fase δ a amplitude resultante será igual a 4,0 cm?

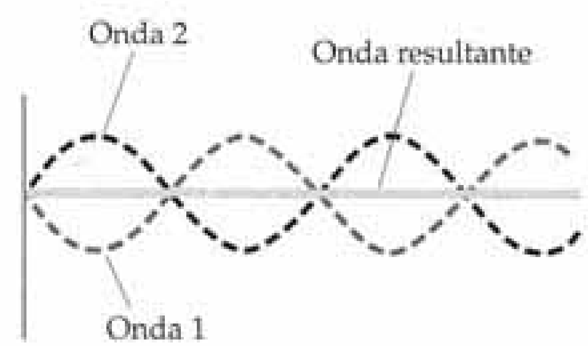


FIGURA 16-6 Interferência destrutiva. Se duas ondas harmônicas de mesma freqüência diferem em fase de 180°, a amplitude da onda resultante é a diferença das amplitudes das ondas individuais. Se as ondas originais têm amplitudes iguais, elas se cancelam completamente.

Batimentos A interferência de duas ondas sonoras com freqüências ligeiramente diferentes produz o interessante fenômeno conhecido como **batimento**. Considere duas ondas sonoras com freqüências angulares ω_1 e ω_2 e mesma amplitude de pressão p_0. O que escutamos? Em um ponto fixo, a dependência espacial da onda contribui meramente com uma constante de fase, de forma que podemos desprezá-la. As pressões sobre o ouvido, devidas a cada uma das ondas isoladamente, serão funções harmônicas simples com as formas

$$p_1 = p_0 \operatorname{sen} \omega_1 t$$

e

$$p_2 = p_0 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

onde escolhemos funções seno, e não funções cosseno, por conveniência, e supomos as funções em fase no tempo $t = 0$. Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

para a soma de duas funções seno, obtemos a onda resultante

$$p = p_0 \operatorname{sen}\omega_1 t + p_0 \operatorname{sen}\omega_2 t = 2p_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

Se escrevemos $\omega_{\text{méd}} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ para a freqüência angular média, e $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ para a diferença entre as freqüências angulares, a função de onda resultante é

$$p = 2p_0\cos(\tfrac{1}{2}\Delta\omega t)\operatorname{sen}\omega_{\text{méd}}t = 2p_0\cos(2\pi\tfrac{1}{2}\Delta f t)\operatorname{sen}2\pi f_{\text{méd}}t \qquad \text{16-7}$$

onde $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ e $f_{\text{méd}} = \omega_{\text{méd}}/(2\pi)$.

A Figura 16-7 mostra o gráfico das variações de pressão como função do tempo. As ondas estão inicialmente em fase. Então, elas se somam construtivamente no tempo $t = 0$. Como as ondas diferem em freqüência, elas vão se tornando gradualmente defasadas e, no tempo t_1, elas estão defasadas de 180° e interferem destrutivamente.* Após um intervalo de tempo igual (tempo t_2, na figura), as duas ondas estão novamente em fase e interferem construtivamente. Quanto maior a diferença entre as freqüências das duas ondas, o mais rapidamente elas oscilam entre as situações em fase e fora de fase.

Quando dois diapasões vibram com iguais amplitudes e com freqüências quase iguais, f_1 e f_2, o tom que ouvimos tem uma freqüência $f_{\text{méd}} = (f_1 + f_2)/2$ e uma amplitude $2p_0\cos(2\pi\frac{1}{2}\Delta f\,t)$. (Para alguns valores de t a amplitude é negativa. Como $-\cos\theta = \cos(\theta$

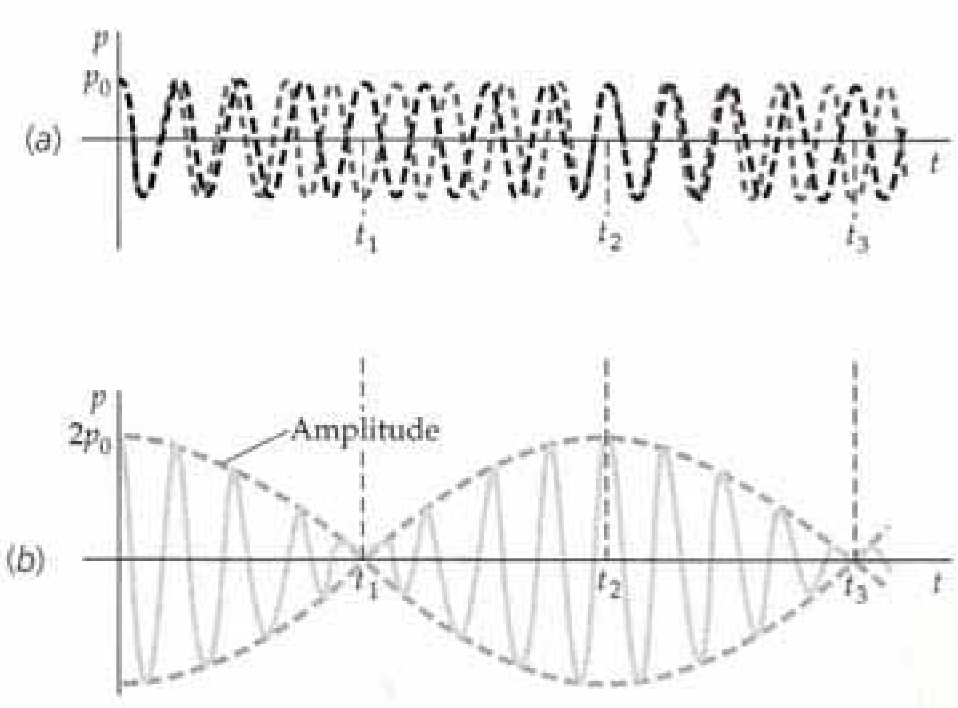


FIGURA 16-7 Batimentos. (*a*) Duas ondas harmônicas de freqüências diferentes, mas quase iguais, que estão em fase em $t = 0$ e defasadas de 180° em algum instante t_1 posterior. Em um instante mais tarde ainda, t_2, elas voltam a estar em fase. (*b*) A resultante das duas ondas mostradas em (*a*). A freqüência da onda resultante é próxima das freqüências das ondas originais, mas a amplitude é modulada como indicado. A intensidade é máxima nos instantes 0 e t_2, e zero nos instantes t_1 e t_3.

* Cancelamento completo só ocorre quando as amplitudes de pressão das duas ondas são iguais.

$+ \pi$), uma troca de sinal da amplitude é equivalente a uma mudança de fase de 180°.) A amplitude oscila com a freqüência $\frac{1}{2}\Delta f$. Como a intensidade sonora é proporcional ao quadrado da amplitude, o som será mais audível quando a função amplitude for tanto um máximo quanto um mínimo. Assim, a freqüência desta variação de intensidade, chamada de **freqüência de batimento**, é o dobro de $\frac{1}{2}\Delta f$:

$$f_{\text{bat}} = \Delta f \qquad \text{16-8}$$

FREQÜÊNCIA DE BATIMENTO

A freqüência de batimento é igual à diferença entre as freqüências individuais das duas ondas. Se tocarmos, simultaneamente, dois diapasões de freqüências iguais a 241 Hz e 243 Hz, ouviremos um tom pulsante com a freqüência média de 242 Hz que terá intensidade máxima em intervalos de meio segundo; isto é, a freqüência de batimento será de 2 Hz. O ouvido pode detectar batimentos com freqüências de batimento chegando a até 15 a 20 por segundo. Acima disto, as flutuações sonoras são muito rápidas para serem distinguidas.

O fenômeno dos batimentos é normalmente usado para comparar uma freqüência desconhecida com uma freqüência conhecida, como quando se usa um diapasão para afinar uma corda de piano. A afinação de um piano é feita tocando-se, simultaneamente, um diapasão e a tecla de uma corda, enquanto se ajusta a tração da corda até que os batimentos se afastam, numa indicação de que a diferença de freqüências das duas fontes sonoras passou a ser muito pequena.

Exemplo 16-3 Afinando uma Guitarra

Quando um diapasão emite um lá (440 Hz), simultaneamente com a corda lá de uma guitarra ligeiramente desafinada, 3,00 batimentos por segundo são ouvidos. Aperta-se, então, um pouco a corda da guitarra, o que causa um aumento de sua freqüência. Depois que isto é feito, você ouve a freqüência de batimento aumentar ligeiramente. Qual era a freqüência inicial da corda da guitarra (a freqüência antes dela ser apertada)?

SITUAÇÃO Como 3,00 batimentos por segundo foram ouvidos inicialmente, a freqüência inicial da corda da guitarra era ou de 437 Hz ou de 443 Hz. Quanto maior for a diferença entre a freqüência da corda e a freqüência do diapasão, maior será a freqüência de batimento. A freqüência da corda aumenta com um aumento de tração.

SOLUÇÃO

1. Como a freqüência de batimento aumenta com o aumento da tração, a freqüência inicial deve ter sido de 443 Hz:

$$f = f_A + f_{\text{bat}} = 440\text{ Hz} + 3{,}00\text{ Hz} = \boxed{443\text{ Hz}}$$

CHECAGEM O resultado possui o número correto de algarismos significativos.

Diferença de fase devida à diferença de percurso Uma causa comum de defasagem entre duas ondas é a diferença de comprimentos dos caminhos entre as fontes das ondas e o ponto onde ocorre interferência. Suponha duas fontes oscilando em fase (cristas positivas deixam as fontes ao mesmo tempo) e emitindo ondas harmônicas de mesmos comprimento de onda e freqüência. Considere, agora, um ponto no espaço para o qual os comprimentos dos caminhos desde as duas fontes sejam diferentes. Se a diferença de caminhos é de um comprimento de onda, como é o caso na Figura 16-8*a*, ou qualquer outro número inteiro de comprimentos de onda, a interferência é construtiva. Se a diferença de caminhos é a metade de um comprimento de onda ou um número ímpar de meios comprimentos de onda, como na Figura 16-8*b*, o máximo de uma onda ocorre ao mesmo tempo que um mínimo da outra, e a interferência é destrutiva.

As funções de onda para ondas de duas fontes que oscilam em fase podem ser escritas como

$$p_1 = p_0 \operatorname{sen}(kx_1 - \omega t)$$

e

$$p_2 = p_0 \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t)$$

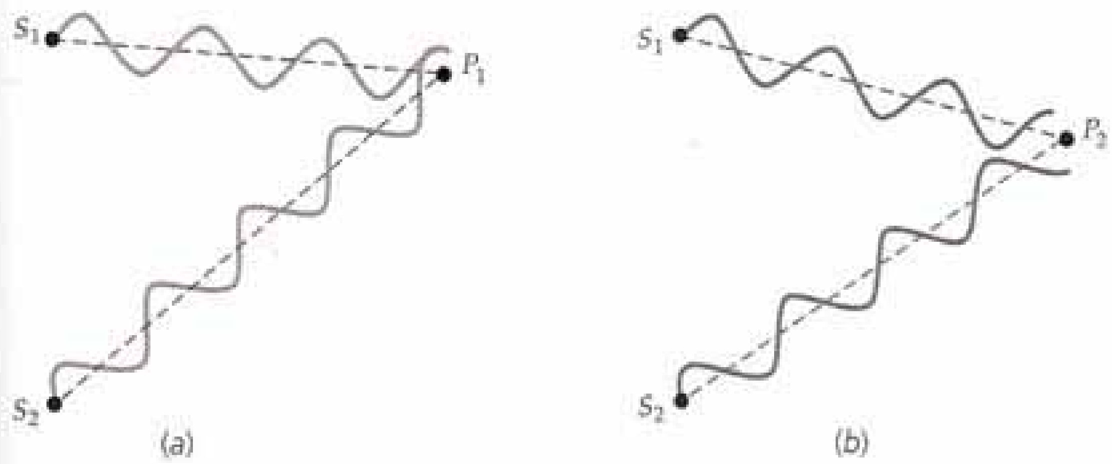


FIGURA 16-8 Ondas de duas fontes S_1 e S_2 estão em fase quando se encontram em um ponto P_1. (*a*) Quando a diferença de percurso é de um comprimento de onda λ, as ondas estão em fase em P_1 e, portanto, interferem construtivamente. (*b*) Quando a diferença de percurso é $\frac{1}{2}\lambda$, as ondas em P_2 estão defasadas de 180° e, portanto, interferem destrutivamente. Se as ondas têm a mesma amplitude em P_2, elas se cancelam completamente neste ponto.

A diferença de fase entre estas duas ondas é

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\,\Delta x$$

Usando $k = 2\pi/\lambda$, temos

$$\delta = k\,\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \text{16-9}$$

DIFERENÇA DE FASE DEVIDA À DIFERENÇA DE PERCURSO

Exemplo 16-4 Uma Onda Sonora Resultante

Dois alto-falantes idênticos são colocados em fase por um mesmo oscilador de áudio. Em um ponto a 5,00 m do cone de um dos alto-falantes e a 5,17 m do cone do outro alto-falante, a amplitude do som de cada um deles é p_0. Determine a amplitude da onda resultante no ponto, sabendo que a freqüência das ondas sonoras é (*a*) 1000 Hz, (*b*) 2000 Hz e (*c*) 500 Hz. (Use 340 m/s para a rapidez do som.)

SITUAÇÃO A amplitude da onda resultante da superposição das duas ondas que diferem de fase em δ é dada por $A = 2p_0 \cos\frac{1}{2}\delta$ (Equação 16-6), onde p_0 é a amplitude de cada onda e $\delta = 2\pi\,\Delta x/\lambda$ (Equação 16-9) é a diferença de fase. Conhecemos a diferença de percurso, $\Delta x = 5{,}17$ m − 5,00 m = 0,17 m, logo tudo de que necessitamos é o comprimento de onda λ.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. O comprimento de onda é igual à rapidez dividida pela freqüência. Calcule λ para $f = 1000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{1000\text{ Hz}} = 0{,}340\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}340$ m, a diferença de percurso fornecida ($\Delta x = 0{,}17$ m) é $\frac{1}{2}\lambda$ e, portanto, esperamos interferência destrutiva. Use este valor de λ e $A = 2p_0\cos\frac{1}{2}\delta$ (Equação 16-6) para calcular a diferença de fase δ, e depois use δ para calcular a amplitude A:

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}340\text{ m}} = \pi$$

logo $A = 2p_0\cos\frac{1}{2}\delta = 2p_0\cos\frac{\pi}{2} = \boxed{0{,}0\text{ m}}$

(*b*) 1. Calcule λ para $f = 2000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{2000\text{ Hz}} = 0{,}170\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}170$ m, a diferença de percurso é igual a λ e, portanto, esperamos interferência construtiva. Calcule a diferença de fase e a amplitude:

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}170\text{ m}}{0{,}17\text{ m}} = 2\pi$$

logo $A = 2p_0\cos\frac{1}{2}\delta = 2p_0\cos\pi = \boxed{-2p_0}$

(*c*) 1. Calcule λ para $f = 500$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{500\text{ Hz}} = 0{,}680\text{ m}$$

2. Calcule a diferença de fase e a amplitude:

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}680\text{ m}} = \frac{\pi}{2}$$

logo $A = 2p_0\cos\frac{1}{2}\delta = 2p_0\cos\frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}\,p_0}$

CHECAGEM Cada uma das três respostas está entre $-2p_0$ e $+2p_0$, dentro da faixa esperada.

INDO ALÉM Na Parte (*b*), encontra-se um A negativo. A Equação 16-6 pode ser escrita como $y_1 + y_2 = A'\,\text{sen}(kx - \omega t + \frac{\delta}{2})$, o que também pode ser reescrito como $y_1 + y_2 = -A'\,\text{sen}(kx - \omega t + \frac{\delta}{2} + \pi)$. Uma diferença de fase de $\pi = 180°$ é equivalente a multiplicar por -1.

Exemplo 16-5 Intensidade Sonora de Dois Alto-falantes

Os dois alto-falantes idênticos do Exemplo 16-4 são, agora, colocados face a face a uma distância de 180 cm. Ademais, eles agora emitem em 686 Hz. Localize os pontos entre os alto-falantes, ao longo da linha que os liga, para os quais a intensidade sonora é (*a*) máxima e (*b*) mínima. (Despreze a variação da intensidade com a distância a cada alto-falante e use 343 m/s para a rapidez do som.)

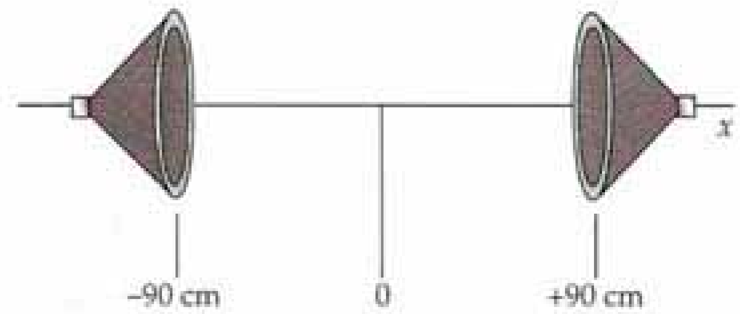


FIGURA 16-9 Os dois alto-falantes estão no eixo x com $x = 0$ a meio caminho entre eles.

SITUAÇÃO Escolhemos a origem a meio caminho entre os alto-falantes (Figura 16-9). Como a origem é eqüidistante dos alto-falantes, ela é um ponto de intensidade máxima. Quando nos movemos uma distância x da origem para um dos alto-falantes, a diferença de percurso entre nós e os dois alto-falantes é $2x$. A intensidade será máxima nos pontos em que $2x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$, e mínima quando $2x = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \ldots$

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A intensidade será máxima quando $2x$ for igual a um número inteiro de comprimentos de onda: $2x = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \ldots$

2. Calcule o comprimento de onda: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{343\text{ m/s}}{686\text{ Hz}} = 0{,}500\text{ m} = 50{,}5\text{ cm}$

3. Resolva para x usando o comprimento de onda calculado: $x = 0, \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots = \boxed{0, \pm 25{,}0\text{ cm}, \pm 50{,}0\text{ cm}, \pm 75{,}0\text{ cm}}$

(*b*) 1. A intensidade será mínima quando $2x$ for igual a um número ímpar de meios comprimentos de onda: $2x = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \pm\frac{5}{2}\lambda, \ldots$

2. Resolva para x usando o comprimento de onda calculado: $x = \pm\frac{1}{4}\lambda, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \ldots = \boxed{\pm 12{,}5\text{ cm}, \pm 37{,}5\text{ cm}, \pm 62{,}5\text{ cm}, \pm 87{,}5\text{ cm}}$

CHECAGEM As respostas das Partes (*a*) e (*b*) se complementam, com os mínimos de intensidade localizados a meio caminho entre os máximos de intensidade, como esperado.

INDO ALÉM Os máximos e mínimos serão máximos e mínimos relativos, porque em cada máximo (e mínimo) a amplitude do alto-falante mais próximo será ligeiramente maior do que a do alto-falante mais distante. Apenas sete termos foram usados para os máximos e apenas oito termos para os mínimos, porque quaisquer termos adicionais não se encontrariam na região entre os dois alto-falantes.

A Figura 16-10*a* mostra o padrão de ondas produzido por duas fontes pontuais que oscilam em fase em um tanque de ondas. Cada fonte produz ondas com frentes de onda circulares. As frentes de onda circulares mostradas possuem todas a mesma fase (são todas elas cristas) e estão separadas por um comprimento de onda. Podemos construir um padrão similar com um compasso, desenhando arcos circulares representando as cristas das ondas de cada fonte em algum instante particular de tempo (Figura 16-10*b*). Onde as cristas de cada fonte se sobrepõem, as ondas interferem construtivamente. Nestes pontos, os comprimentos dos percursos até as duas fontes ou são iguais ou diferem por um número inteiro de comprimentos de onda. As linhas tracejadas indicam os pontos que ou são eqüidistantes das fontes, ou apresentam diferenças de percurso até as duas fontes de um comprimento de onda, dois comprimentos de onda ou três comprimentos de onda. Em cada ponto ao longo de qualquer uma destas linhas a interferência é construtiva, logo estas são linhas de máximos de interferência. Entre as linhas de máximos de interferência estão as linhas de mínimos de interferência. Sobre uma linha de mínimos de interferência, os comprimentos dos percursos de qualquer ponto da linha até cada uma das duas fontes diferem por um número ímpar de meios comprimentos de onda. Na região onde as duas ondas estão sobrepostas, a amplitude da onda resultante é dada por $A = 2p_0 \cos\frac{1}{2}\delta$, onde p_0 é a amplitude de cada onda separadamente e δ se relaciona com a diferença de percurso Δr por $\delta = 2\pi\,\Delta r/\lambda$ (Equação 16-9).

A Figura 16-11 mostra a intensidade I da onda resultante de duas fontes como função da diferença de percurso Δx. Nos pontos onde a interferência é construtiva, a amplitude da onda resultante é o dobro da de cada onda individual e, porque a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, a intensidade é $4I_0$, onde I_0 é a intensidade devida a apenas uma das fontes. Em pontos de interferência destrutiva, a intensidade é zero. A intensidade média, mostrada na figura pela linha tracejada em $2I_0$, é o dobro da intensidade de cada uma das fontes, um resultado exigido pela conservação da energia. A interferência das ondas das duas fontes redistribui, assim, a energia no espaço. A interferência de duas ondas sonoras pode ser demonstrada acionando-se dois alto-falantes com o mesmo amplificador (de forma que eles estejam sempre em fase), alimentado por um gerador de áudio. Movendo-nos na sala, podemos detectar, escutando, as posições de interferências construtiva e destrutiva.* Esta demonstração é melhor realizada em uma sala chamada de *câmara anecóica*, onde as reflexões (ecos) nas paredes da sala são minimizadas.

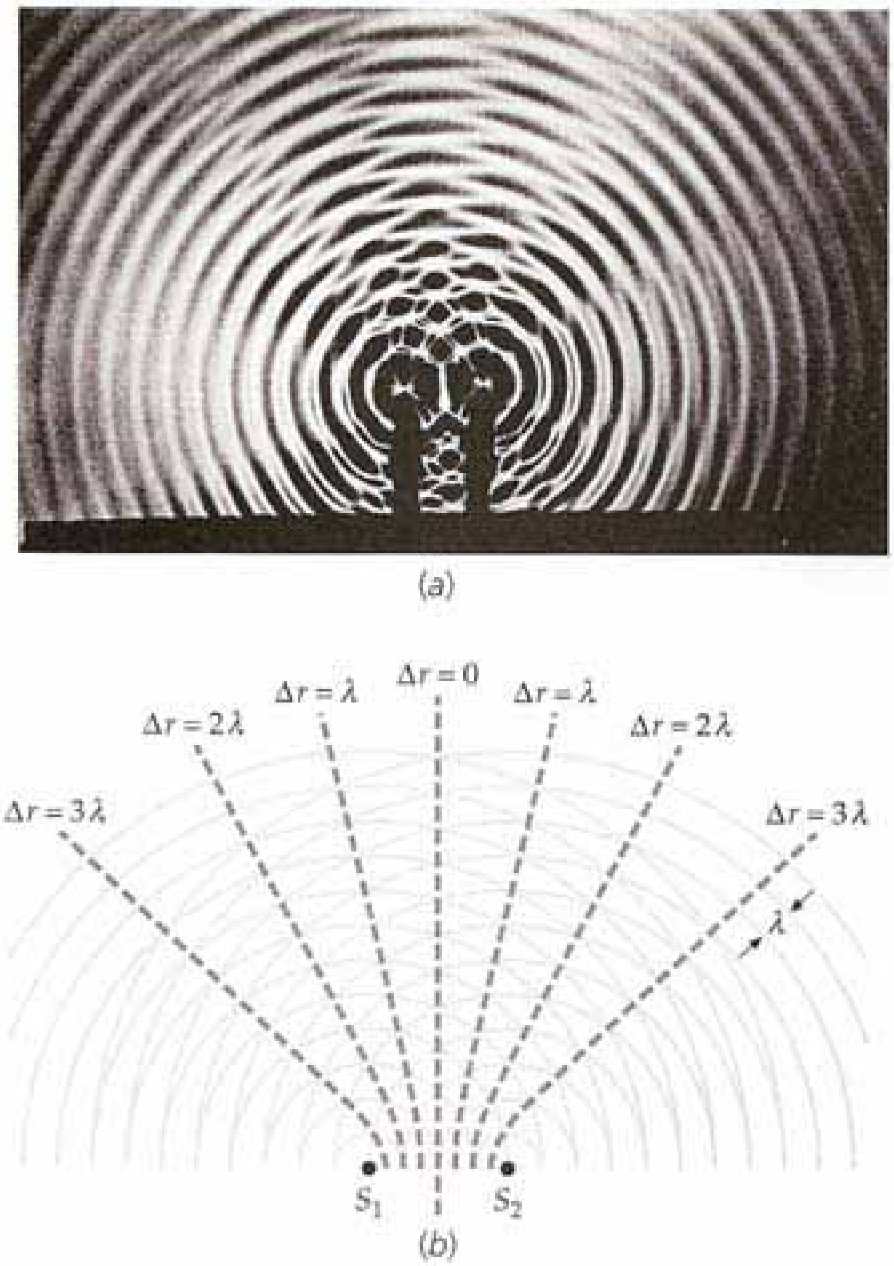


FIGURA 16-10 (*a*) Ondas de água em um tanque de ondas, produzidas por duas fontes oscilando em fase. (*b*) Desenho de cristas de onda para as fontes de (*a*). As linhas tracejadas indicam pontos para os quais a diferença de percurso é um número inteiro de comprimentos de onda. *(Parte (a) Berenice Abbott 1328/ Photo Researchers.)*

Coerência Duas fontes não precisam estar em fase para produzir um padrão de interferência. Considere duas fontes defasadas de 180°. (Dois alto-falantes em fase podem ser postos em defasagem de 180° meramente invertendo-se os plugues de um deles.) O padrão de interferência é o mesmo que o da Figura 16-11, exceto que as localizações dos máximos e mínimos são intercambiadas. Nos pontos para os quais as distâncias diferem de um número inteiro de comprimentos de onda, a interferência é destrutiva, porque as ondas estão defasadas de 180°. Nos pontos onde a diferença de percurso é um número ímpar de meios comprimentos de onda, as ondas estão, agora, em fase, porque a diferença de fase de 180° das fontes é compensada pela diferença de fase de 180° devida à diferença de percurso.

Padrões de interferência similares serão produzidos por quaisquer duas fontes cuja diferença de fase permaneça constante. Duas fontes que permanecem em fase ou mantêm uma diferença de fase constante são ditas **coerentes**. Fontes coerentes de ondas de água em um tanque de ondas são fáceis de produzir operando-se as duas fontes com o mesmo motor. Fontes sonoras coerentes são obtidas alimentando-se dois alto-falantes com a mesma fonte de sinal e o mesmo amplificador.

Fontes de onda cuja diferença de fase não é constante, mas varia aleatoriamente, são ditas **fontes incoerentes**. Há muitos exemplos de fontes incoerentes, como dois alto-falantes alimentados por diferentes amplificadores ou dois violinos tocados por diferentes violinistas. Para fontes incoerentes, a interferência em um ponto particular alterna-se rapidamente de construtiva para destrutiva, e nenhum padrão de interferência se mantém o tempo suficiente para ser observado. A intensidade resultante de ondas de duas ou mais fontes incoerentes é simplesmente a soma das intensidades devidas às fontes individuais.

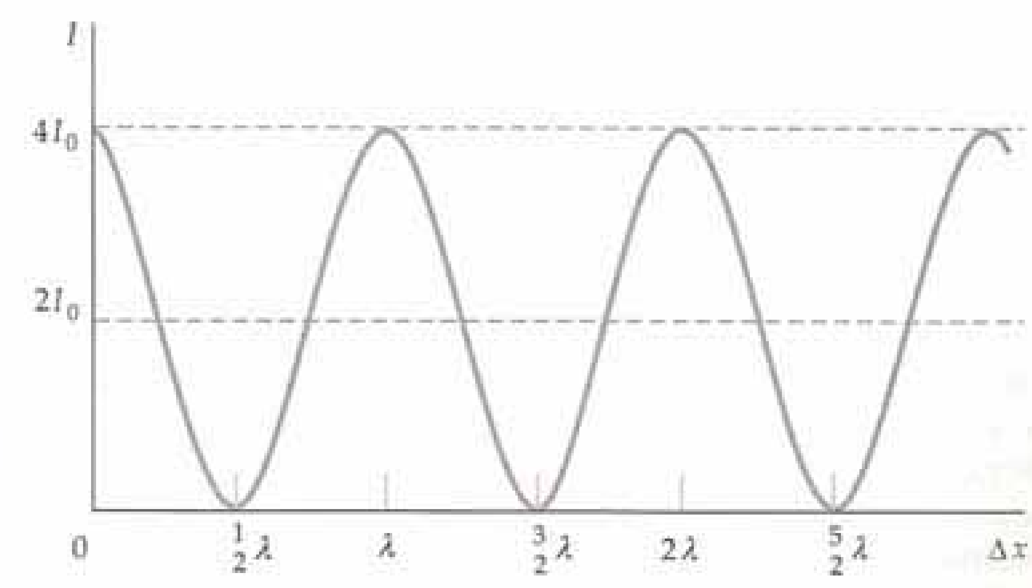


FIGURA 16-11 Intensidade *versus* diferença de percurso para duas fontes que estão em fase. I_0 é a intensidade devida a cada fonte individualmente.

16-2 ONDAS ESTACIONÁRIAS

Se há ondas confinadas no espaço, como ondas em uma corda de piano, ondas sonoras em um tubo de órgão ou ondas luminosas em um laser, reflexões nas duas extremidades fazem com que as ondas viajem nos dois sentidos. Estas ondas superpostas sofrem interferência de acordo com o princípio da superposição. Para dada corda, ou para dado tubo, há certas freqüências para as quais a superposição resulta em um padrão estacionário de vibração chamado de **onda estacionária**. Ondas estacionárias possuem importantes aplicações em instrumentos musicais e na teoria quântica.

* Nesta demonstração, a intensidade sonora não será exatamente zero nos pontos de interferência destrutiva por causa das reflexões do som pelas paredes ou pelos objetos da sala.

ONDAS ESTACIONÁRIAS EM CORDAS

Corda fixa nas duas extremidades Se fixamos uma extremidade de uma corda flexível esticada e movimentamos a outra extremidade, para cima e para baixo, em um movimento harmônico simples de pequena amplitude, descobrimos que, para certas freqüências, padrões de onda estacionária como os da Figura 16-12 são produzidos. As freqüências que produzem esses padrões são as **freqüências de ressonância** da corda. Cada uma dessas freqüências, com sua correspondente função de onda, é um **modo de vibração**. A menor freqüência de ressonância é a freqüência **fundamental** f_1. Ela produz o padrão de onda estacionária mostrado na Figura 16-12*a*, que é chamado de **modo fundamental** de vibração ou de **primeiro harmônico**. A segunda menor freqüência f_2 produz o padrão mostrado na Figura 16-12*b*. Este modo de vibração tem uma freqüência igual a duas vezes a freqüência fundamental e é chamado de segundo harmônico. A terceira menor freqüência f_3 é igual a três vezes a freqüência fundamental e produz o padrão de terceiro harmônico mostrado na Figura 16-12*c*. O conjunto de todas as freqüências ressonantes é o chamado **espectro de ressonância** da corda.

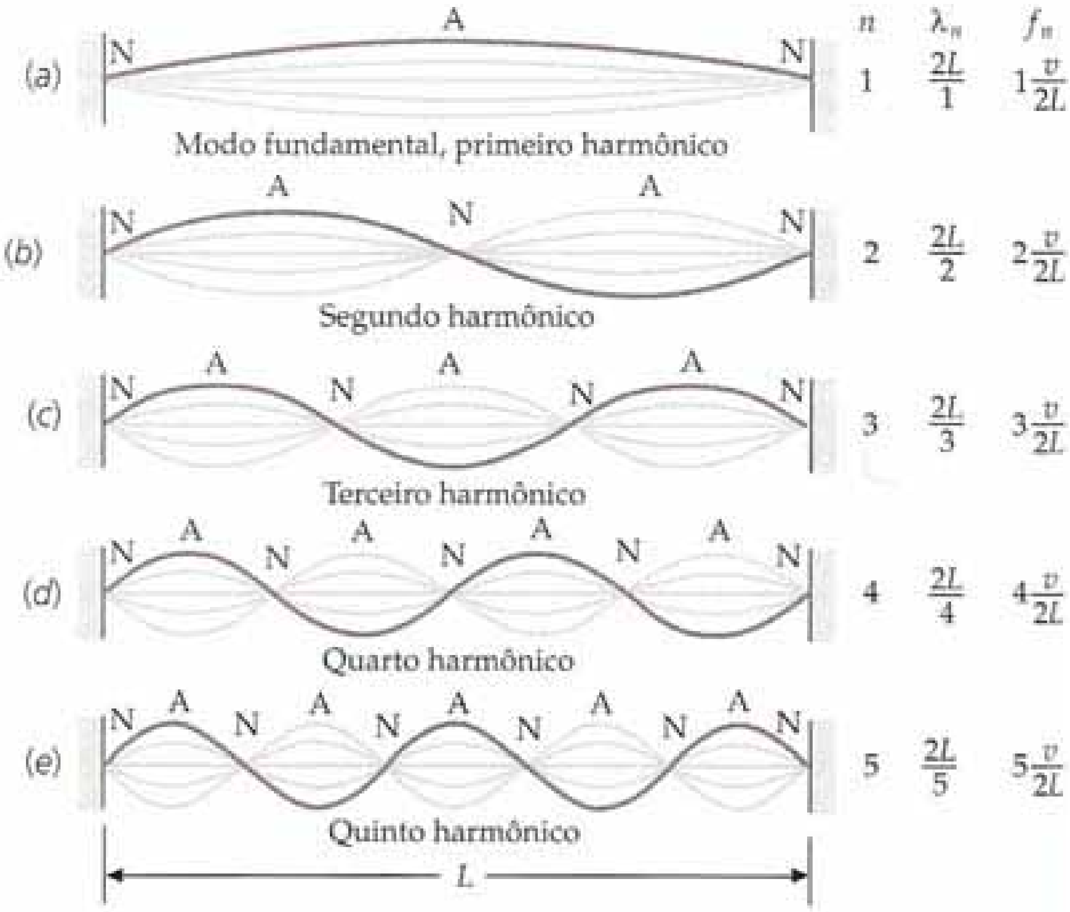


FIGURA 16-12 Ondas estacionárias em uma corda fixa nas duas extremidades. Antinós são indicados por A e nós são indicados por N. O n-ésimo harmônico possui n antinós, onde $n = 1, 2, 3,...$

Muitos sistemas que suportam ondas estacionárias possuem espectros de ressonância nos quais as freqüências de ressonância não são múltiplos inteiros da freqüência mais baixa. Em todos os espectros de ressonância, a freqüência de ressonância mais baixa é chamada de freqüência fundamental, a freqüência de ressonância mais baixa seguinte é chamada de primeiro **sobretom**, a seguinte mais baixa é o segundo sobretom, e assim por diante. Esta terminologia tem sua origem na música. Apenas se cada freqüência de ressonância for um múltiplo inteiro da freqüência fundamental é que elas são chamadas de harmônicos.

Notamos, na Figura 16-12, que para cada harmônico há certos pontos da corda (o ponto central da Figura 16-12*b*, por exemplo) que não se movem. Tais pontos são chamados de **nós**. A meio caminho entre cada dois nós adjacentes está um ponto de amplitude máxima de vibração chamado de **antinó**. Uma extremidade fixa da corda é, obviamente, um nó. (Se uma extremidade está presa a um diapasão ou a algum outro vibrador, em vez de fixa, ela continuará sendo aproximadamente um nó, porque a amplitude de vibração nessa extremidade é muito menor do que a amplitude nos antinós.) Notamos que o primeiro harmônico tem um antinó, o segundo harmônico tem dois antinós, e assim sucessivamente.

> ! Nem todas as freqüências ressonantes são chamadas de harmônicos. Apenas as freqüências que fazem parte de um espectro de freqüências ressonantes que é composto de múltiplos inteiros da freqüência fundamental (a mais baixa) são chamadas de harmônicos.

Podemos relacionar as freqüências de ressonância com a rapidez de onda na corda e com o comprimento da corda. A distância entre um nó e o antinó mais próximo é um quarto do comprimento de onda. Logo, o comprimento da corda L é igual à metade do comprimento de onda, no modo fundamental de vibração (Figura 16-13) e, como a Figura 16-12 mostra, L é igual a dois meios comprimentos de onda para o segundo harmônico, três meios comprimentos de onda para o terceiro harmônico, e assim sucessivamente. Em geral, se λ_n é o comprimento de onda do n-ésimo harmônico, temos

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{16-10}$$

CONDIÇÃO PARA ONDA ESTACIONÁRIA, DUAS EXTREMIDADES FIXAS

Este resultado é conhecido como a **condição para onda estacionária**. Podemos determinar a freqüência do n-ésimo harmônico a partir do fato de que a rapidez de onda v é igual à freqüência f_n vezes o comprimento de onda. Assim,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou

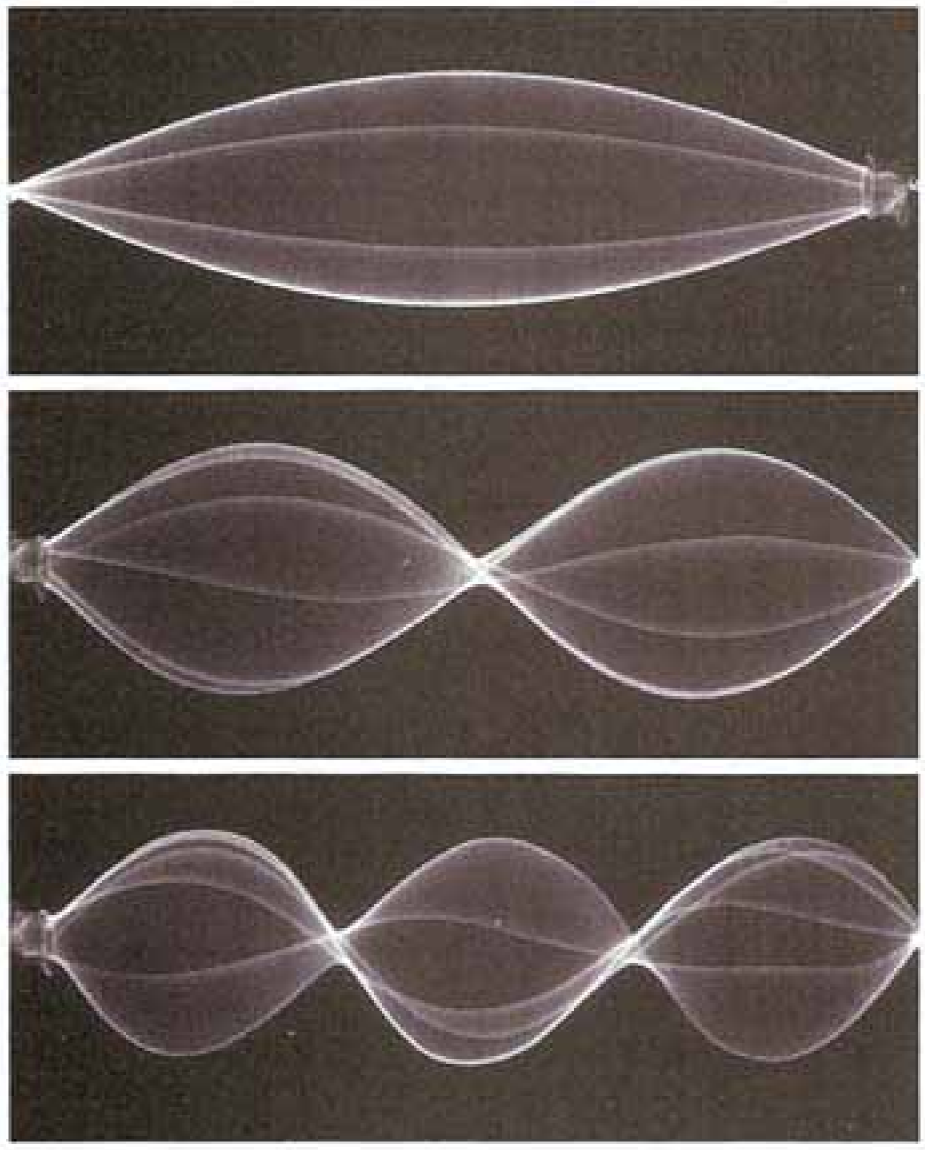
$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{16-11}$$

FREQÜÊNCIAS DE RESSONÂNCIA, DUAS EXTREMIDADES FIXAS

onde $f_1 = v/(2L)$ é a freqüência fundamental.

Podemos compreender as ondas estacionárias em termos de ressonância. Seja uma corda de comprimento L presa por uma das extremidades a um vibrador (Figura 16-14) e fixa na outra extremidade. A primeira crista de onda enviada pelo vibrador percorre uma distância L, ao longo da corda, até a extremidade fixa, onde ela é refletida e invertida. Depois, ela volta a percorrer uma distância L e é novamente refletida e invertida no vibrador. O tempo total para a viagem de ida e volta é $2L/v$. Se este tempo for igual ao período do vibrador, então a crista de onda duplamente refletida se sobreporá exatamente à segunda crista de onda produzida pelo vibrador, e as duas cristas interferirão construtivamente, produzindo uma crista com o dobro da amplitude original. A crista de onda percorrerá um caminho de ida e volta na corda, somando-se à terceira crista produzida pelo vibrador, aumentando a amplitude para três vezes o valor original, e assim por diante. Assim, o vibrador estará em ressonância com a corda. O comprimento de onda é igual a $2L$ e a freqüência é igual a $v/(2L)$.

Também ocorre ressonância para outras freqüências do vibrador. O vibrador está em ressonância com a corda se o tempo que a primeira crista leva para percorrer a distância $2L$ é igual a um inteiro n qualquer vezes o período do vibrador. Isto é, se $2L/v = nT_n$, onde $2L/v$ é o tempo para uma viagem de ida e volta de uma crista. Então,



Ondas estacionárias em uma corda posta para oscilar por um vibrador ligado à sua extremidade esquerda. Estas ondas estacionárias ocorrem apenas em freqüências específicas. *(Richard Megna/Fundamental Phototgraphs, New York.)*

$$f_n = \frac{1}{T_n} = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

é a condição de ressonância. Este resultado é o mesmo que obtivemos ajustando um número inteiro de meios comprimentos de onda na distância L. Vários efeitos de amortecimento, como a perda de energia na reflexão e o arraste do ar sobre a corda, impõem um limite para a amplitude máxima que pode ser alcançada.

As freqüências de ressonância dadas pela Equação 16-11 também são chamadas de **freqüências naturais** da corda. Quando a freqüência do vibrador não é uma das freqüências naturais da corda oscilante, ondas estacionárias não são produzidas. Depois que a primeira onda percorre a distância $2L$ e é refletida pelo vibrador, ela difere em fase da onda que está sendo gerada pelo vibrador (Figura 16-15). Quando esta

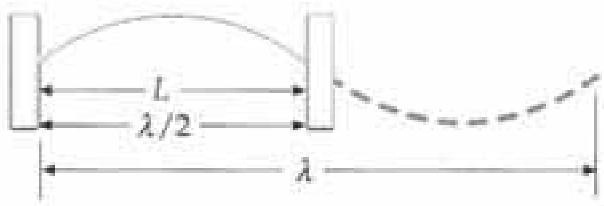


FIGURA 16-13 Para o primeiro harmônico de uma corda esticada fixa nas duas extremidades, $\lambda = 2L$.

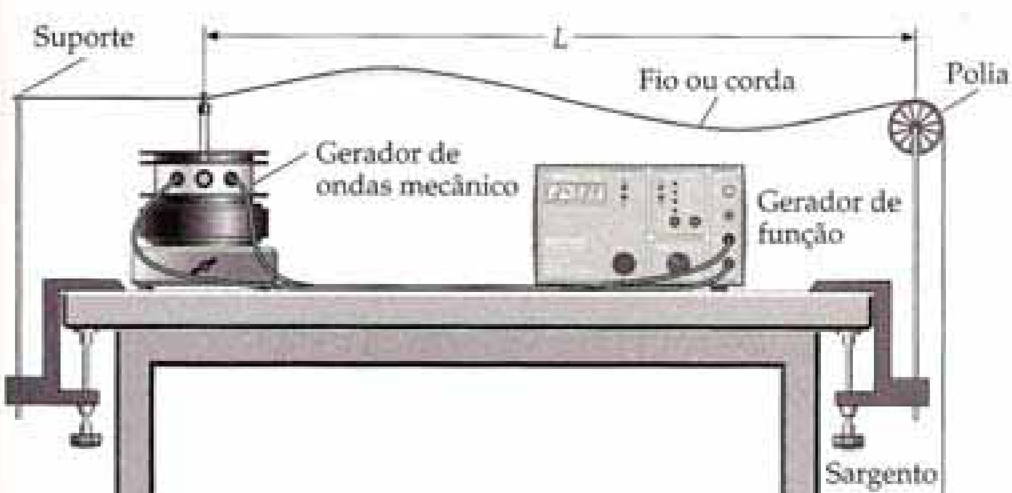


FIGURA 16-14 O gerador de ondas mecânico envia ondas pela corda. As ondas refletem na polia.

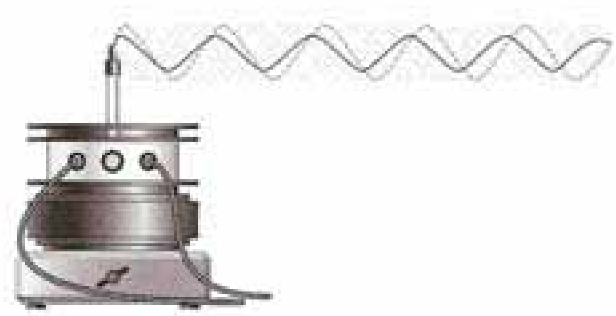


FIGURA 16-15 Onda em uma corda, produzida por um gerador de ondas mecânico cuja freqüência não está em ressonância com as freqüências naturais da corda. Uma onda que acaba de sair do gerador (linha tracejada) não está em fase com as ondas que já foram refletidas duas ou mais vezes (linhas claras), e estas ondas não estão em fase entre si, de modo que não existe composição de amplitudes. A onda resultante (linha escura) tem aproximadamente a mesma amplitude das ondas individuais, praticamente igual à do gerador.

onda resultante tiver percorrido a distância $2L$ e for, novamente, refletida pelo vibrador, ela irá diferir em fase da próxima onda gerada. Em alguns casos, poderá haver uma sobreposição de ondas com a produção de uma onda de amplitude maior, em outros casos a nova amplitude será menor. Na média, a amplitude não aumentará nem diminuirá, mas será da mesma ordem da amplitude da primeira onda gerada, que é a amplitude do vibrador. Esta amplitude é muito pequena em comparação com as amplitudes atingidas nas freqüências de ressonância.

A ressonância de ondas estacionárias é análoga à ressonância de um oscilador harmônico simples com uma força harmônica de excitação. No entanto, uma corda vibrando não possui apenas uma freqüência natural, mas uma seqüência de freqüências naturais que são múltiplos inteiros da freqüência fundamental. Esta seqüência é chamada de **série harmônica**.

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

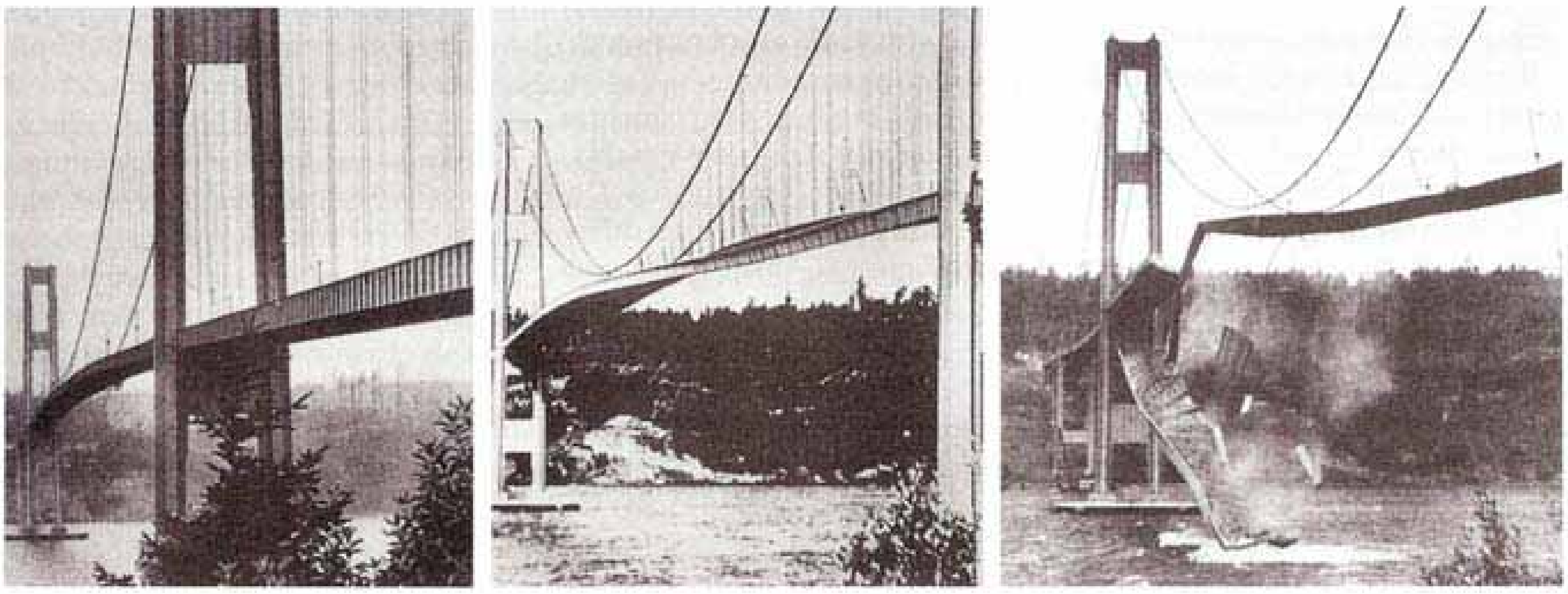
Usando a Condição para Onda Estacionária na Solução de Problemas

SITUAÇÃO Você não deve se preocupar em memorizar a Equação 16-11. Apenas esboce a Figura 16-12 para se lembrar da condição para onda estacionária, $\lambda_n = 2L/n$, e depois use $v = f_n\lambda_n$.

SOLUÇÃO

1. Reconstrua a Figura 16-12 para alguns primeiros harmônicos (não a expressão à direita da figura, apenas os desenhos da corda). Em cada extremidade da corda há um nó, e a distância entre um nó e um antinó adjacente é, invariavelmente, igual a $\frac{1}{4}\lambda$.
2. Relacione a rapidez de onda com a freqüência usando $v = f\lambda$.
3. Relacione a rapidez de onda com a tração usando $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

CHECAGEM Verifique se seus resultados estão dimensionalmente corretos.



Ondas estacionárias geradas por ventos de 45 mi/h na ponte pênsil de Tacoma Narrows (EUA), levando-a ao colapso em 7 de novembro de 1940, apenas quatro meses após ter sido aberta ao tráfego. *(University of Washington.)*

Exemplo 16-6 Dá-me um Lá

Uma corda está esticada entre dois suportes fixos, separados de 0,700 m, e a tração é ajustada até que a freqüência fundamental da corda seja o lá padrão de 440 Hz. Qual é a rapidez das ondas transversais na corda?

SITUAÇÃO A rapidez de onda é igual à freqüência vezes o comprimento de onda. Para uma corda fixa nas duas extremidades, no modo fundamental há um único antinó no meio da corda. Assim, o comprimento da corda é igual a meio comprimento de onda.

SOLUÇÃO

1. A rapidez de onda se relaciona com a freqüência e o comprimento de onda. Temos a freqüência fundamental f_1: $v = f_1\lambda_1$
2. Use a Figura 16-12 para relacionar o comprimento de onda fundamental com o comprimento da corda: $\lambda_1 = 2L$
3. Use este comprimento de onda e a freqüência dada para determinar a rapidez: $v = f_1\lambda_1 = f_1 2L = 2f_1 L = 2(440\text{ Hz})(0{,}700\text{ m}) = \boxed{616\text{ m/s}}$

CHECAGEM Para checar a plausibilidade desta resposta, checamos as unidades. A unidade de freqüência é o hertz, onde 1 Hz = 1 ciclo/s, ou simplesmente 1 s^{-1} (porque um ciclo é adimensional). Então, 1 Hz vezes 1 m é igual a 1 m/s, unidade correta para a rapidez.

PROBLEMA PRÁTICO 16-2 A rapidez de ondas transversais em uma corda esticada é 200 m/s. Se a corda tem 5,0 m de comprimento, determine as freqüências dos primeiros três harmônicos.

Exemplo 16-7 Testando a Corda do Piano — *Rico em Contexto*

Você trabalha em uma loja de produtos musicais e ajuda o proprietário a construir instrumentos. Ele lhe pede para testar uma nova corda, visando seu uso em pianos. Ele lhe diz que a corda de 3,00 m de comprimento possui uma massa específica linear de 0,00250 kg/m e que encontrou duas freqüências ressonantes adjacentes em 252 Hz e 336 Hz. Ele quer que você determine a freqüência fundamental da corda e verifique se a corda pode ou não ser uma boa escolha como corda de piano. Você sabe que, por razões de segurança, a tração na corda não pode ultrapassar os 700 N.

SITUAÇÃO A tração F_T é determinada a partir de $v = \sqrt{F_T/\mu}$, onde a rapidez v pode ser obtida de $v = f\lambda$, usando qualquer harmônico. O comprimento de onda do modo fundamental é igual a duas vezes o comprimento da corda. Para determinar a freqüência fundamental, suponha a freqüência do n-ésimo harmônico igual a 252 Hz. Então, $f_n = nf_1$ e $f_{n+1} = (n+1)f_1$, com $f_{n+1} =$ 336 Hz. Podemos resolver estas duas equações para f_1.

SOLUÇÃO

1. A tração relaciona-se com a rapidez de onda: $v = \sqrt{F_T/\mu}$ logo $F_T = \mu v^2$
2. A rapidez de onda relaciona-se com o comprimento de onda e a freqüência: $v = f\lambda$
3. Use a Figura 16-12 para relacionar o comprimento de onda do modo fundamental com o comprimento da corda: $\lambda_1 = 2L$
4. Use os resultados dos passos 2 e 3 para relacionar a rapidez v com a freqüência fundamental f_1: $v = f_1\lambda_1 = f_1 \times 2L = 2f_1 L$
5. Substitua no resultado do passo 1 para determinar a tração: $F_T = \mu v^2 = 4\mu f_1^2 L^2$
6. Os harmônicos consecutivos f_n e f_{n+1} relacionam-se com a freqüência fundamental f_1: $nf_1 = 252\text{ Hz}$; $(n+1)f_1 = 336\text{ Hz}$
7. Dividindo estas equações, eliminamos f_1 e determinamos n: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{252\text{ Hz}}{336\text{ Hz}} = 0{,}750 \Rightarrow n = 3$
8. Explicite f_1: $f_n = nf_1$ logo $f_1 = \dfrac{f_n}{n} = \dfrac{f_3}{3} = \dfrac{252\text{ Hz}}{3} = 84{,}0\text{ Hz}$
9. Determine F_T, usando o resultado do passo 5: $F_T = 4\mu f_1^2 L^2 = 4(0{,}00250\text{ kg/m})(84{,}0\text{ Hz})^2(3{,}00\text{ m})^2 = 635\text{ N}$
10. A tração é segura? **A tração é menor do que o limite de segurança de 700 N. O fio pode ser usado com segurança.**

CHECAGEM O fato de a tração ser da mesma ordem de grandeza do limite de segurança torna a resposta plausível.

Corda fixa em uma das extremidades e livre na outra A Figura 16-16 mostra uma corda com uma extremidade fixa e a outra presa a um anel livre para escorregar, para cima e para baixo, em uma haste vertical sem atrito. O movimento vertical do anel é determinado pela componente vertical da força de tração (estamos desprezando qualquer efeito da gravidade). Idealmente, fazemos a massa do anel se aproximar de zero. Então, o movimento vertical da extremidade da corda que está presa ao anel não tem vínculos, e dizemos que ela é uma *extremidade livre*. Qualquer força vertical finita, da corda sobre o anel sem massa, produziria no anel uma aceleração infinita. No entanto, a aceleração do anel permanecerá finita desde que a tangente à corda no ponto onde ela se prende ao anel permaneça paralela à posição de equilíbrio da corda. Para uma corda oscilando como onda estacionária, os antinós são os únicos pontos onde a tangente à corda permanece paralela à posição de equilíbrio da corda. Logo, há um antinó na extremidade da corda presa ao anel.

FIGURA 16-16 Uma aproximação de uma corda presa em uma extremidade e livre na outra pode ser produzida conectando-se a extremidade "livre" da corda a um anel que é livre para se mover em uma haste vertical. A extremidade presa ao gerador de ondas mecânico é praticamente fixa, porque a amplitude do gerador é muito pequena.

No modo fundamental de vibração de uma corda presa em uma extremidade e livre na outra, há um nó na extremidade fixa e um antinó na extremidade livre, de modo que $L = \frac{1}{4}\lambda$ (Figura 16-17). (Lembre-se de que a distância de um nó a um antinó adjacente é igual a um quarto de comprimento de onda.)

Em cada modo de vibração mostrado na Figura 16-18 há um número ímpar de quartos de comprimento de onda no comprimento L. Isto é, $L = n\frac{1}{4}\lambda_n$, onde $n = 1, 3, 5, \ldots$. A condição para onda estacionária pode, assim, ser escrita como

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{16-12}$$

CONDIÇÃO PARA ONDA ESTACIONÁRIA, UMA EXTREMIDADE LIVRE

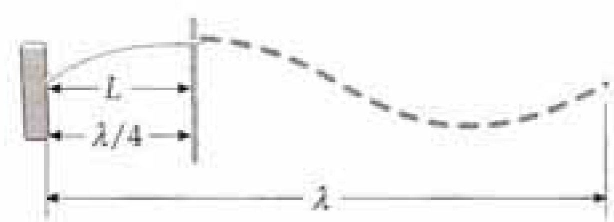


FIGURA 16-17 Para o primeiro harmônico de uma corda esticada fixa em uma extremidade e livre na outra, $\lambda = 4L$.

e, portanto, $\lambda_n = 4L/n$. As freqüências de ressonância são, então, dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{16-13}$$

FREQÜÊNCIAS DE RESSONÂNCIA, UMA EXTREMIDADE LIVRE

onde

$$f_1 = \frac{v}{4L} \qquad \text{16-14}$$

é a freqüência fundamental. As freqüências naturais deste sistema ocorrem nas razões 1:3:5:7:..., o que significa que todos os harmônicos pares estão faltando.

Funções de onda para ondas estacionárias Se uma corda vibra em seu n-ésimo modo, cada ponto da corda apresenta movimento harmônico simples. Seu deslocamento $y_n(x, t)$ é dado por

$$y_n(x, t) = A_n(x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

onde ω_n é a freqüência angular, δ_n é a constante de fase, que depende das condições iniciais, e $A_n(x)$ é a amplitude, que depende da posição x do ponto. A função $A_n(x)$ tem a forma da corda quando $\cos(\omega_n t + \delta_n) = 1$ (no instante em que a vibração tem seu deslocamento máximo). A amplitude de uma corda vibrando em seu n-ésimo modo é descrita por

$$A_n(x) = A_n \operatorname{sen} k_n x \qquad \text{16-15}$$

onde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ é o número de onda. A função de onda para uma onda estacionária no n-ésimo harmônico pode, então, ser escrita como

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad \text{16-16}$$

É útil lembrar as duas condições necessárias para o movimento de onda estacionária, que são as seguintes:

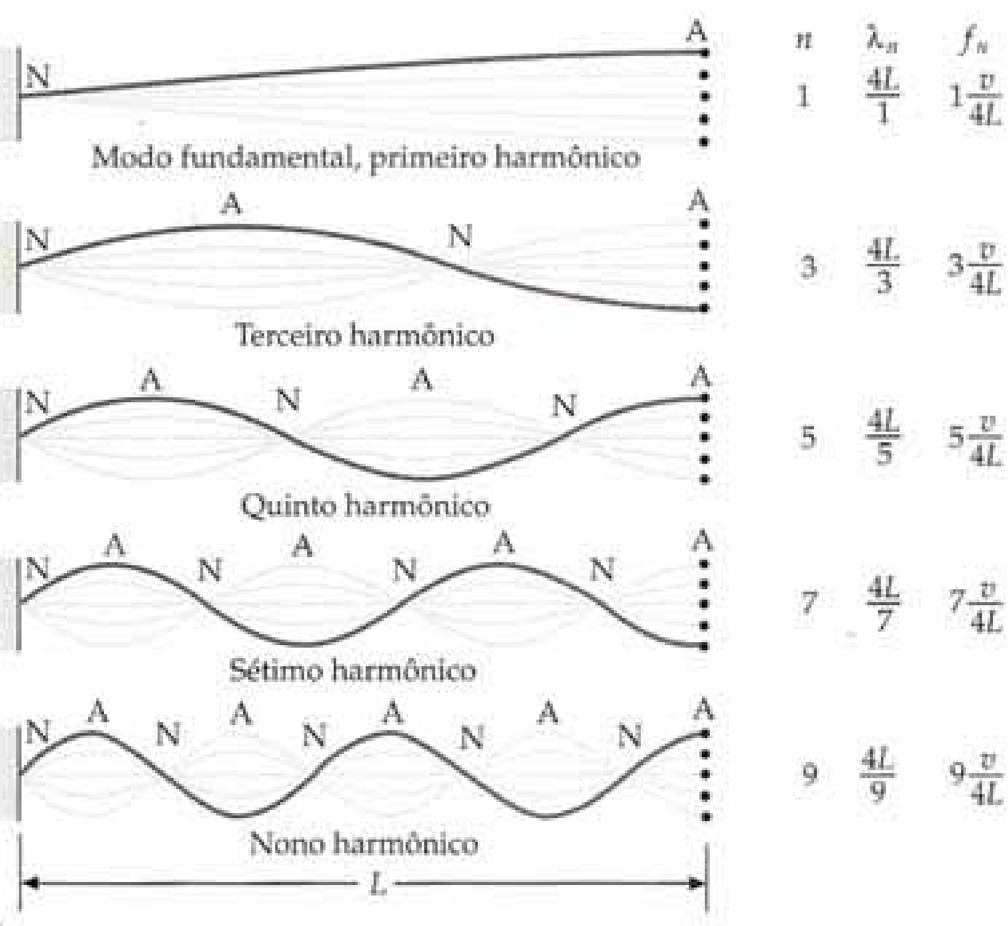


FIGURA 16-18 Ondas estacionárias em uma corda fixa em apenas uma extremidade. Um antinó existe na extremidade livre.

1. Cada ponto da corda ou permanece em repouso ou oscila em movimento harmônico simples. (Os pontos que permanecem em repouso são os nós.)
2. Quaisquer dois pontos da corda que não sejam nós oscilam ou em fase ou defasados de 180°.

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA UM MOVIMENTO DE ONDA ESTACIONÁRIA EM UM COMPRIMENTO DE CORDA

Exemplo 16-8 Ondas Estacionárias — *Tente Você Mesmo*

(*a*) As funções de onda para duas ondas de mesmo comprimento de onda, amplitude e freqüência, mas viajando em sentidos opostos, são dadas por $y_1 = y_0\,\text{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = y_0\,\text{sen}(kx + \omega t)$. Mostre que a superposição destas duas ondas é uma onda estacionária. (*b*) Uma onda estacionária em uma corda fixa nas duas extremidades é dada por $y(x, t) = (0{,}024\text{ m})\,\text{sen}(52{,}3\text{ m}^{-1}x)\cos(480\text{ s}^{-1}t)$. Determine a rapidez de onda nesta corda e a distância entre nós adjacentes de ondas estacionárias.

SITUAÇÃO Mostrar que a superposição das duas ondas é uma onda estacionária é mostrar que a soma algébrica de y_1 com y_2 pode ser escrita na forma $y_n(x, t) = A_n\,\text{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$ (Equação 16-16). Para determinar a rapidez de onda e o comprimento de onda, comparamos a função de onda fornecida com a Equação 16-16 e identificamos o número de onda e a freqüência angular. Conhecendo isto, podemos determinar o comprimento de onda e a rapidez de onda.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	**Respostas**
(*a*) 1. Escreva a Equação 16-16. Se a soma de y_1 com y_2 pode ser escrita nesta forma, então a superposição das duas ondas progressivas é uma onda estacionária:	$y(x, t) = A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$
2. Some as duas funções de onda e use a identidade trigonométrica $\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$.	$y = y_0\,\text{sen}(kx - \omega t) + y_0\,\text{sen}(kx + \omega t)$ $= 2y_0\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$ **Isto tem a forma dada pela Equação 16-16 (com $A = 2y_0$), logo** **a superposição é uma onda estacionária.**
(*b*) 1. Identifique o número de onda e a freqüência angular:	$k = \boxed{52{,}3\text{ m}^{-1}}$, $\omega = \boxed{480\text{ s}^{-1}}$
2. Calcule a rapidez de $v = \omega/k$:	$v = \boxed{9{,}18\text{ m/s}}$
3. Determine o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ e use-o para determinar a distância entre nós adjacentes:	$\frac{\lambda}{2} = \boxed{6{,}01\text{ cm}}$

CHECAGEM Era de se esperar que a superposição de uma onda viajando para a direita com outra onda idêntica, mas viajando para a esquerda, não seja uma onda progressiva. (Se o fosse, em que sentido ela estaria viajando?) Assim, não nos surpreende a superposição das duas ondas progressivas ser uma onda estacionária.

ONDAS SONORAS ESTACIONÁRIAS

Um tubo de órgão é um exemplo familiar do uso de ondas estacionárias em colunas de ar. Em um tubo flautado de órgão, uma corrente de ar é dirigida contra a borda afiada de uma abertura (ponto *A* na Figura 16-19). O movimento complicado de redemoinho do ar próximo à borda imprime vibrações à coluna de ar. As freqüências de ressonância do tubo dependem do comprimento do tubo e de se a abertura superior é fechada ou aberta.

Em um tubo de órgão aberto, a pressão não varia apreciavelmente perto de cada extremidade aberta. (Ela permanece igual à pressão atmosférica.) Como a pressão bem junto às extremidades não varia apreciavelmente, existe um nó de pressão próximo de cada extremidade. Se a onda sonora no tubo é uma onda unidimensional, o que é bem válido se o diâmetro do tubo é muito menor do que o comprimento de onda, então o nó de pressão está muitíssimo próximo da extremidade aberta do tubo. Na prática, no entanto, o nó de pressão se encontra ligeiramente além da extremidade aberta do tubo. O comprimento efetivo do tubo é $L_{ef} = L + \Delta L$, onde ΔL é a correção de extremidade, que é um pouco menor do que o diâmetro do tubo. A condição para onda estacionária para este sistema é a mesma que para uma corda fixa nas duas extremidades, com L substituído por L_{ef} (o comprimento efetivo do tubo) e valendo as mesmas equações.

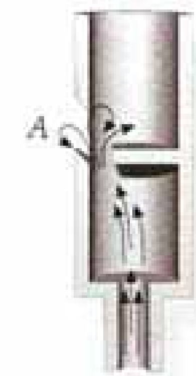


FIGURA 16-19 Vista em corte de parte de um tubo flautado de órgão. O ar é soprado na entrada, causando um movimento de redemoinho próximo ao ponto A, o que excita ondas estacionárias no tubo. Há um nó de pressão próximo ao ponto A, aberto para a atmosfera.

Em um tubo de órgão fechado (aberto em uma extremidade e fechado na outra), há um nó de pressão perto da abertura (ponto A na Figura 16-19) e um antinó de pressão na extremidade fechada. A condição para onda estacionária para este sistema é a mesma que para uma corda com uma extremidade fixa e a outra livre. O comprimento efetivo do tubo é igual a um inteiro ímpar vezes $\lambda/4$. Isto é, o comprimento de onda do modo fundamental é quatro vezes o comprimento efetivo do tubo, e apenas os harmônicos ímpares estão presentes.

Como vimos no Capítulo 15, uma onda sonora pode ser pensada tanto como uma onda de pressão quanto como uma onda de deslocamento. As variações de pressão e de deslocamento em uma onda sonora estão defasadas de 90°. Assim, em uma onda sonora estacionária os nós de pressão são antinós de deslocamento e vice-versa. Próximo à extremidade aberta de um tubo de órgão existe um nó de pressão e um antinó de deslocamento, enquanto em uma extremidade fechada existe um antinó de pressão e um nó de deslocamento.

Exemplo 16-9 Ondas Sonoras Estacionárias em uma Coluna de Ar: I — *Tente Você Mesmo*

Um tubo de órgão aberto nas duas extremidades possui um comprimento efetivo igual a 1,00 m. (*a*) Se a rapidez do som é 343 m/s, quais são as freqüências e os comprimentos de onda permitidos para ondas sonoras estacionárias neste tubo? (*b*) A rapidez do som no hélio é 975 m/s. Quais são as freqüências permitidas para ondas sonoras estacionárias neste tubo, se ele está cheio e cercado de hélio?

SITUAÇÃO Há um antinó de deslocamento (e um nó de pressão) em cada extremidade. Logo, o comprimento efetivo do tubo é igual a um número inteiro de meios-comprimentos de onda.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	**Respostas**
(*a*) 1. Usando a Figura 16-12, determine o comprimento de onda do modo fundamental:	$\lambda_1 = 2L_{ef} = 2{,}00\text{ m}$
2. Use $v = f\lambda$ para calcular a freqüência fundamental f_1:	$f_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = 172\text{ Hz}$
3. Escreva expressões para as freqüências f_n e para os comprimentos de onda λ_n dos outros harmônicos em termos de n:	$f_n = nf_1 = \boxed{n(172\text{ Hz}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$ $\lambda_n = \dfrac{2L}{n} = \boxed{(2{,}00\text{ m})/n \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$
(*b*) 1. Repita a Parte (*a*) para calcular o espectro de freqüências de ressonância do tubo de órgão cheio de hélio:	$f_n = nf_1 = n\dfrac{v}{\lambda_1} = n\dfrac{v}{2L} = n\dfrac{975\text{ m/s}}{2{,}00\text{ m}}$ $= \boxed{n(488\text{ Hz}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$

CHECAGEM O produto dos dois resultados do passo 3 da Parte (*a*) não depende de n. (Os n's cancelam quando você faz o produto.) Isto é de se esperar, porque o produto é igual à rapidez de onda, que nem depende da freqüência nem do comprimento de onda.

PROBLEMA PRÁTICO 16-3 O tubo de órgão mais longo é o que tem uma freqüência fundamental igual a 16 Hz, a mais baixa freqüência audível pelos humanos. Qual é o comprimento de um tubo de órgão aberto que tem uma freqüência fundamental de 16,0 Hz?

CHECAGEM CONCEITUAL 16-1

Por que a sua voz muda de freqüência quando você fala depois de inalar o conteúdo de um balão cheio de hélio?

Exemplo 16-10 Ondas Sonoras Estacionárias em uma Coluna de Ar: II

Quando um diapasão de 500 Hz de freqüência é segurado acima de um tubo parcialmente cheio de água, como na Figura 16-20, são encontradas ressonâncias quando o nível da água está a uma distância L = 16,0; 50,5; 85,0 e 119,5 cm do topo do tubo. (*a*) Qual é a rapidez do som no ar? (*b*) A que distância da extremidade aberta do tubo está o antinó de deslocamento?

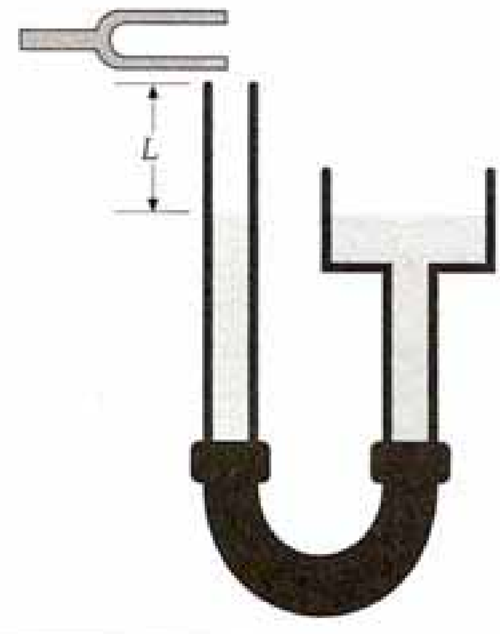


FIGURA 16-20 O comprimento da coluna de ar no cilindro da esquerda é variado movendo-se o reservatório da direita para cima e para baixo. Os dois cilindros estão ligados por uma mangueira flexível.

SITUAÇÃO Ondas sonoras estacionárias de 500 Hz de freqüência são excitadas na coluna de ar cujo comprimento L pode ser ajustado (ajustando-se o nível da água). A coluna de ar é fechada em uma extremidade e aberta na outra. Então, na ressonância, o número de quartos de comprimento de onda no comprimento efetivo L_{ef} do tubo é igual a um inteiro ímpar (Figura 16-21). Um nó de deslocamento existe na superfície da água e um antinó de deslocamento existe a uma pequena distância ΔL acima da extremidade aberta do tubo. Como a freqüência é fixa, o comprimento de onda também o é. A rapidez do som é, então, determinada a partir de $v = f\lambda$, com f igual a 500 Hz.

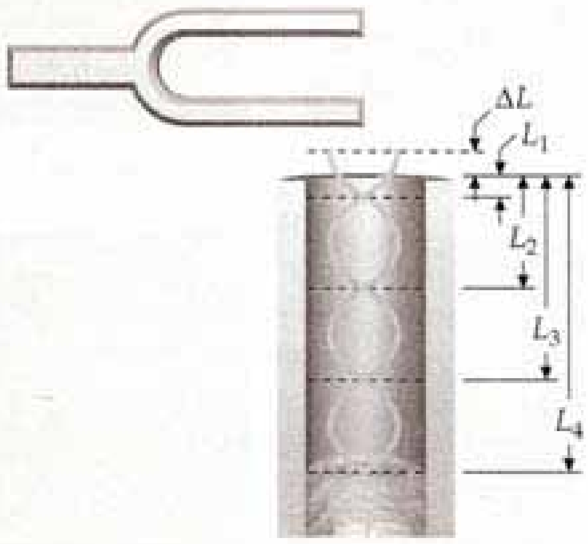


FIGURA 16-21 Um nó de deslocamento existe na superfície da água e um antinó de deslocamento existe a uma distância ΔL acima do topo do cilindro.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A rapidez do som no ar se relaciona com a freqüência e com o comprimento de onda:

$$v = f\lambda$$

2. Ressonância ocorre cada vez que o nível de água está na posição de um nó de deslocamento (veja a Figura 16-21). Isto é, quando o comprimento L varia de meio comprimento de onda:

$$L_{n+1} = L_n + \frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

3. A distância entre níveis sucessivos é determinada a partir dos dados do problema:

$$L_{n+1} - L_n = L_4 - L_3 = 1195\text{ cm} - 85{,}0\text{ cm} = 34{,}5\text{ cm}$$

logo $\lambda = 2(34{,}5\text{ cm}) = 69{,}0\text{ cm} = 0{,}690\text{ m}$

4. Substitua os valores de f e de λ para determinar v:

$$v = f\lambda = (500\text{ Hz})(0{,}690\text{ m}) = \boxed{345\text{ m/s}}$$

(*b*) Haverá um antinó de deslocamento um quarto de comprimento de onda acima do nó de deslocamento na superfície da água. Então, a distância do nível mais alto de água a suportar ressonância e o antinó de deslocamento acima da abertura do tubo é de um quarto de comprimento de onda:

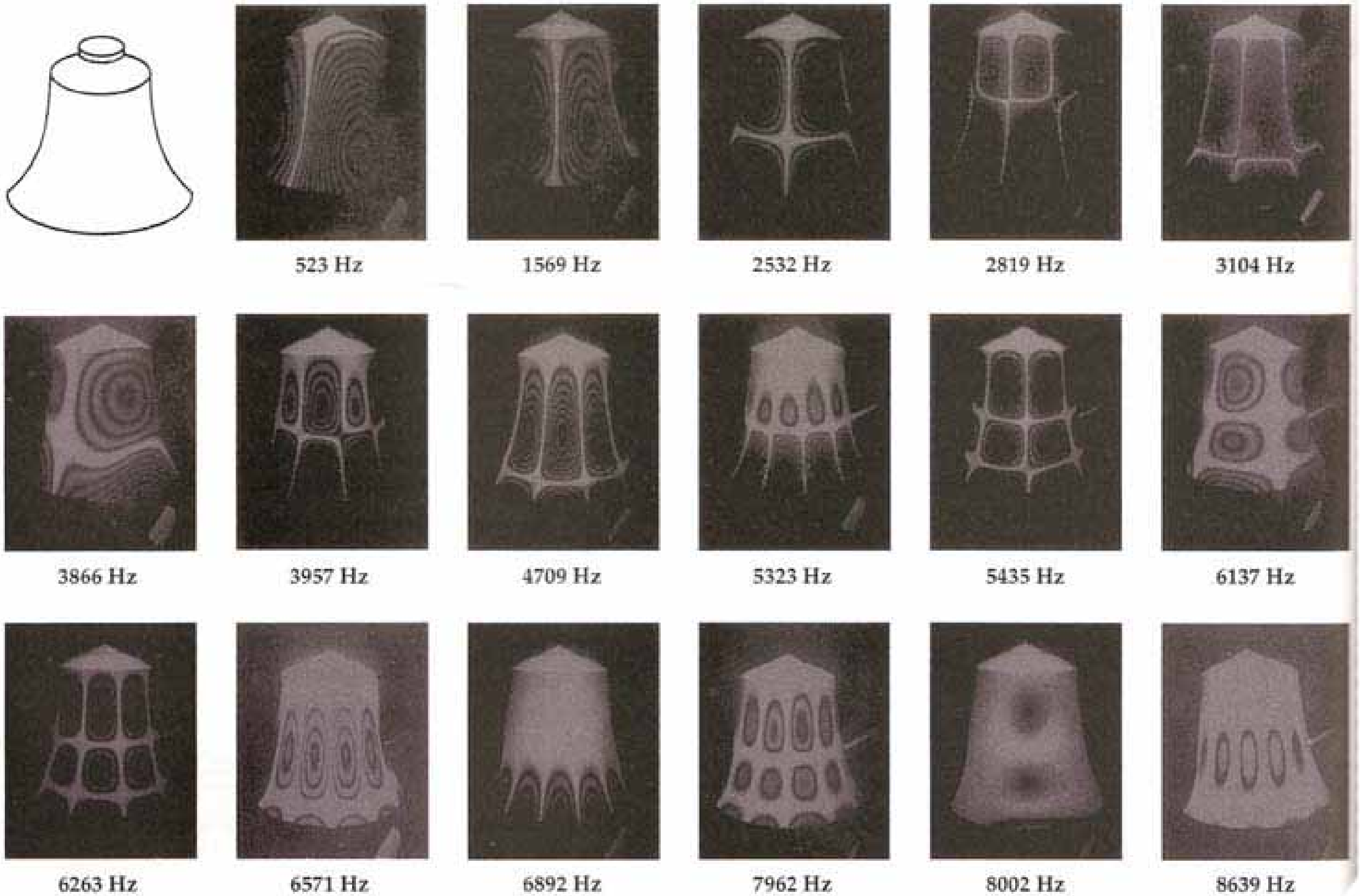
$$\tfrac{1}{4}\lambda = L_1 + \Delta L$$

logo $\Delta L = \tfrac{1}{4}\lambda - L_1 = \tfrac{1}{4}(69{,}0\text{ cm}) - (16{,}0\text{ cm})$

$$= \boxed{1{,}25\text{ cm}}$$

CHECAGEM Como esperado, a rapidez de onda (passo 4) é aproximadamente igual à rapidez do som no ar à temperatura ambiente.

A maioria dos instrumentos musicais de sopro é muito mais complicada do que simples tubos cilíndricos. O tubo cônico, que é a base do oboé, do fagote, da trompa inglesa e do saxofone, possui uma série harmônica completa com seu comprimento de onda fundamental igual ao dobro do comprimento do cone. Os instrumentos de metal são combinações de cones e de cilindros. A análise destes instrumentos é extremamente complexa. O fato de eles possuírem séries harmônicas quase perfeitas é mais um triunfo de um esforço de tentativa e erro do que de cálculos matemáticos.



Interferogramas holográficos mostrando ondas estacionárias em uma sineta. Os "olhos de boi" localizam os antinós. *(Professor Thomas D. Rossing, Northern Illinois University, Dekalb.)*

*16-3 TÓPICOS ADICIONAIS

A SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS ESTACIONÁRIAS

Como vimos na seção precedente, há um conjunto de freqüências naturais de ressonância que produzem ondas estacionárias para ondas sonoras em colunas de ar ou para cordas vibrantes fixas em uma ou nas duas extremidades. Por exemplo, para uma corda fixa nas duas extremidades, a freqüência do modo fundamental de vibração é $f_1 = v/(2L)$, onde L é o comprimento da corda e v é a rapidez de onda, e a função de onda é a Equação 16-16:

$$y_1(x, t) = A_1 \operatorname{sen} k_1 x \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

Em geral, um sistema vibrante não vibra em um único modo harmônico. O movimento consiste, na verdade, em uma superposição de vários dos harmônicos permitidos. A função de onda é uma combinação linear das funções de onda harmônicas:

$$y(x, t) = \sum_n A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad 16\text{-}17$$

onde $k_n = 2\pi/\lambda_n$, $\omega_n = 2\pi f_n$ e A_n e δ_n são constantes. As constantes A_n e δ_n dependem das posições e velocidades iniciais dos pontos da corda. Se uma corda de harpa, por exemplo, é dedilhada no centro, como na Figura 16-22, a forma inicial da corda é simétrica em relação ao ponto $x = \frac{1}{2}L$ e a velocidade inicial é zero ao longo de toda a corda. O movimento da corda depois de liberada continuará sendo simétrico em relação a $x = \frac{1}{2}L$. Apenas os harmônicos ímpares, que também são simétricos em relação a $x = \frac{1}{2}L$, serão excitados. Os harmônicos pares, que são anti-simétricos em relação a $x = \frac{1}{2}L$, não são excitados; isto é, a constante A_n é zero para todos os valores pares de n. As formas dos quatro primeiros harmônicos são mostradas na Figura 16-23. A maior parte da energia da corda tocada é associada ao modo fundamental,

FIGURA 16-22 Uma corda dedilhada no centro. Quando liberada, sua vibração é uma superposição linear de ondas estacionárias.

mas pequenas quantidades de energia são associadas aos terceiro, quinto e outros harmônicos ímpares. A Figura 16-24 mostra uma aproximação da forma inicial da corda usando a superposição de apenas os três primeiros harmônicos ímpares.

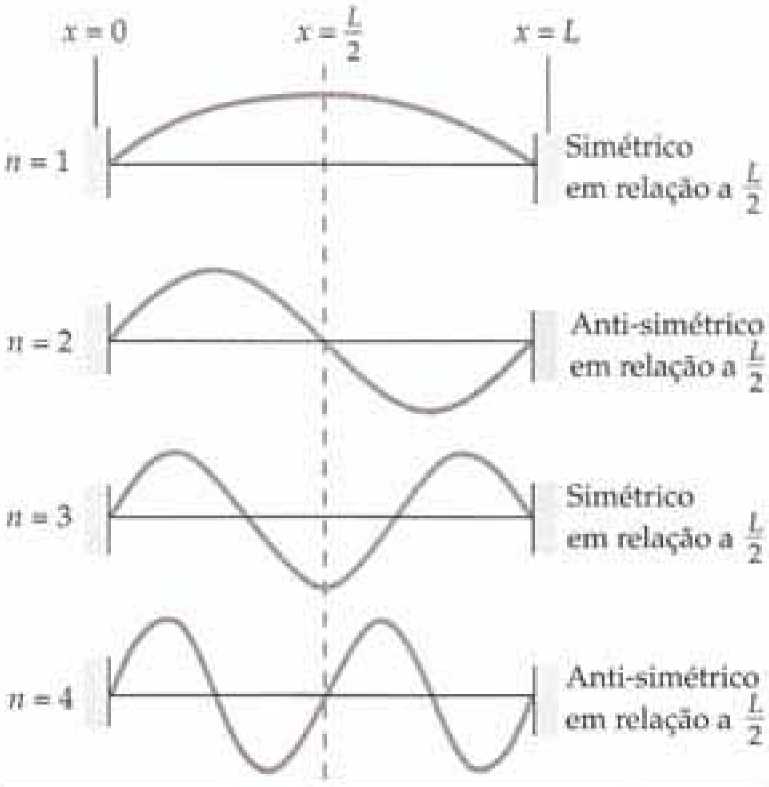


FIGURA 16-23 Os quatro primeiros harmônicos para uma corda fixa nas duas extremidades. Os harmônicos ímpares são simétricos em relação ao centro da corda, enquanto os harmônicos pares não o são. Quando uma corda é dedilhada no centro, ela vibra apenas em seus harmônicos ímpares.

ANÁLISE E SÍNTESE HARMÔNICAS

Quando um clarinete e um oboé tocam a mesma nota, digamos, o lá padrão, eles soam bem diferentes. As duas notas têm a mesma **altura**, uma sensação fisiológica fortemente correlacionada com a freqüência. No entanto, as notas diferem no que chamamos de **timbre**. A principal razão para a diferença de timbre é que apesar de ambos o clarinete e o oboé estarem produzindo vibrações com a mesma freqüência fundamental, cada instrumento também está produzindo harmônicos cujas intensidades relativas dependem do instrumento e de como ele está sendo tocado. Se o som produzido por cada instrumento estivesse inteiramente na freqüência fundamental do instrumento, eles soariam idênticos.

A Figura 16-25 mostra gráficos das variações de pressão *versus* tempo para o som de um diapasão, de um clarinete e de um oboé, cada um tocando a mesma nota. Estes padrões são chamados de **formas de onda**. A forma de onda de um som do diapasão é praticamente uma senóide pura, mas as do clarinete e do oboé são, claramente, mais complexas.

As formas de onda podem ser analisadas em termos dos harmônicos que as constituem através de uma **análise harmônica**. (Análise harmônica também é chamada de **análise de Fourier**, lembrando o matemático francês J.B.J. Fourier, que desenvolveu as técnicas de análise de funções periódicas.) A Figura 16-26 mostra um gráfico das intensidades relativas dos harmônicos das formas de onda da Figura 16-25. A forma de onda do som do diapasão contém apenas a freqüência fundamental. A forma de onda do som do clarinete contém o harmônico fundamental, grandes contribuições dos terceiro, quinto e sétimo harmônicos, e contribuições menores dos segundo, quarto e sexto harmônicos. Para o som do oboé, há mais intensidade nos segundo, terceiro e quarto harmônicos do que no fundamental.

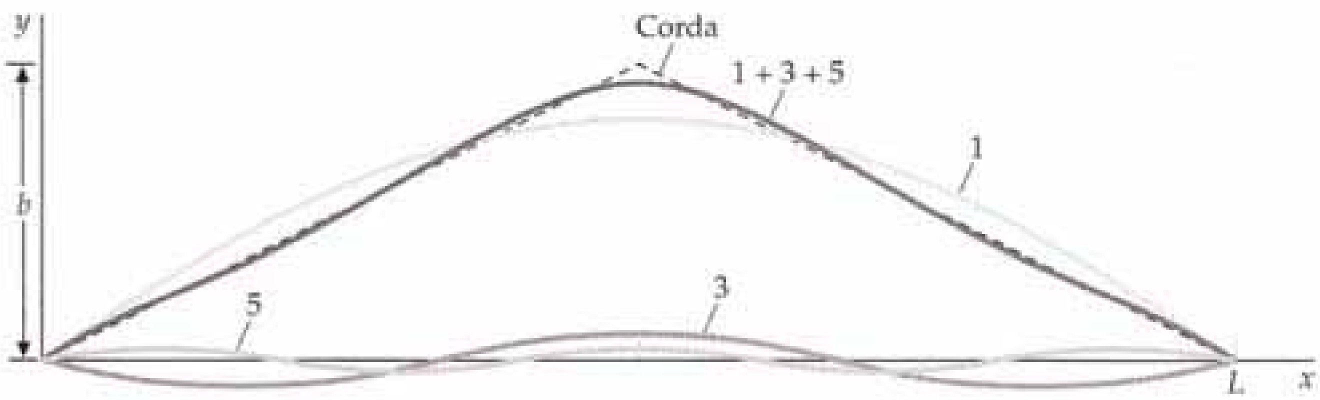


FIGURA 16-24 Aproximação de uma corda dedilhada no centro, como na Figura 16-22, usando harmônicos. A curva mais alta é uma aproximação da forma original da corda, com base nos três primeiros harmônicos ímpares. A altura da corda está exagerada neste desenho para mostrar as amplitudes relativas dos harmônicos. A maior parte da energia está associada ao modo fundamental, mas há alguma energia nos terceiro, quinto e outros harmônicos ímpares.

O contrário da análise harmônica é a **síntese harmônica**, que é a construção de uma onda periódica a partir de seus componentes harmônicos. A Figura 16-27*a* mostra os três primeiros harmônicos ímpares usados para sintetizar uma onda quadrada, e a Figura 16-27*b* mostra a onda quadrada que resulta da soma dos três harmônicos. Quanto mais harmônicos são usados em uma síntese, mais perto a aproximação estará da forma de onda real (a linha mais clara na Figura 16-27*b*). As amplitudes relativas dos harmônicos necessários para sintetizar a onda quadrada são mostradas na Figura 16-28.

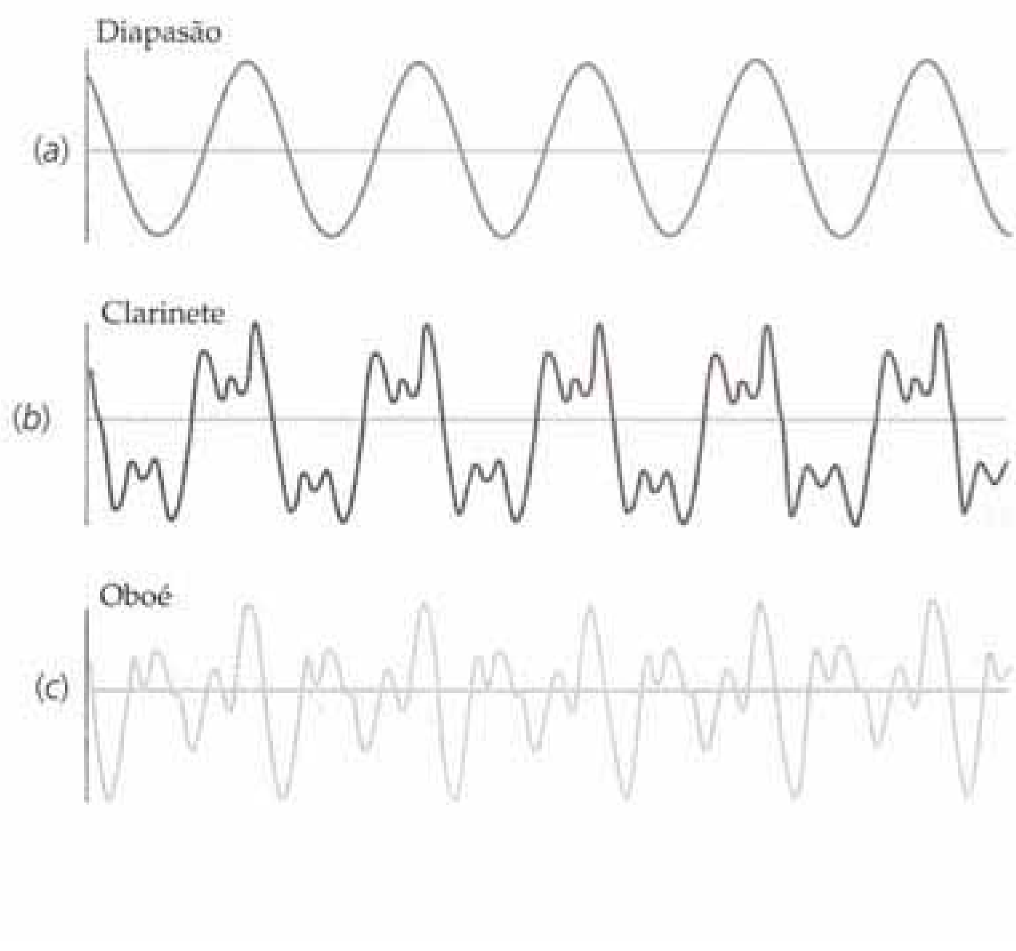


FIGURA 16-25 Formas de onda de (*a*) um diapasão, (*b*) um clarinete e (*c*) um oboé, cada um em uma freqüência fundamental de 440 Hz e com aproximadamente a mesma intensidade.

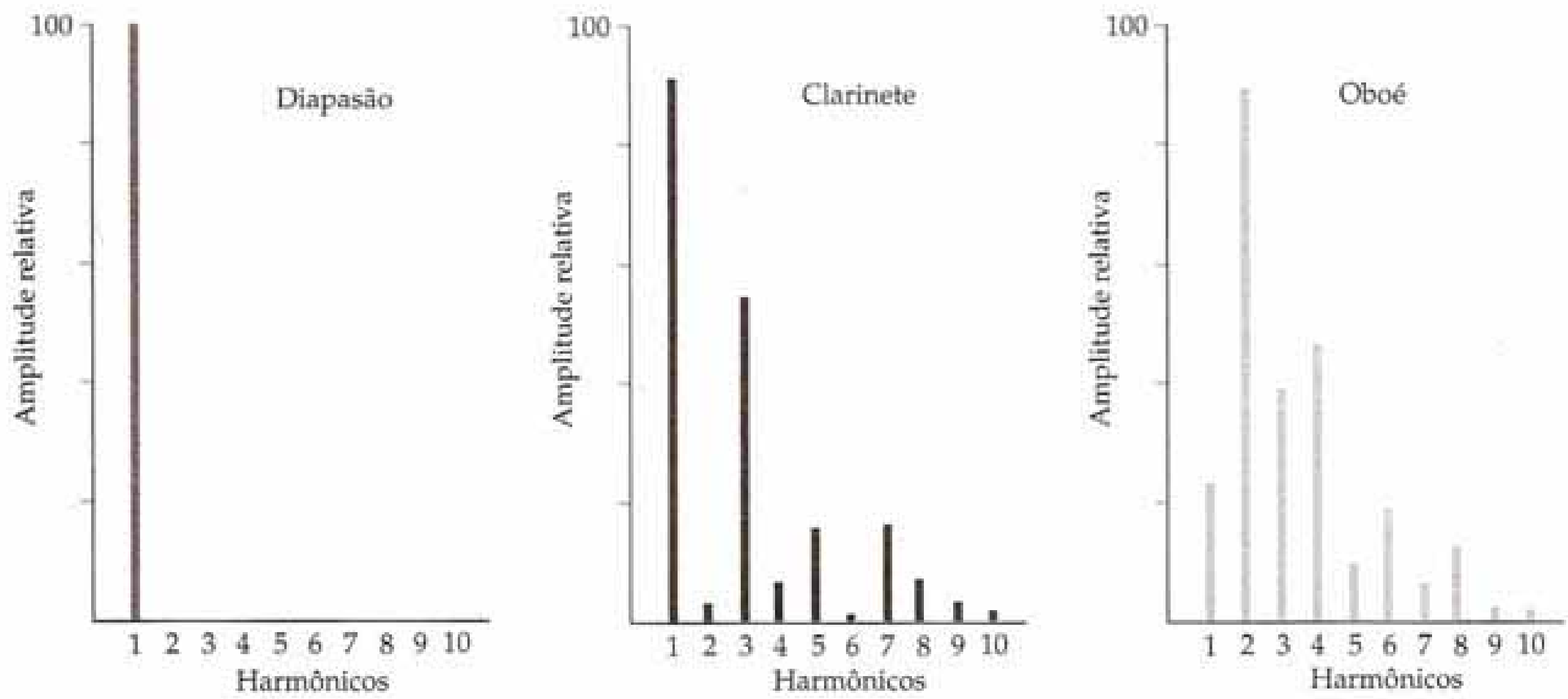


FIGURA 16-26 Amplitudes relativas dos harmônicos nas formas de onda mostradas na Figura 16-25 para (*a*) o diapasão, (*b*) o clarinete e (o oboé.

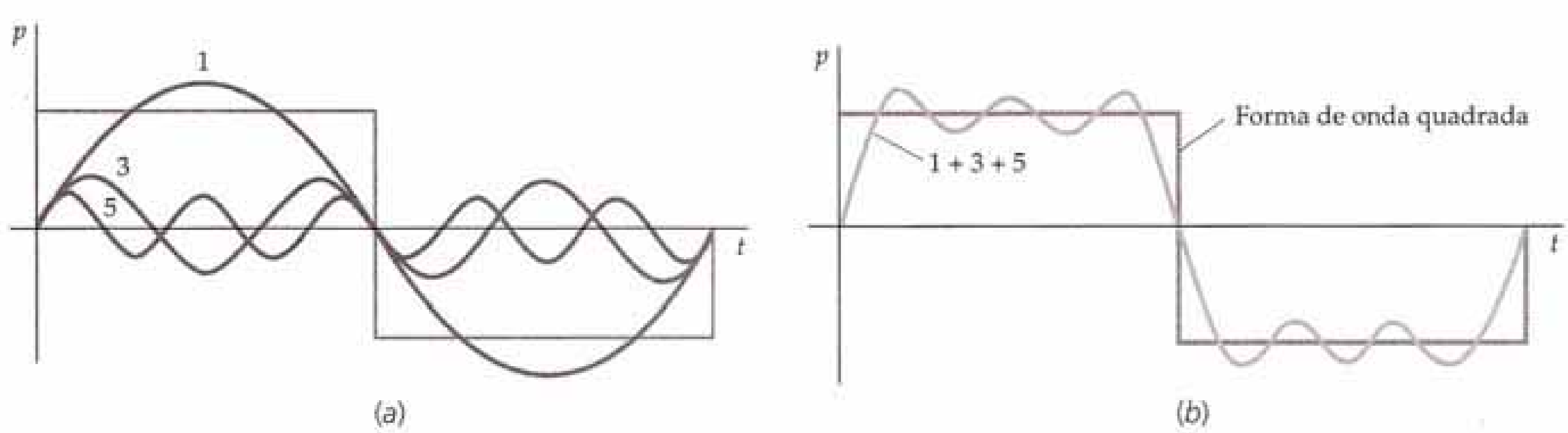


FIGURA 16-27 (*a*) Os três primeiros harmônicos ímpares usados para sintetizar uma onda quadrada. (*b*) A aproximação de uma onda quadrada que resulta da soma dos três primeiros harmônicos ímpares em (*a*).

PACOTES DE ONDAS E DISPERSÃO

As formas de onda previamente discutidas nesta Seção 16-3 são periódicas no tempo. Pulsos que não são periódicos também podem ser representados por um grupo de ondas harmônicas de diferentes freqüências. No entanto, a síntese de um pulso isolado requer uma distribuição contínua de freqüências, e não um conjunto discreto de harmônicos, como na Figura 16-28. Um grupo desse tipo é chamado de **pacote de ondas.** O aspecto característico de um pulso de onda é que ele tem um início e um fim, enquanto uma onda harmônica se repete indefinidamente. Se a duração Δt do pulso é muito pequena, o intervalo de freqüências $\Delta\omega$ necessário para descrever o pulso é muito grande. A relação geral entre Δt e $\Delta\omega$ é

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1 \qquad 16\text{-}18$$

onde o til (~) significa "da ordem de grandeza de".

O valor exato deste produto depende da forma pela qual as grandezas $\Delta\omega$ e Δt são definidas. Para quaisquer definições razoáveis, $\Delta\omega$ e $1/\Delta t$ têm a mesma ordem de grandeza. Um pulso de onda produzido por uma fonte de curta duração Δt, como um chute em uma bola, possui uma estreita extensão espacial $\Delta x = v\,\Delta t$, onde v é a rapidez da onda. Cada onda harmônica de freqüência ω tem um número de onda $k = \omega/v$. Um intervalo de freqüências $\Delta\omega$ implica um intervalo de números de onda $\Delta k = \Delta\omega/v$. Substituindo $\Delta\omega$ por $v\,\Delta k$ na Equação 16-18, fica $v\,\Delta k\,\Delta t \sim 1$, ou

$$\Delta k\,\Delta x \sim 1 \qquad 16\text{-}19$$

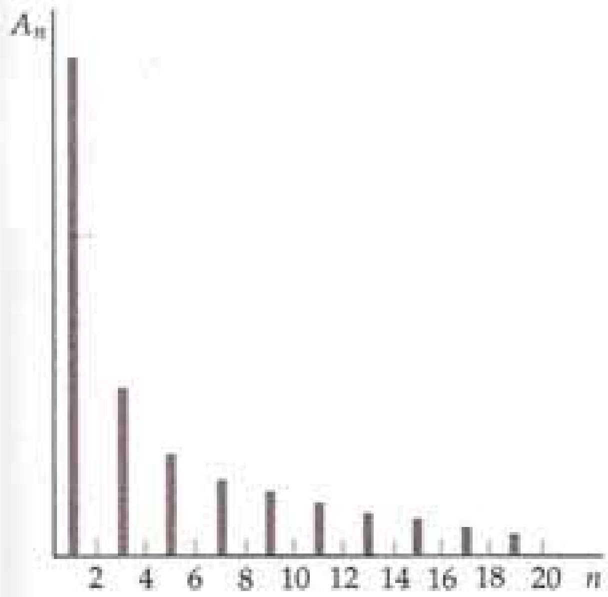


FIGURA 16-28 Amplitudes relativas A_n dos 10 primeiros harmônicos necessários para sintetizar uma onda quadrada. Quanto mais harmônicos forem usados, melhor será a aproximação de onda quadrada.

Exemplo 16-11 Estimando $\Delta\omega$ e Δk

No Exemplo 15-1, um pulso de onda em um longo varal se move a 100 m/s. (*a*) Se a largura do pulso é 1,00 m, qual é a duração do pulso? Isto é, quanto tempo leva para o pulso percorrer o varal? (*b*) O pulso pode ser considerado como uma superposição de ondas harmônicas. Qual é o intervalo de freqüências dessas ondas harmônicas? (*c*) Qual é o intervalo de números de onda?

SITUAÇÃO Para determinar a duração do pulso, usamos distância igual a rapidez vezes tempo. Para determinar o intervalo de freqüências e o intervalo de números de onda, usamos $\Delta\omega\,\Delta t \sim 1$ e $\Delta k\,\Delta x \sim 1$ (Equações 16-18 e 16-19).

SOLUÇÃO

(*a*) A duração do pulso é o tempo que ele leva para percorrer o varal:

$$L = v\Delta \quad \text{logo} \quad \Delta t = \frac{L}{v} = \frac{1{,}00\text{ m}}{100\text{ m/s}} = \boxed{0{,}0100\text{ s}}$$

(*b*) Para determinar o intervalo de freqüências, usamos $\Delta\omega\,\Delta t \sim 1$ (Equação 16-18):

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1 \quad \text{logo} \quad \Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}0100\text{ s}} = \boxed{100\text{ s}^{-1}}$$

(*c*) Para determinar o intervalo de números de onda, usamos $\Delta k\,\Delta x \sim 1$ (Equação 16-19):

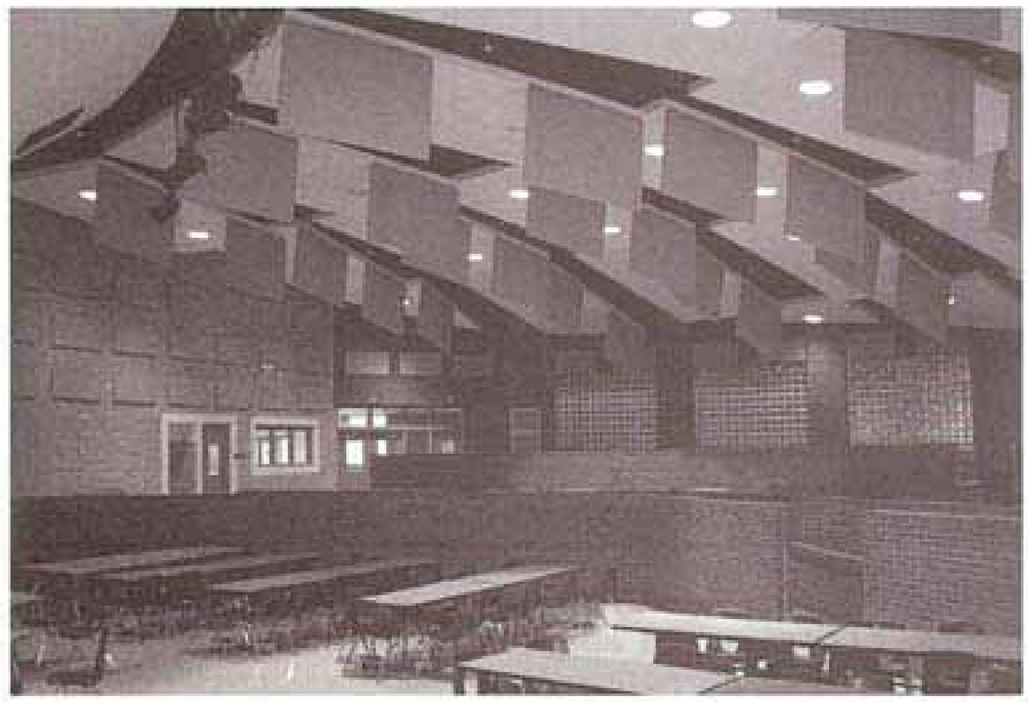
$$\Delta k\,\Delta x \sim 1 \quad \text{logo} \quad \Delta k \sim \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{1{,}00\text{ m}} = \boxed{1{,}00\text{ m}^{-1}}$$

CHECAGEM Sabemos que $k = \omega/v$, de modo que um intervalo de freqüências $\Delta\omega$ implica um intervalo de números de onda $\Delta k = \Delta\omega/v$. Dividindo nosso resultado da Parte (*b*) pela rapidez de onda v, obtemos $(100\text{ s}^{-1})/(100\text{ m/s}) = 1\text{ m}^{-1}$. Este é o nosso resultado da Parte (*c*).

Se um pacote de ondas deve manter sua forma enquanto viaja, todas as ondas harmônicas componentes que o constituem devem viajar com a mesma rapidez. Isto ocorre se a rapidez das ondas componentes em um dado meio é independente da freqüência ou do comprimento de onda. Um meio desse tipo é chamado **meio não-dispersivo**. O ar é, em excelente aproximação, um meio não-dispersivo para ondas sonoras, mas sólidos e líquidos não o são. (Provavelmente o exemplo mais familiar de dispersão é a formação de um arco-íris, devida ao fato de que a velocidade de ondas luminosas na água depende ligeiramente da freqüência da luz, de forma que cores diferentes, correspondendo a freqüências diferentes, têm ângulos de refração ligeiramente diferentes.)

Quando a rapidez de onda em um meio dispersivo depende apenas ligeiramente da freqüência (ou do comprimento de onda), um pacote de ondas muda de forma apenas lentamente, enquanto viaja, e cobre uma distância considerável mantendo-se íntegro. Mas a rapidez do pacote, chamada de **velocidade de grupo**, não é a mesma que a rapidez (média) das ondas harmônicas componentes individuais, chamada de **velocidade de fase**. (Por rapidez de uma onda harmônica individual queremos dizer a rapidez de suas frentes de onda. Como as frentes de onda são linhas ou superfícies de fase constante, sua rapidez é chamada de velocidade de fase da onda.)

Ecos do Silêncio: Arquitetura Acústica



Os defletores pendurados do teto e presos às paredes acima das portas são colocados para absorver o som. Suas superfícies são feitas de material acusticamente inerte, como o feltro. *(Cortesia de Perdue Acoustics.)*

A arquitetura acústica lida com a maneira com que a energia sonora reflete, reverbera e é absorvida em um ambiente. A modelação computacional de espaços tem permitido que os engenheiros acústicos projetem espaços flexíveis,[*,†] levando em conta as diferentes necessidades de apresentação de palestras, teatro e vários tipos de música. Em geral, o objetivo é tornar o som uniforme, audível e inteligível em cada poltrona.

Não deveria haver nenhuma onda estacionária ocupando todo um auditório.[‡] Ondas estacionárias que ocupam toda a sala tornam certas freqüências mais difíceis de serem ouvidas por aqueles que estejam sentados perto dos nós, e elevam muito o volume de notas da escala musical para aqueles sentados perto dos antinós. Salas projetadas para reduzir o número de ondas estacionárias possuem longas paredes que não são paralelas entre si, e tetos e pisos também não-paralelos.

Se os ouvintes estiverem sentados a uma distância média de 50 pés da principal fonte sonora, bem menos de um por cento da energia sonora poderá chegar diretamente aos seus ouvidos,[#] e quase toda a energia sonora a atingir os ouvintes será som refletido. As reflexões devem ser claras e suficientemente energéticas para dar ao ouvinte um volume total razoável. A cronometragem das reflexões também é importante. Se uma reflexão de até 15 decibéis abaixo do nível da fonte atingir o ouvido do espectador mais do que 60 milissegundos depois da fonte sonora, ele será percebido como um eco.[°,§] Se reflexões com mais volume do que a fonte ocorrem nos primeiros 30 milissegundos, elas também podem ser percebidas como ecos. Ecos prejudicam a intelegibilidade da fala, e tornam menos claro o som musical. Reflexões tardias chegando 50 ms, ou mais, depois da fonte, devem ser evitadas.

Refletores devem estar a até 50 pés de cada ouvinte. Este é um problema para ambientes ao ar livre cercados de prédios altos.[¶] Muitos ambientes antigos têm estruturas que produzem reflexões que chegam adiantadas aos ouvintes. Ambientes mais novos usam, com freqüência, alto-falantes distribuídos nas paredes e no teto. Candelabros e painéis suspensos de tetos altos também refletem o som. Tetos abobadados e com relevos dispersam o som em muitas reflexões pequenas e não-energéticas.

Absorvedores acústicos são usados para diminuir a energia do ruído sonoro dentro de uma sala. Os materiais das estruturas refletoras e absorvedoras são cuidadosamente fabricados para cada ambiente, porque a maioria dos materiais possui diferentes *coeficientes de absorção* para diferentes freqüências.[**] O coeficiente de absorção é uma medida da fração de energia sonora que é absorvida, em vez de refletida ou transmitida. Vidro de janela, por exemplo, possui coeficientes de absorção de 0,35 a 125 Hz e de 0,04 a 4 kHz. Carpetes possuem coeficientes de absorção de 0,01 a 125 Hz e de 0,65 a 4 kHz. Materiais diferentes devem ser usados para absorção e para reflexão, para que se tenha uma boa resposta, para todo o espectro, em cada poltrona.

Muita absorção torna as salas muito silenciosas, dando às pessoas uma sensação de claustrofobia.[††] Reverberação, ou energia sonora caótica, torna as salas aconchegantes. O tempo de reverberação, a medida de quão rapidamente o ruído caótico se dissipa, é usado como uma medida da vivacidade de uma sala. Tempos de reverberação variam de acordo com a finalidade de cada ambiente.

* Orfali, and Ahnert, op. cit.
† "Gallagher Bluedorn Performing Arts Center," Acoustic Dimensions, http://www.acousticdimensions.com/pac_scope.htm
‡ Everest, F. Alton, *Master Handbook of Acoustics*, 4th ed., New York: McGraw-Hill, 2001, 320
# Noxon, A., "Auditorium Acoustics 101," *Church & Worship Technology*, April 2002, 22+.
° Everest, op. cit., 356.
§ Noxon, A., "Auditorium Acoustics 102," *Church & Worship Technology*, May 2002, 24+.
¶ Orfali, W., and Ahnert, W., "Measurments (sic) and Verification in Two Mosques in Saudi Arabia and Jordan," paper presented at the 151st Meeting of the Acoustical Society of America, Providence, RI, June 1–5, 2006, http://scitation.aip.org
** Everest, op. cit., 585–587.
†† Freiheit, R., "Historic Recording Gives Choir 'Alien' Feeling: In Anechoic Space, No One Can Hear You Sing," paper presented at the ASA/Noise Conference 2005 Minneapolis, http://www.acoustics.org/press/150th/Freiheit.html

Resumo

1. O princípio da superposição, que vale para todas as ondas eletromagnéticas no vácuo, para ondas em uma corda flexível esticada, na aproximação de ângulos pequenos, e para ondas sonoras de pequena amplitude, é conseqüência da linearidade das correspondentes equações de onda.
2. A interferência é um importante fenômeno ondulatório que se aplica a todas as ondas coerentes que se superpõem. É uma conseqüência do princípio da superposição. A difração e a interferência diferenciam o movimento ondulatório do movimento de partícula.
3. As condições para ondas estacionárias podem ser lembradas desenhando-se uma corda, ou um tubo, e as ondas que têm nós de deslocamento em uma extremidade fixa ou fechada, e antinós de deslocamento em uma extremidade livre ou aberta.

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1. **Superposição e Interferência**	A superposição de duas ondas harmônicas de mesmo número de onda, freqüência e amplitude, mas com uma diferença de fase δ, resulta em uma onda harmônica de mesmo número de onda e freqüência, mas diferindo de cada uma das duas ondas em fase e em amplitude. $y = y_1 + y_2 = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_0 \operatorname{sen}(k - \omega t + \delta) = [2y_0 \cos\frac{1}{2}\delta] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta)$	16-6
Interferência construtiva	Se ondas estão em fase, ou diferem em fase por um número inteiro vezes 2π, então suas amplitudes se somam e a interferência é construtiva.	
Interferência destrutiva	Se ondas diferem em fase por π ou por um número inteiro ímpar vezes π, então suas amplitudes se subtraem e a interferência é destrutiva.	
Batimentos	Batimentos são o resultado da interferência de duas ondas de freqüências ligeiramente diferentes. A freqüência de batimento é igual à diferença entre as freqüências das duas ondas: $f_{\text{bat}} = \Delta f$	16-8
Diferença de fase δ devida a uma diferença de percurso Δx	$\delta = k\,\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$	16-9
2. **Ondas Estacionárias**	Ondas estacionárias ocorrem para certas freqüências e comprimentos de onda quando ondas são confinadas no espaço. Se elas ocorrem, então cada ponto do sistema oscila em movimento harmônico simples e quaisquer dois pontos que não estejam em nós se movem ou em fase ou defasados de 180°.	
Comprimento de onda	A distância entre um nó e um antinó adjacente é um quarto de comprimento de onda.	
Corda fixa nas duas extremidades	Para uma corda fixa nas duas extremidades, existe um nó em cada extremidade, de forma que um número inteiro de meios comprimentos de onda deve se ajustar ao comprimento da corda. A condição para onda estacionária, neste caso, é $L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	16-10
Função de onda estacionária para uma corda fixa nas duas extremidades	As ondas permitidas formam uma série harmônica, com as freqüências dadas por $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{\lambda_1} = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ onde $f_1 = v/2L$ é a mais baixa freqüência, chamada de fundamental.	16-18
Tubo de órgão aberto nas duas extremidades	Ondas sonoras estacionárias, no ar de um tubo aberto nas duas extremidades, têm um nó de pressão (e um antinó de deslocamento) próximo a cada extremidade, de modo que a condição para onda estacionária é a mesma que para uma corda fixa nas duas extremidades.	

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES
Corda fixa em uma extremidade e livre na outra	Para uma corda com uma extremidade fixa e a outra livre, existe um nó na extremidade fixa e um antinó na extremidade livre, de modo que um número inteiro de quartos de comprimento de onda deve se ajustar ao comprimento da corda. A condição para onda estacionária é, neste caso, $L = n\frac{\lambda_n}{4} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$ (16-12) Apenas os harmônicos ímpares estão presentes. Suas freqüências são dadas por $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{\lambda_1} = n\frac{v}{4L} = nf_1 \quad n = 1, 3, 5, \ldots$ (16-13) onde $f_1 = v/4L$.
Tubo de órgão aberto em uma extremidade e fechado na outra	Ondas sonoras estacionárias, em um tubo aberto em uma extremidade e fechado na outra, têm um antinó de deslocamento na extremidade aberta e um nó de deslocamento na extremidade fechada. A condição para onda estacionária é a mesma que para uma corda fixa em uma extremidade.
Funções de onda para ondas estacionárias	$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$ (16-16) onde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ e $\omega_n = 2\pi f_n$. As condições necessárias para ondas estacionárias em uma corda são 1. Cada ponto da corda ou permanece em repouso ou oscila em movimento harmônico simples. (Os pontos que permanecem em repouso são os nós.) 2. Quaisquer dois pontos da corda que não sejam nós oscilam ou em fase ou defasados de 180°.
***3. Superposição de Ondas Estacionárias**	Tipicamente, um sistema que vibra não vibra em um único modo harmônico, mas em uma superposição de modos harmônicos permitidos.
***4. Análise e Síntese Harmônicas**	Sons de diferentes timbres contêm diferentes misturas de harmônicos. A análise do conteúdo harmônico de um particular timbre é chamada de análise harmônica. A síntese harmônica é a construção de um timbre pela soma de harmônicos.
***5. Pacotes de Ondas**	Um pulso de onda pode ser representado por uma distribuição contínua de ondas harmônicas. O intervalo de freqüências $\Delta\omega$ está relacionado com a variação temporal Δt e o intervalo de números de onda Δk está relacionado com a variação espacial Δx.
Intervalos de freqüência e de tempo	$\Delta\omega\, \Delta t \sim 1$ (16-18)
Intervalos de número de onda e de espaço	$\Delta k\, \Delta x \sim 1$ (16-19)
***6. Dispersão**	Em um meio não-dispersivo, a velocidade de fase é independente da freqüência, e um pulso (pacote de ondas) viaja sem mudar de forma. Em um meio dispersivo, a velocidade de fase varia com a freqüência, e o pulso muda de forma enquanto viaja. O pulso se move com uma velocidade chamada de velocidade de grupo do pacote.

Resposta da Checagem Conceitual

16-1 Sua voz muda de freqüência porque a freqüência fundamental de sua garganta e de sua cavidade bucal aumenta da mesma forma que aumenta a freqüência de ressonância do tubo de órgão do Exemplo 16-9, quando cheio de hélio.

Respostas dos Problemas Práticos

16-1 (*a*) 5,66 cm, (*b*) 120° ou 240°

16-2 $f_1 = 20$ Hz, $f_2 = 40$ Hz, $f_3 = 60$ Hz

16-3 Cerca de 10,7 m ≈ 35 ft

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

Use 343 m/s para a rapidez do som no ar, a não ser quando especificamente indicado.

- • Um só conceito, um só passo, relativamente simples
- •• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
- ••• Desafiante, para estudantes avançados

Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • Dois pulsos de onda retangulares viajam em sentidos opostos ao longo de uma corda. Em $t = 0$, os dois pulsos estão como mostrado na Figura 16-29. Esboce as funções de onda para $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s.

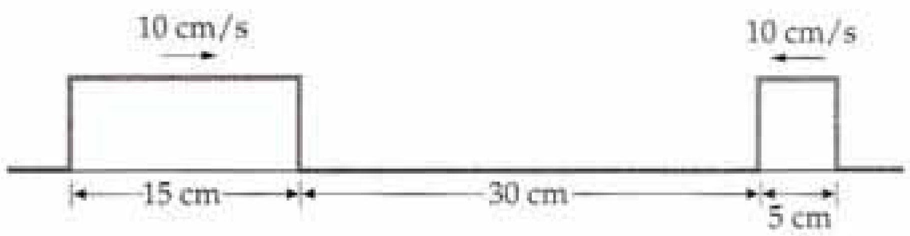


FIGURA 16-29 Problemas 1 e 2

2 • Repita o Problema 1 para o caso em que o pulso da direita é invertido.

3 • Batimentos são produzidos pela superposição de duas ondas harmônicas se (*a*) suas amplitudes e freqüências são iguais, (*b*) suas amplitudes são iguais mas suas freqüências diferem ligeiramente, (*c*) suas freqüências são iguais mas suas amplitudes diferem ligeiramente.

4 • Dois diapasões são tocados e os sons dos dois chegam simultaneamente aos seus ouvidos. Um som tem uma freqüência de 256 Hz, enquanto o outro tem uma freqüência de 258 Hz. A freqüência do zumbido que você ouve é (*a*) 2 Hz, (*b*) 256 Hz, (*c*) 258 Hz, (*d*) 257 Hz.

5 • No Problema 4, a freqüência de batimento é (*a*) 2 Hz, (*b*) 256 Hz, (*c*) 258 Hz, (*d*) 257 Hz.

6 • **Rico em Contexto** Recém-formado, você está dando sua primeira aula de física. Para demonstrar interferência de ondas sonoras, você colocou, sobre a mesa, dois alto-falantes ligados ao mesmo gerador de freqüência, emitindo coerentemente e em fase. Cada alto-falante gera um som com 2,4 m de comprimento de onda. Uma estudante, na primeira fila, diz que o som proveniente dos alto-falantes é muito fracamente audível, em comparação com o que ela ouve quando apenas um dos alto-falantes está ligado. Qual deve ser a diferença entre as distâncias da aluna a cada um dos alto-falantes? (*a*) 1,2 m (*b*) 2,4 m, (*c*) 4,8 m, (*d*) os dados fornecidos não são suficientes para determinar a diferença solicitada.

7 • No Problema 6, determine o maior comprimento de onda para o qual uma estudante ouvirá um som com volume (sonoridade) muito alto, devido à interferência construtiva, supondo a estudante afastada de um dos alto-falantes 3,0 m a mais do que a distância que a separa do outro alto-falante.

8 • Considere as ondas estacionárias em um tubo de órgão. Verdadeiro ou falso:
(*a*) Em um tubo aberto nas duas extremidades, a freqüência do terceiro harmônico é três vezes a freqüência do primeiro harmônico.
(*b*) Em um tubo aberto nas duas extremidades, a freqüência do quinto harmônico é cinco vezes a freqüência do harmônico fundamental.
(*c*) Em um tubo aberto em uma das extremidades e fechado na outra, os harmônicos pares não são excitados.

Explique suas escolhas.

9 • Ondas estacionárias resultam da superposição de duas ondas que possuem (*a*) mesma amplitude, freqüência e sentido de propagação, (*b*) mesma amplitude e freqüência e sentidos de propagação opostos, (*c*) mesma amplitude, freqüências ligeiramente diferentes e mesmo sentido de propagação, (*d*) mesma amplitude, freqüências ligeiramente diferentes e sentidos de propagação opostos.

10 • Se você soprar sobre a ponta de cima de um canudo de refrigerante bem grande, poderá ouvir uma freqüência fundamental de uma onda estacionária produzida no canudo. O que acontece à freqüência fundamental (*a*) se, ao soprar, você cobre a ponta de baixo do canudo com o dedo? (*b*) se, ao soprar, você corta o canudo pela metade, com uma tesoura? (*c*) Explique suas respostas das Partes (*a*) e (*b*).

11 • Um tubo de órgão, aberto nas duas extremidades, possui uma freqüência fundamental de 400 Hz. Se uma das extremidades do tubo é, agora, fechada, a freqüência fundamental passa a ser (*a*) 200 Hz, (*b*) 400 Hz, (*c*) 546 Hz, (*d*) 800 Hz.

12 •• Uma corda, presa nas duas extremidades, ressoa na freqüência fundamental de 180 Hz. Qual das seguintes intervenções reduzirá a freqüência fundamental para 90 Hz? (*a*) Dobrar a tensão e dobrar o comprimento. (*b*) Reduzir a tensão à metade e manter iguais o comprimento e a massa por unidade de comprimento. (*c*) Manter iguais a tensão e a massa por unidade de comprimento e dobrar o comprimento. (*d*) Manter iguais a tensão e a massa por unidade de comprimento e reduzir o comprimento à metade.

13 •• **Aplicação em Engenharia** Explique como você deve usar as freqüências de ressonância de um tubo de órgão para estimar a temperatura do ar no tubo.

14 •• No padrão de onda estacionária fundamental de um tubo de órgão com uma das extremidades fechada, o que ocorre com o comprimento de onda, com a freqüência e com a rapidez do som característicos do padrão formado, se o ar dentro do tubo se torna significativamente mais frio? Explique seu raciocínio.

15 •• (*a*) Quando a corda de um violão está vibrando em seu modo fundamental, o comprimento de onda do som produzido no ar é tipicamente o mesmo comprimento de onda da onda estacionária na corda? Explique. (*b*) Quando um tubo de órgão está em um de seus modos de onda estacionária, o comprimento de onda da onda sonora progressiva produzida no ar é tipicamente o mesmo comprimento de onda da onda sonora estacionária no tubo? Explique.

16 •• A Figura 16-30 é uma fotografia de dois pedaços muito finos de seda colocados um sobre o outro. Onde os pedaços se sobrepõem, vê-se uma série de linhas claras e escuras. Esta figura de Moiré também pode ser vista quando um escâner é usado para copiar fotos de um livro ou jornal. O que é que causa as figuras de Moiré e o que as torna tão parecidas com o fenômeno de interferência?

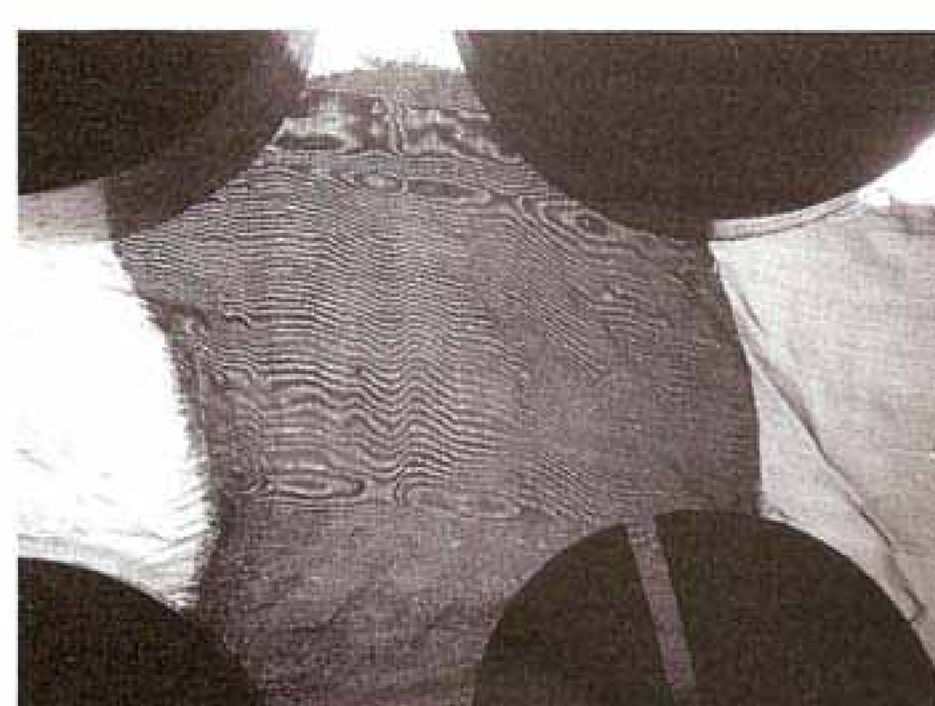


FIGURA 16-30 Problema 16 *(Cortesia de Chuck Adler.)*

17 •• Quando um instrumento musical constituído de copos de vidro, cada um parcialmente cheio de água até uma altura diferente, é tocado com um pequeno bastão, cada copo produz uma onda sonora de freqüência diferente. Explique como funciona este instrumento.

18 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Durante um recital de órgão, o compressor de ar que alimenta os tubos falha repentinamente. Um corajoso estudante de física, da audiência, tenta ajudar, substituindo o compressor por um tanque pressurizado de gás nitrogênio. Que efeito, se existir algum, produzirá o gás nitrogênio sobre a freqüência de saída dos tubos do órgão? Que efeito, se existente, seria produzido sobre a freqüência de saída dos tubos do órgão se o gás utilizado fosse o hélio?

19 •• A constante γ para o hélio (e para todos os gases monoatômicos) é 1,67. Se um homem aspira hélio e depois fala, sua voz passa a ter um tom mais alto, como nos desenhos animados. Por quê?

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

20 • É divulgado que uma potente cantora de ópera pode atingir uma nota alta com intensidade suficiente para quebrar um copo de vinho vazio, fazendo com que o ar dentro dele ressoe na freqüência de sua voz. Estime a freqüência necessária para se obter uma onda estacionária em um copo de 8,0 cm de altura. (Os 8,0 cm não incluem a altura da haste da taça.) Aproximadamente a quantas oitavas acima do dó central (262 Hz) corresponde esta freqüência? *Dica: Passar para uma oitava acima significa dobrar a freqüência.*

21 • Estime a precisão com que você pode afinar uma corda de piano com um diapasão de freqüência conhecida, usando apenas seus ouvidos, o diapasão e tocando a tecla correspondente. Explique sua resposta.

22 •• Os menores tubos usados em órgãos têm 7,5 cm de comprimento. (*a*) Estime a freqüência fundamental de um tubo aberto nas duas extremidades que tenha este comprimento. (*b*) Para este tubo, estime o número harmônico n do harmônico de freqüência mais alta dentro da faixa audível. (A faixa audível humana vai de 20 a 20.000 Hz.)

23 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Estime as freqüências de ressonância, dentro da faixa audível humana, para o canal auditivo humano. Considere o canal como uma coluna de ar aberta em uma extremidade, fechada na outra extremidade, e com um comprimento de 1,00 in. Quantas freqüências de ressonância estão nesta faixa? É uma constatação experimental que a audição humana é mais sensível nas freqüências de cerca de 3, 9 e 15 kHz. Compare estas freqüências com o resultado de seus cálculos.

SUPERPOSIÇÃO E INTERFERÊNCIA

24 • Duas ondas harmônicas propagam-se em uma corda no mesmo sentido, ambas com uma freqüência de 100 Hz, um comprimento de onda de 2,0 cm e uma amplitude de 0,020 m. Ademais, elas se sobrepõem. Qual é a amplitude da onda resultante se as originais diferem em fase por (*a*) $\pi/6$ e (*b*) $\pi/3$?

25 • Duas ondas harmônicas de mesmas freqüência, rapidez de onda e amplitude propagam-se no mesmo sentido e no mesmo meio de propagação. Ademais, elas se sobrepõem. Se elas diferem em fase por $\pi/2$, e cada uma tem uma amplitude de 0,050 m, qual é a amplitude da onda resultante?

26 • Dois alto-falantes, colocados face a face, oscilam em fase com a mesma freqüência. Eles estão separados de uma distância igual a um terço de um comprimento de onda. O ponto P está em frente aos dois alto-falantes, sobre a linha que passa pelos seus centros. A amplitude do som em P, devida a cada um dos alto-falantes isoladamente, é A. Qual é a amplitude (em termos de A) da onda resultante no ponto P?

27 • Duas fontes sonoras oscilam em fase com uma freqüência de 100 Hz. Em um ponto a 5,00 m de uma das fontes e a 5,85 m da outra, a amplitude do som proveniente da cada fonte, em separado, é A. (*a*) Qual é a diferença de fase entre as duas ondas nesse ponto? (*b*) Qual é a amplitude (em termos de A) da onda resultante nesse ponto?

28 • Desenhe, com um programa de desenho ou com um compasso, arcos circulares com raios de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm e 7 cm, centrados em cada um de dois pontos (P_1 e P_2) que distam d = 3,0 cm entre si. Desenhe curvas suaves passando pelas interseções correspondentes a pontos distantes N centímetros de P_1 e de P_2, para $N = +2, +1, 0, -1$ e -2, e identifique cada curva com o correspondente valor de N. Há mais duas curvas dessas que você pode desenhar , uma para $N = +3$ e outra para $N = -3$. Se fontes idênticas de ondas coerentes e em fase, de 1,0 cm de comprimento de onda, fossem colocadas nos pontos P_1 e P_2, as ondas iriam interferir construtivamente ao longo de cada uma dessas curvas suaves.

29 • Dois alto-falantes, separados de determinada distância, emitem ondas sonoras de mesma freqüência. Em algum ponto P a intensidade devida a cada um dos alto-falantes, separadamente, é I_0. A distância de P a um dos alto-falantes é $\frac{1}{2}\lambda$ maior do que a distância de P ao outro alto-falante. Qual é a intensidade em P se (*a*) os alto-falantes são coerentes e estão em fase, (*b*) os alto-falantes são incoerentes e (*c*) os alto-falantes são coerentes e defasados de 180°?

30 • Dois alto-falantes, separados de determinada distância, emitem ondas sonoras de mesma freqüência. Em algum ponto P' a intensidade devida a cada um dos alto-falantes, separadamente, é I_0. A distância de P' a um dos alto-falantes é um comprimento de onda maior do que a distância de P' ao outro alto-falante. Qual é a intensidade em P' se (*a*) os alto-falantes são coerentes e estão em fase, (*b*) os alto-falantes são incoerentes e (*c*) os alto-falantes são coerentes e defasados de 180°?

31 •• Uma onda transversal harmônica, com uma freqüência igual a 40,0 Hz, propaga-se ao longo de uma corda esticada. Dois pontos, separados de 5,00 cm, estão defasados de $\pi/6$. (*a*) Qual é o comprimento de onda da onda? (*b*) Em um dado ponto da corda, de quanto deve variar a fase em 5,00 ms? (*c*) Qual é a rapidez da onda?

32 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Acredita-se que o cérebro determina a direção de uma fonte sonora sentindo a diferença de fase entre as ondas sonoras que chegam aos tímpanos. Uma fonte distante emite som de 680 Hz de freqüência. Quando você está diretamente em frente da fonte sonora não existe diferença de fase. Estime a diferença de fase entre os sons recebidos por seus ouvidos quando você está olhando em uma direção que forma 90° com a direção que o liga à fonte.

33 •• A fonte sonora A está localizada em $x = 0$, $y = 0$, e a fonte sonora B está localizada em $x = 0$, y = 2,4 m. As duas fontes irradiam coerentemente e em fase. Um observador em x = 15 m, $y = 0$, nota que, dando alguns passos a partir de $y = 0$, tanto no sentido $+y$ quanto no sentido $-y$, a intensidade sonora diminui. Quais são a freqüência mais baixa e a freqüência seguinte à mais baixa, emitidas pela fonte, que podem dar conta desta observação?

34 •• Suponha que o observador do Problema 33 se encontre em um ponto de intensidade mínima em x = 15 m, $y = 0$. Quais são, então, a freqüência mais baixa e a freqüência seguinte à mais baixa, emitidas pela fonte, que podem dar conta desta observação?

35 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Duas ondas harmônicas de água, de mesma amplitude mas diferindo em freqüência, número de onda e rapidez, propagam-se no mesmo sentido. Ademais, elas se superpõem. O deslocamento total da onda pode ser escrito como $y(x,t) = A[\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$, onde $\omega_1/k_1 = v_1$ (a rapidez da primeira onda) e $\omega_2/k_2 = v_2$ (a rapidez da segunda onda). (*a*) Mostre que $y(x,t)$ pode ser escrito na forma $y(x,t) = Y(x,t)\cos(k_{méd}x - \omega_{méd}t)$, onde $\omega_{méd} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $k_{méd} = (k_1 + k_2)/2$, $Y(x,t) = 2A\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ e $\Delta k = k_1 - k_2$. O fator $Y(x,t)$ é o chamado

envelope da onda. (*b*) Sejam $A = 1{,}00$ cm, $\omega_1 = 1{,}00$ rad/s, $k_1 = 1{,}00$ m^{-1}, $\omega_2 = 0{,}900$ rad/s e $k_2 = 0{,}800$ m^{-1}. Usando uma **planilha eletrônica** ou uma **calculadora gráfica**, faça um gráfico de $y(x,t)$ *versus* x em $t = 0{,}00$ s, para $0 < x < 5{,}00$ m. (*c*) Usando uma **planilha eletrônica** ou uma **calculadora gráfica**, trace três curvas de $Y(x,t)$ *versus* x para $-5{,}00$ m $< x < 5{,}00$ m no mesmo gráfico. Faça uma curva para $t = 0{,}00$ s, uma segunda para $t = 5{,}00$ s e uma terceira para $t = 10{,}00$ s. Estime, a partir das três curvas, a rapidez com que se move o envelope e compare esta estimativa com a rapidez obtida usando $v_{envelope} = \Delta\omega/\Delta k$.

36 ••• Duas fontes pontuais coerentes estão em fase e separadas por uma distância d. Um padrão de interferência é detectado ao longo de uma linha paralela à linha que passa pelas fontes e a uma grande distância D das fontes, como mostrado na Figura 16-31. (*a*) Mostre que a diferença de percurso Δs das duas fontes até um ponto sobre a linha a um ângulo θ é dada, aproximadamente, por $\Delta s \approx d$ sen θ. *Dica: Suponha $D \gg d$, de modo que as linhas das fontes até P sejam aproximadamente paralelas* (Figura 16-31*b*). (*b*) Mostre que as duas ondas interferem construtivamente em P se $\Delta s = m\lambda$, onde $m = 0, 1, 2, \ldots$. (Isto é, mostre que existe um máximo de interferência em P se $\Delta s = m\lambda$, onde $m = 0, 1, 2, \ldots$.) (*c*) Mostre que a distância y_m do máximo central (em $y = 0$) ao m-ésimo máximo de interferência em P é dada por $y_m = D \tan \theta_m$, onde d sen $\theta_m = m\lambda$.

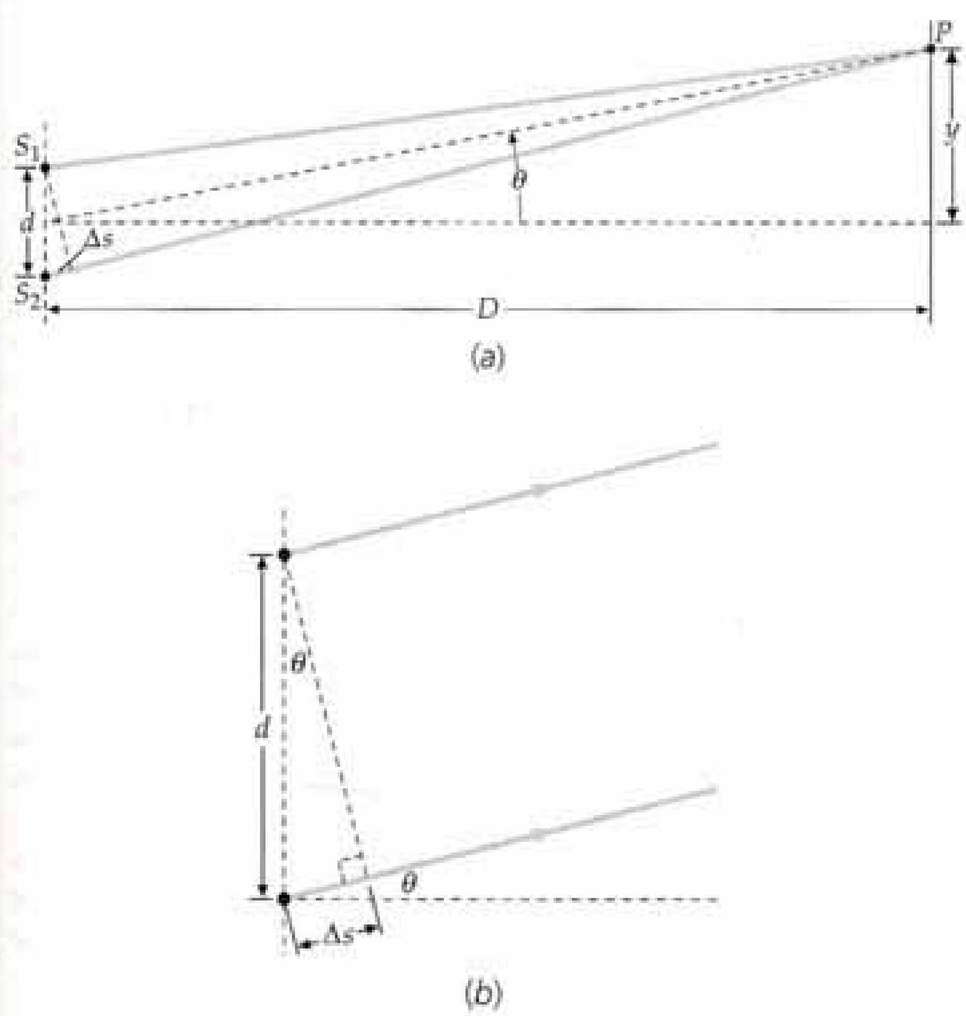


FIGURA 16-31 Problema 36

37 •• Duas fontes sonoras, irradiando em fase a uma freqüência de 480 Hz, interferem de forma que os máximos são ouvidos a ângulos de 0° e de 23° com uma linha perpendicular àquela que liga as duas fontes. Um ouvinte está a uma grande distância da linha que une as fontes, e não há máximos adicionais ouvidos para ângulos na faixa $0° < \theta < 23°$. Determine a separação d entre as duas fontes, e quaisquer outros ângulos para os quais serão ouvidos máximos de intensidade. (Use o resultado do Problema 36.)

38 •• Dois alto-falantes são colocados em fase por um amplificador de áudio a uma freqüência de 600 Hz. Os alto-falantes estão no eixo y, um em $y = +1{,}00$ m e o outro em $y = -1{,}00$ m. Uma ouvinte, partindo de $(x, y) = (D, 0)$, onde $D \gg 2{,}00$ m, caminha no sentido $+y$ ao longo da linha $x = D$. (Veja o Problema 36.) (*a*) Para qual ângulo θ ela ouvirá pela primeira vez um mínimo de intensidade sonora? (θ é o ângulo entre o eixo x positivo e a linha que liga a origem à ouvinte.) (*b*) Para qual ângulo θ ela ouvirá pela primeira vez um máximo de intensidade sonora (após $\theta = 0$)? (*c*) Quantos máximos ela poderá ouvir se continuar caminhando no mesmo sentido?

39 ••• Duas fontes sonoras, colocados em fase por um mesmo amplificador estão afastadas de 2,00 m sobre o eixo y, uma em $y = +1{,}00$ m e a outra em $y = -1{,}00$ m. Em pontos muito afastados do eixo y ouve-se interferência construtiva para os ângulos $\theta_0 = 0{,}000$ rad, $\theta_1 = 0{,}140$ rad e $\theta_2 = 0{,}283$ rad, com o eixo x, e para nenhum outro ângulo entre esses (veja a Figura 16-31). (*a*) Qual é o comprimento de onda das ondas sonoras emitidas pelas fontes? (*b*) Qual é a freqüência das fontes? (*c*) Para que outros ângulos é ouvida interferência construtiva? (*d*) Qual é o menor ângulo para o qual as ondas sonoras se cancelam?

40 ••• As duas fontes sonoras do Problema 39 estão, agora, defasadas de 90°, mas com a mesma freqüência do Problema 39. Para que ângulos são ouvidas interferência construtiva e interferência destrutiva?

41 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um radiotelescópio astronômico consiste em duas antenas separadas de uma distância de 200 m. As duas antenas estão sintonizadas na freqüência de 20 MHz. Os sinais de cada antena são enviados para um amplificador comum, mas um deles passa, primeiro, por um seletor de fases que retarda sua fase de uma certa quantidade, de modo que o telescópio possa "olhar" em diferentes direções (Figura 16-32). Quando a defasagem é zero, ondas planas de rádio, que incidem verticalmente sobre a antena, produzem sinais que se somam construtivamente no amplificador. Qual deve ser a defasagem para que os sinais provenientes de um ângulo $\theta = 10°$ com a vertical (no plano formado pela vertical e pela linha que liga as antenas) se somem construtivamente no amplificador? *Dica: Ondas de rádio viajam a $3{,}00 \times 10^8$ m/s.*

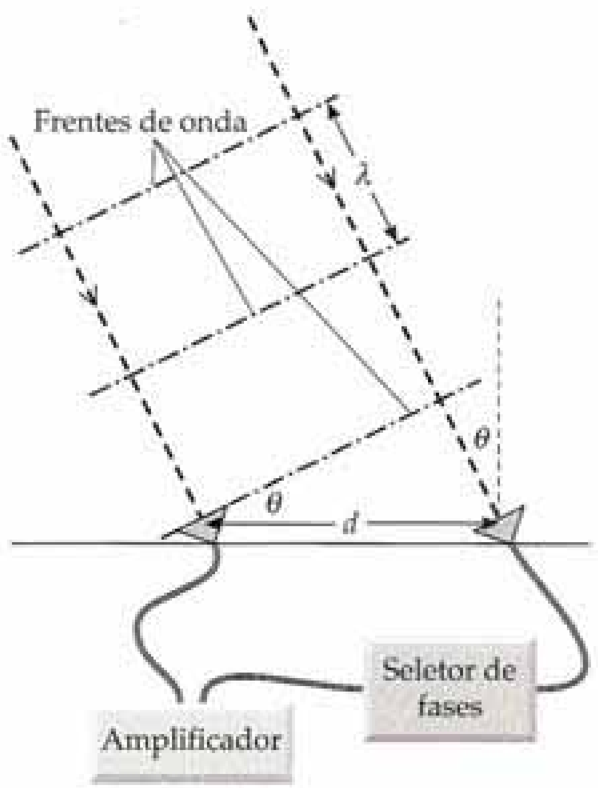


FIGURA 16-32 Problema 41

BATIMENTOS

42 • Quando dois diapasões são tocados simultaneamente, 4,0 batimentos por segundo são ouvidos. A freqüência de um diapasão é 500 Hz. (*a*) Quais são os possíveis valores para a freqüência do outro diapasão? (*b*) Um pedaço de cera é colocado no diapasão de 500 Hz para baixar ligeiramente sua freqüência. Explique como a medida de uma nova freqüência de batimento pode ser usada para determinar qual das suas respostas da Parte (*a*) é a freqüência correta do segundo diapasão.

43 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um radar de polícia, estacionário, emite microondas a 5,00 GHz. Quando ele é apontado para um carro, ele sobrepõe as ondas transmitida e refletida. Como as freqüências destas duas ondas são diferentes, batimentos são gerados, com a rapidez do carro sendo proporcional à freqüência de batimento. A rapidez do carro, 83 mi/h, aparece no visor do aparelho de radar. Supondo que o carro esteja se movendo ao longo da linha de visada do policial e usando as equações do efeito Doppler, (*a*) mostre que, para uma freqüência de radar constante, a freqüência de batimento é proporcional à rapidez do carro. *Dica: A rapidez do carro é muito pequena em comparação com a rapidez da luz.* (*b*) Qual é a freqüência de batimento, neste caso? (*c*) Qual é o fator de calibração para este aparelho? Isto é, qual é a freqüência de batimento gerada por mi/h de rapidez?

ONDAS ESTACIONÁRIAS

44 • Uma corda, presa pelas duas extremidades, tem 3,00 de comprimento. Ela ressoa em seu segundo harmônico com uma freqüência de 60,0 Hz. Qual é a rapidez de ondas transversais na corda?

45 • Uma corda, de 3,00 m de comprimento e fixa nas duas pontas, está vibrando em seu terceiro harmônico. O deslocamento máximo de qualquer ponto da corda é 4,00 mm. A rapidez de ondas transversais nesta corda é 50,0 m/s. (*a*) Quais são o comprimento de onda e a freqüência desta onda estacionária? (*b*) Escreva a função de onda para esta onda estacionária.

46 • Calcule a freqüência fundamental de um tubo de órgão com 10 m de comprimento efetivo que seja (*a*) aberto nas duas extremidades e (*b*) fechado em uma extremidade.

47 • Um fio flexível, de 5,00 g e 1,40 m de comprimento, sofre uma tração de 968 N e está fixo nas duas extremidades. (*a*) Determine a rapidez de ondas transversais no fio. (*b*) Determine o comprimento de onda e a freqüência do modo fundamental. (*c*) Determine as freqüências dos segundo e terceiro harmônicos.

48 • Uma corda esticada, de 4,00 m de comprimento, tem uma extremidade fixa e a outra livre. (A extremidade livre é presa a um cordão longo e leve.) A rapidez de ondas na corda é 20,0 m/s. (*a*) Determine a freqüência do modo fundamental. (*b*) Determine o segundo harmônico. (*c*) Determine o terceiro harmônico.

49 • Uma corda de piano, de aço, tem uma freqüência fundamental de 200 Hz. Quando entrelaçada com um fio de cobre, sua massa específica linear é dobrada. Qual é a sua nova freqüência fundamental, supondo a mesma tração?

50 • Qual é o maior comprimento que um tubo de órgão pode ter, para que sua nota fundamental esteja na faixa audível (20 a 20.000 Hz) se (*a*) o tubo é fechado em uma extremidade e (*b*) ele é aberto nas duas extremidades?

51 •• A função de onda $y(x, t)$ para determinada onda estacionária em uma corda fixa nas duas extremidades é dada por $y(x, t) = 4{,}20\ \mathrm{sen}(0{,}200\ x) \cos(300\ t)$, onde y e x estão em centímetros e t está em segundos. Uma onda estacionária pode ser considerada como a superposição de duas ondas progressivas. (*a*) Quais são o comprimento de onda e a freqüência das duas ondas progressivas que formam a onda estacionária aqui especificada? (*b*) Qual é a rapidez destas ondas na corda? (*c*) Se a corda está vibrando em seu quarto harmônico, qual é o seu comprimento?

52 •• A função de onda $y(x, t)$ para determinada onda estacionária em uma corda fixa nas duas extremidades é dada por $y(x, t) = (0{,}0500\ \mathrm{m})\ \mathrm{sen}(2{,}50\ \mathrm{m}^{-1}\ x) \cos(500\ \mathrm{s}^{-1}\ t)$. Uma onda estacionária pode ser considerada como a superposição de duas ondas progressivas. (*a*) Quais são a rapidez e a amplitude de cada uma das ondas progressivas que formam a onda estacionária aqui especificada? (*b*) Qual é a distância entre nós sucessivos na corda? (*c*) Qual é o menor comprimento possível para a corda?

53 •• Um tubo de 1,20 m de comprimento está fechado em uma das extremidades. Perto da extremidade aberta há um alto-falante alimentado por um oscilador de áudio cuja freqüência pode ser variada de 10,0 a 5000 Hz. (Despreze possíveis correções de borda.) (*a*) Qual é a freqüência mais baixa do oscilador que produzirá ressonância dentro do tubo? (*b*) Qual é a freqüência mais alta do oscilador que produzirá ressonância dentro do tubo? (*c*) Quantas freqüências diferentes do oscilador produzirão ressonância dentro do tubo?

54 •• Um diapasão, de 460 Hz, provoca ressonância no tubo desenhado na Figura 16-33 quando o comprimento L da coluna de ar sobre a água é de 18,3 cm e de 55,8 cm. (*a*) Determine a rapidez do som no ar. (*b*) Qual é a correção de borda necessária para levar em conta que o antinó não ocorre exatamente na extremidade aberta do tubo?

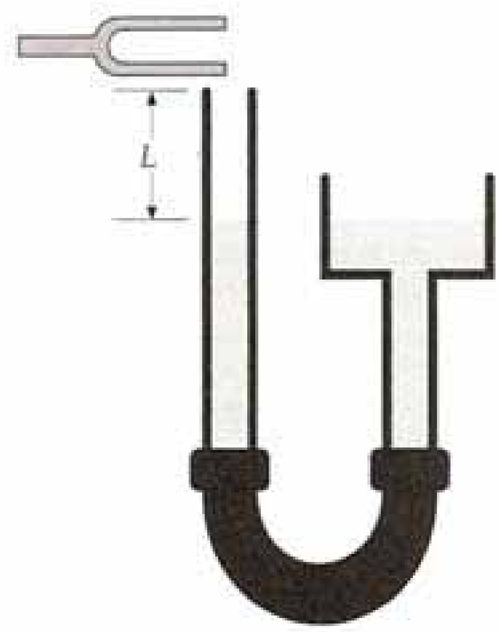


FIGURA 16-33
Problema 54

55 •• Um tubo de órgão tem uma freqüência fundamental de 440,0 Hz a 16,00°C. Qual será a freqüência fundamental do tubo se a temperatura aumentar para 32,00°C (supondo o comprimento do tubo mantido constante)? É melhor construir tubos de órgão de um material que se expanda substancialmente com o aumento da temperatura, ou é melhor construir os tubos de material que mantenha o mesmo comprimento nas temperaturas normais?

56 •• De acordo com a teoria, a correção de borda para um tubo é aproximadamente $\Delta L = 0{,}3186D$, onde D é o diâmetro do tubo. Determine o comprimento real de um tubo, aberto nas duas extremidades, que produz um dó central (256 Hz) como modo fundamental para tubos de diâmetros $D = 1{,}00$ cm, 10,0 cm e 30,0 cm.

57 •• Seja uma corda de violino de 40,0 cm de comprimento com 1,20 g de massa, vibrando em seu modo fundamental* com a freqüência de 500 Hz. (*a*) Qual é o comprimento de onda da onda estacionária nesta corda? (*b*) Qual é a tração na corda? (*c*) Onde você deve apertar a corda para aumentar a freqüência fundamental para 650 Hz?

58 •• A corda sol de um violino tem 30,0 cm de comprimento. Quando tocada só com o arco, ela vibra em seu modo fundamental* com uma freqüência de 196 Hz. As notas mais altas seguintes, em sua escala de dó central, são o lá (220 Hz), o si (247 Hz), o dó (262 Hz) e o ré (294 Hz). A que distância da extremidade da corda deve ser colocado um dedo para que cada uma dessas notas seja tocada?

59 •• Uma corda tem uma massa específica linear de $4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m e está sob a tração de 360 N, com as duas extremidades fixas. Uma de suas freqüências de ressonância é 375 Hz. A freqüência de ressonância seguinte é 450 Hz. (*a*) Qual é a freqüência fundamental desta corda? (*b*) Quais harmônicos possuem as freqüências informadas? (*c*) Qual é o comprimento da corda?

* Uma corda de violino ao ser tocada não vibra em um único modo. Logo, as condições descritas no enunciado deste problema não são perfeitamente corretas.

60 •• Uma corda, presa nas duas extremidades, possui ressonâncias sucessivas com comprimentos de onda de 0,54 m para o n-ésimo harmônico e de 0,48 m para o $(n + 1)$-ésimo harmônico. (*a*) Que harmônicos são estes? (*b*) Qual é o comprimento da corda?

61 •• As cordas de um violino estão afinadas para as notas sol, ré, lá e mi, formando quintas sucessivas. Isto é, $f(\text{ré}) = 1{,}5f(\text{sol})$, $f(\text{lá}) = 1{,}5f(\text{ré}) = 440$ Hz e $f(\text{mi}) = 1{,}5f(\text{lá})$. A distância entre o cavalete da voluta e o cavalete do corpo do instrumento, os dois pontos fixos de cada corda, é 30,0 cm. A tração sobre a corda mi é de 90,0 N. (*a*) Qual é a massa específica linear da corda mi? (*b*) Para evitar distorções do instrumento ao longo do tempo, é importante que a tração em todas as cordas seja a mesma. Determine as massas específicas lineares das outras cordas.

62 •• Em um violoncelo, como na maioria dos instrumentos de corda, o posicionamento dos dedos pelo instrumentista determina as freqüências fundamentais das cordas. Suponha que uma das cordas em um violoncelo esteja afinada para tocar um dó central (262 Hz) quando tocada em todo o seu comprimento. Qual é a fração desta corda que deve ser encurtada para tocar um mi (330 Hz)? E um sol (392 Hz)?

63 •• Para afinar um violino, primeiro você deve afinar a corda lá para a freqüência correta de 440 Hz, e depois você toca, simultaneamente, esta e uma outra corda, e escuta os batimentos. Enquanto tocando as cordas lá e mi, você escuta uma freqüência de batimento de 3,00 Hz e repara que a freqüência de batimento aumenta se a tração na corda mi é aumentada. (A corda mi deve ser afinada em 660 Hz.) (*a*) Por que são produzidos batimentos quando estas duas cordas são tocadas simultaneamente? (*b*) Qual é a freqüência de vibração da corda mi quando a freqüência de batimento é de 3,00 Hz?

64 •• Uma corda de 2,00 m de comprimento, fixa em uma das extremidades e livre na outra (a extremidade livre está ligada a um cordão longo e leve), vibra em seu terceiro harmônico com uma amplitude máxima de 3,00 cm e uma freqüência de 100 Hz. (*a*) Escreva a função de onda para esta vibração. (*b*) Escreva uma função para a energia cinética de um segmento da corda de comprimento dx, em um ponto distante x da extremidade fixa, como função do tempo t. Em que tempos esta energia cinética é máxima? Qual é o formato da corda nesses tempos? (*c*) Determine a energia cinética máxima da corda, integrando sua expressão da Parte (*b*) sobre o comprimento total da corda.

65 •• **RICO EM CONTEXTO** Um experimento comum de física, que trata de ressonâncias de ondas transversais em uma corda, é mostrado na Figura 16-34. Um peso é preso a uma extremidade de uma corda que passa por uma polia; a outra extremidade da corda é presa a um oscilador mecânico que se move, para cima e para baixo, com uma freqüência f que permanece fixa durante a demonstração. O comprimento L entre o oscilador e a polia é fixo, e a tração é igual à força gravitacional sobre o peso. Para certos valores de tração, a corda ressoa. Suponha que a corda nem seja distendida e nem comprimida, quando a tração varia. (*a*) Explique por que apenas certos valores discretos da tração resultam em ondas estacionárias na corda. (*b*) Você precisa aumentar ou diminuir a tensão para produzir uma onda estacionária com um antinó a mais? Explique. (*c*) Prove seu raciocínio da Parte (*b*), mostrando que os valores de tração F_{T_n} para o n-ésimo modo de onda estacionária são dados por $F_{T_n} = 4L^2f^2\mu/n^2$, e assim F_{T_n} é inversamente proporcional a n^2. (*d*) Faça $L = 1{,}00$ m, $f = 80{,}0$ Hz e $\mu = 0{,}750$ g/m. Calcule a tração necessária para produzir cada um dos três primeiros modos (ondas estacionárias) na corda.

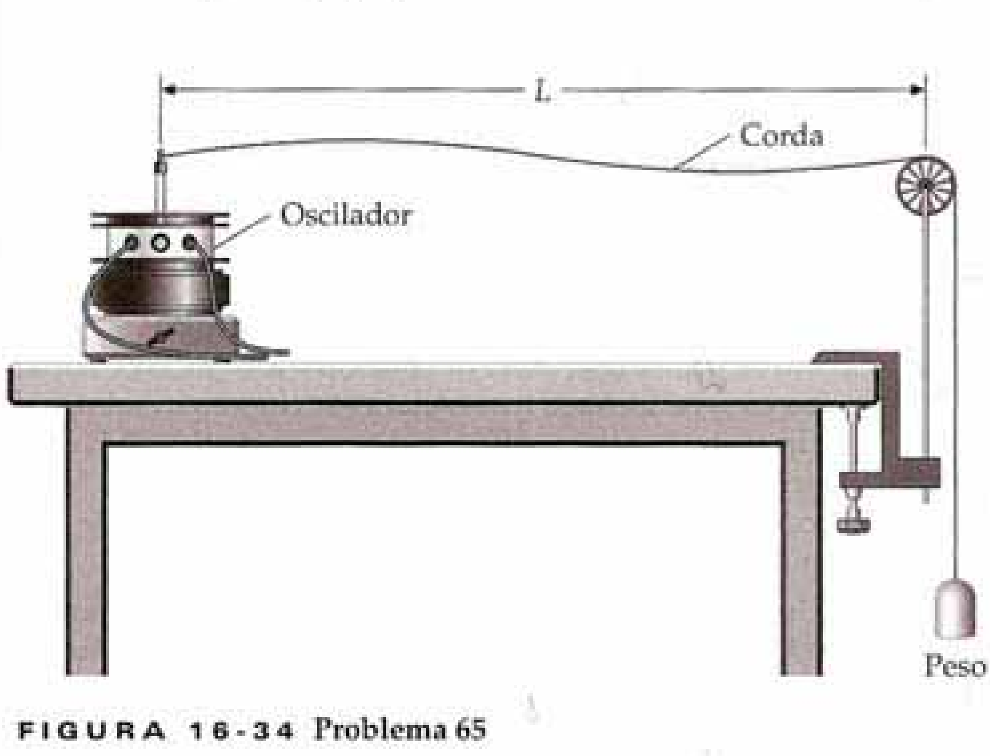


FIGURA 16-34 Problema 65

*ANÁLISE HARMÔNICA

66 • Uma corda de violão é puxada pelo seu ponto médio. Um microfone em seu computador detecta o som e um programa do computador determina que a maior parte do som subseqüente consiste em um tom de 100 Hz acompanhado de um bit de som com 300 Hz de tom. Quais são os dois modos de ondas estacionárias dominantes na corda?

*PACOTES DE ONDA

67 •• Um diapasão, com freqüência natural f_0, começa a vibrar no tempo $t = 0$ e é parado após um intervalo de tempo Δt. A forma de onda do som, em algum tempo posterior, é mostrada (Figura 16-35) como função de x. Seja N uma estimativa do número de ciclos desta forma de onda. (*a*) Se Δx é o comprimento espacial deste pacote de ondas, qual é a faixa de números de onda Δk do pacote? (*b*) Estime o comprimento de onda médio λ em termos de N e de Δx. (*c*) Estime o número de onda médio k em termos de N e de Δx. (*d*) Se Δt é o tempo que leva para o pacote de ondas passar por um ponto no espaço, qual é a faixa de freqüências angulares $\Delta\omega$ do pacote? (*e*) Expresse f_0 em termos de N e de Δt. (*f*) O número N é incerto em cerca de ± 1 ciclo. Use a Figura 16-35 para explicar por quê. (*g*) Mostre que a incerteza no comprimento de onda, devida à incerteza em N, é de $2\pi/\Delta x$.

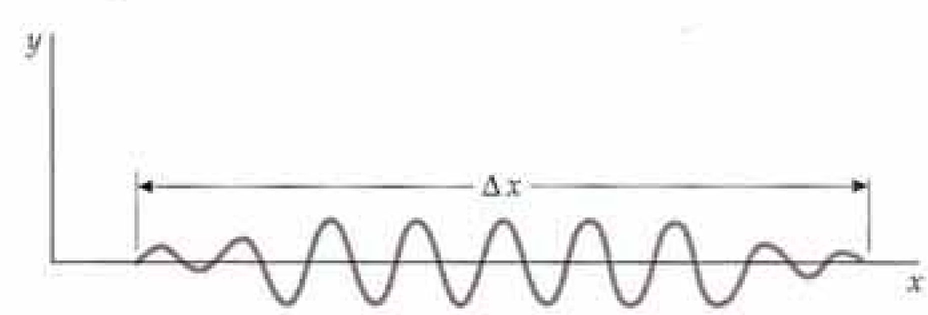


FIGURA 16-35 Problema 67

PROBLEMAS GERAIS

68 •• Uma corda de 35 m de comprimento possui uma massa específica linear de 0,0085 kg/m e sofre uma tração de 18 N. Determine as freqüências dos quatro primeiros harmônicos (*a*) se a corda está fixa nas duas extremidades e (*b*) se a corda está fixa em uma extremidade e livre na outra. (Isto é, se a extremidade livre está ligada a um cordão longo de massa desprezível.)

69 •• **RICO EM CONTEXTO, APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Trabalhando para uma pequena mineradora de ouro, você se depara com um túnel de uma mina abandonada que, devido ao desmoronamento das escoras de madeira, parece muito perigoso para ser pessoalmente explorado. Para medir sua profundidade, você emprega um oscilador de áudio de freqüência variável. Você verifica que ressonâncias sucessivas são produzidas nas freqüências de 63,58 e 89,25 Hz. Estime a profundidade do túnel.

70 •• Uma corda de 5,00 m de comprimento, fixa em uma extremidade e ligada a um longo cordão de massa desprezível na outra

extremidade, está vibrando em seu quinto harmônico, que tem uma freqüência de 400 Hz. A amplitude do movimento em cada antinó é de 3,00 cm. (*a*) Qual é o comprimento de onda desta onda? (*b*) Qual é o número de onda? (*c*) Qual é a freqüência angular? (*d*) Escreva a função de onda para esta onda estacionária.

71 •• A função de onda para uma onda estacionária em uma corda é descrita por $y(x, t) = (0{,}020)\ \mathrm{sen}(4\pi x)\cos(60\pi t)$, onde y e x estão em metros e t está em segundos. Determine o deslocamento máximo e a velocidade máxima de um ponto da corda em (*a*) $x = 0{,}10$ m, (*b*) $x = 0{,}25$ m, (*c*) $x = 0{,}30$ m e (*d*) $x = 0{,}50$ m.

72 •• Uma corda de 2,5 m de comprimento, de 0,10 kg de massa, está fixa nas duas extremidades e sofre uma tração de 30 N. Quando o n-ésimo harmônico é excitado, há um nó a 0,50 m de uma das extremidades. (*a*) Quanto vale n? (*b*) Quais são as freqüências dos três primeiros harmônicos desta corda?

73 •• Um tubo de órgão, sob condições normais, tem uma freqüência fundamental de 220 Hz. Ele é colocado em uma atmosfera de hexafluoreto sulfúrico (SF_6), às mesmas temperatura e pressão. A massa molar do ar é $29{,}0 \times 10^{-3}$ kg/mol e a massa molar do SF_6 é 146×10^{-3} kg/mol. Qual é a freqüência fundamental do tubo quando na atmosfera de SF_6?

74 •• Durante uma demonstração em aula sobre ondas estacionárias, uma extremidade de uma corda é presa a um dispositivo que vibra a 60 Hz e produz ondas transversais com essa freqüência na corda. A outra extremidade da corda passa por uma polia e a tração é variada pendurando-se pesos a essa extremidade. A corda tem nós localizados aproximadamente junto ao dispositivo e junto à polia. (*a*) Se a corda tem uma massa específica linear de 8,0 g/m e um comprimento de 2,5 m entre o dispositivo vibrador e a polia, qual deve ser a tração para que a corda vibre em seu modo fundamental? (*b*) Determine a tração necessária para que a corda vibre em seus segundo, terceiro e quarto harmônicos.

75 •• Três freqüências de ressonância sucessivas de um tubo de órgão são 1310, 1834 e 2358 Hz. (*a*) O tubo está fechado em uma das pontas ou aberto nas duas pontas? (*b*) Qual é a freqüência fundamental? (*c*) Qual é o comprimento efetivo do tubo?

76 •• Durante um experimento para estudar a rapidez do som no ar, usando um oscilador de áudio e um tubo aberto em uma ponta e fechado na outra, encontra-se uma particular freqüência de ressonância com nós afastados de cerca de 6,94 cm. A freqüência do oscilador é aumentada e verifica-se que a freqüência de ressonância seguinte tem nós afastados de 5,40 cm. (*a*) Quais são as duas freqüências de ressonância? (*b*) Qual é a freqüência fundamental? (*c*) A que harmônicos correspondem estes dois modos? A rapidez do som é 343 m/s.

77 •• Uma onda estacionária em uma corda é representada pela função de onda $y(x, t) = (0{,}020)\ \mathrm{sen}(\frac{1}{2}\pi x)\cos(40\pi t)$, onde x e y estão em metros e t está em segundos. (*a*) Escreva funções de onda para duas ondas progressivas que, quando superpostas, produzem este padrão estacionário. Em cada caso, contemple o intervalo $-5{,}0\ \mathrm{m} < x < +5{,}0$ m. (*b*) Qual é a distância entre os nós da onda estacionária? (*c*) Qual é a rapidez máxima da corda em $x = 1{,}0$ m? (*d*) Qual é a máxima aceleração da corda em $x = 1{,}0$ m?

78 •• **PLANILHA ELETRÔNICA** Dois pulsos de onda progressivos em uma corda são representados pelas funções de onda

$$y_1(x, t) = \frac{0{,}020}{2{,}0 + (x - 2{,}0t)^2} \qquad \text{e} \qquad y_2(x, t) = \frac{-0{,}020}{2{,}0 + (x + 2{,}0t)^2}$$

onde x está em metros e t está em segundos. (*a*) Usando uma **planilha eletrônica** ou uma **calculadora gráfica**, faça gráficos separados de cada uma das funções de onda como função de x, em $t = 0$ e em $t = 1{,}0$ s, e descreva o comportamento de cada uma com o aumento do tempo. (*b*) Faça um gráfico da função de onda resultante em $t = -1{,}0$ s, em $t = 0{,}0$ s e em $t = 1{,}0$ s.

79 ••• Três ondas, que têm a mesma freqüência, o mesmo comprimento de onda e a mesma amplitude, viajam ao longo do eixo x. As três ondas são descritas pelas seguintes funções de onda: $y_1(x, t) = (5{,}00\ \mathrm{cm})\ \mathrm{sen}(kx - \omega t - \frac{1}{3}\pi)$, $y_2(x, t) = (5{,}00\ \mathrm{cm})\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$ e $y_3(x, t) = (5{,}00\ \mathrm{cm})\ \mathrm{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{3}\pi)$, onde x está em metros e t está em segundos. A função de onda resultante é dada por $y(x, t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$. Quais são os valores de A e de δ?

80 ••• Uma onda de pressão harmônica, produzida por uma fonte distante, tem, na região onde você se encontra, frentes de onda planas e verticais. Faça o sentido $+x$ apontar para o leste e o sentido $+y$ apontar para o norte. A função de onda da onda é $p(x, y, t) = A\cos(k_x x + k_y y - \omega t)$. Mostre que o sentido de movimento da onda forma um ângulo $\theta = \tan^{-1}(k_y/k_x)$ com o sentido $+x$ e que a rapidez da onda é $v = \omega\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

81 •• A rapidez do som no ar é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta T (Equação 15-5). (*a*) Mostre que, se a temperatura do ar varia de uma pequena quantidade, a variação relativa da freqüência fundamental de um tubo de órgão é aproximadamente igual à metade da variação relativa da temperatura absoluta. Isto é, mostre que $\Delta f/f \approx \frac{1}{2}\Delta T/T$, onde f é a freqüência à temperatura absoluta T e Δf é a variação da freqüência quando a temperatura varia de ΔT. (Ignore qualquer variação no comprimento do tubo, por expansão térmica.) (*b*) Seja um tubo de órgão fechado em uma das pontas, com freqüência fundamental de 200,0 Hz à temperatura de 20,00°C. Use o resultado aproximado da Parte (*a*) para determinar a freqüência fundamental do tubo quando a temperatura é 30,00°C. (*c*) Compare seu resultado da Parte (*b*) com o que você obteria com cálculos exatos. (Ignore qualquer variação no comprimento do tubo por expansão térmica.)

82 •• O tubo da Figura 16-36 está cheio de gás natural [metano (CH_4)]. O tubo é pontilhado por uma linha de pequenos furos afastados de 1,00 cm ao longo de todo o seu comprimento de 2,20 m. Um alto-falante fecha uma das extremidades do tubo e um pedaço maciço de metal fecha a outra extremidade. Na fotografia, qual é a freqüência que está sendo produzida? A rapidez do som em metano à baixa pressão e à temperatura ambiente é de cerca de 460 m/s.

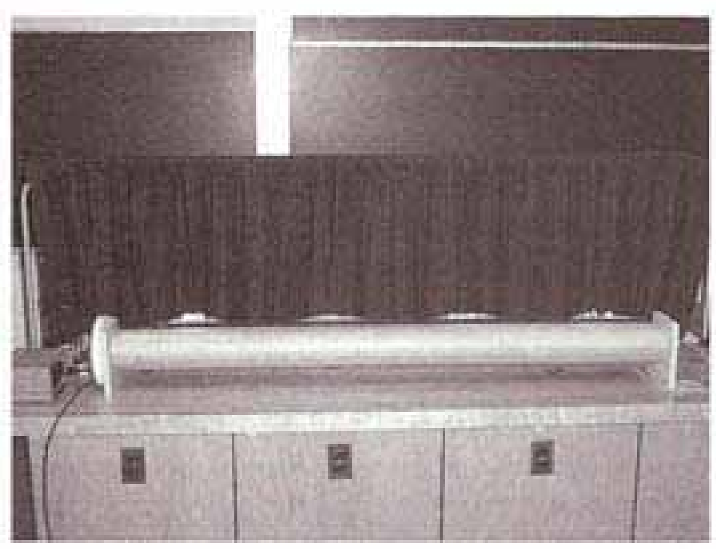


FIGURA 16-36 Problema 82 *(University of Michigan Demonstration Laboratory.)*

83 •• **RICO EM CONTEXTO** Suponha que seu clarinete esteja totalmente cheio de hélio e que, antes de começar a tocá-lo, você encha seus pulmões com hélio. Você toca o clarinete como normalmente faz ao produzir uma nota si de 277 Hz. A freqüência de 277 Hz é a freqüência natural de ressonância deste clarinete com todos os furos tapados pelos dedos e quando cheio de ar. Qual é a freqüência que você realmente ouve?

84 ••• Um fio de 2,00 m de comprimento, fixo nas duas extremidades, está vibrando em seu modo fundamental. A tração no fio é de 40,0 N e a massa do fio é de 0,100 kg. A amplitude no meio do fio é de 2,00 cm. (*a*) Determine a máxima energia cinética do fio. (*b*)

Qual é a energia cinética do fio no instante em que o deslocamento transversal é dado por $y = 0{,}0200\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}x)$, onde y está em metros se x está em metros, para $0{,}00\ \text{m} \le x \le 2{,}00\ \text{m}$? (*c*) Para qual valor de x o valor médio da energia cinética por unidade de comprimento é maior? (*d*) Para qual valor de x a energia potencial elástica por unidade de comprimento tem seu valor máximo?

85 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Em princípio, uma onda com praticamente qualquer forma arbitrária pode ser expressa como uma soma de ondas harmônicas de diferentes freqüências. (*a*) Considere a função definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots\right)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}$$

Escreva um programa de **planilha eletrônica** para calcular esta série usando um número finito de termos, e faça três gráficos da função, na faixa de $x = 0$ a $x = 4\pi$. Para criar o primeiro gráfico, aproxime a soma de $n = 0$ até $n = \infty$ pelo primeiro termo da soma, para cada valor de x que você plotar. Para criar os segundo e terceiro gráficos, use apenas os cinco primeiros termos e os dez primeiros termos, respectivamente. Esta função é, às vezes, chamada de *função quadrada*. (*b*) Diga qual é a relação entre esta função e a série de Leibnitz para π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

86 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Escreva um programa de **planilha eletrônica** para calcular e plotar a função

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,3x}{9} + \frac{\text{sen}\,5x}{25} - \cdots\right)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n}\frac{(-1)^n\,\text{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

para $0 \le x \le 4\pi$. Use apenas os 25 primeiros termos da soma para cada valor de x em seu gráfico.

87 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Se você bater palmas na extremidade de um longo tubo cilíndrico, o eco que você ouvirá não soará como palmas; o que você ouvirá soará como um assovio, no início com uma freqüência muito alta, mas decaindo rapidamente até quase desaparecer. Este "assovio de galeria" pode ser explicado facilmente, se você pensar no som de um bater palmas como uma compressão isolada irradiando a partir das mãos. Os ecos do bater palmas que chegarem aos seus ouvidos terão viajado ao longo de diferentes caminhos dentro do tubo, como mostrado na Figura 16-37. O primeiro eco a chegar terá feito um percurso reto de ida e volta no tubo, enquanto o segundo eco terá refletido uma vez no centro do tubo, tanto na ida quanto na volta, o terceiro eco terá refletido duas vezes em pontos a 1/4 e a 3/4 da distância, e assim por diante. O tom do som que você ouve corresponde à freqüência com que estes ecos chegam aos seus ouvidos. (*a*) Mostre que o tempo que separa o n-ésimo eco do $(n+1)$-ésimo eco é

$$\Delta t_n = \frac{2}{v}\left(\sqrt{(2n)^2r^2 + L^2} - \sqrt{[2(n-1)]^2r^2 + L^2}\right)$$

onde v é a rapidez do som, L é o comprimento do tubo e r é o raio do tubo. (*b*) Usando um programa de **planilha eletrônica** ou uma **calculadora gráfica**, plote Δt_n *versus* n para $L = 90{,}0$ m e $r = 1{,}00$ m. Vá a até pelo menos $n = 100$. (*c*) Com seu gráfico, explique por que a freqüência diminui com o tempo. Quais são as freqüências mais alta e mais baixa que você ouvirá?

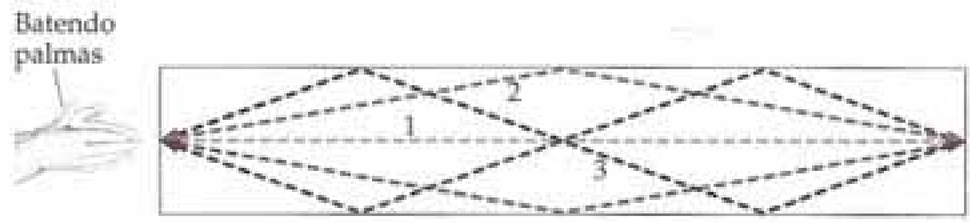


FIGURA 16-37 Problema 87