Ondas — I

16

Sion Touhig/Getty Images News and Sport Services

Bruno Vincent/Reportage/Getty Images, Inc.

Em 2001, uma passarela para pedestres sobre o rio Tâmisa foi inaugurada em Londres para ligar a galeria Tate de arte moderna às vizinhanças da catedral de St. Paul e comemorar a chegada do novo milênio. Entretanto, logo depois que a primeira onda de pedestres começou a caminhar sobre ela, a Ponte do Milênio, como é chamada, começou a oscilar de tal forma que muitos pedestres tiveram dificuldade para se manter de pé. Oscilações semelhantes podem acontecer em uma pista de dança com piso de madeira, especialmente se os participantes estiverem pulando.

O que provoca as oscilações, às vezes perigosas, de passarelas e pistas de dança?

A resposta está neste capítulo.

16-1 O QUE É FÍSICA?

As ondas são um dos principais assuntos da física. Para se ter uma idéia da importância das ondas no mundo moderno basta considerar a indústria musical. Cada peça musical que escutamos, de uma roda de choro ao mais sofisticado concerto sinfônico, depende da produção de ondas pelos artistas e da capacidade da platéia de detectar essas ondas. Entre a produção e a detecção a informação contida nas ondas pode ser transmitida (como no caso de uma apresentação ao vivo pela Internet) ou gravada e reproduzida (através de CDs, DVDs ou outros meios atualmente em desenvolvimento nos centros de pesquisa). A importância econômica do controle de ondas musicais é enorme, e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas de controle pode ser muito generosa.

Neste capítulo vamos discutir as ondas que se propagam em uma corda esticada, como a de um violão. O próximo capítulo trata das ondas sonoras, como as produzidas por uma corda de violão. Antes, porém, vamos classificar as inúmeras ondas que estão presentes em nosso dia-a-dia em alguns tipos básicos.

16-2 | Tipos de Ondas

As ondas podem ser de três tipos principais:

1. ***Ondas mecânicas.*** Essas ondas são as mais familiares porque as encontramos constantemente. Entre elas estão as ondas do mar, as ondas sonoras e as ondas sísmicas. Todas essas ondas possuem duas características: são governadas pelas leis de Newton e existem apenas em um meio material, como a água, o ar ou as rochas.
2. ***Ondas eletromagnéticas.*** Essas ondas podem ser menos familiares, mas estão entre as mais usadas; exemplos importantes são a luz visível, a luz ultravioleta, as ondas de rádio e de televisão, as microondas, os raios X e as ondas de radar. Estas ondas não precisam de um meio material para existir. As ondas luminosas provenientes das estrelas, por exemplo, atravessam o vácuo do espaço para chegar até nós. Todas as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a mesma velocidade $c = 299\,792\,458$ m/s.
3. ***Ondas de matéria.*** Embora essas ondas sejam usadas nos laboratórios, provavelmente o leitor não está familiarizado com elas. Estão associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo a átomos e moléculas. Elas são chamadas de ondas de matéria porque normalmente pensamos nessas partículas como elementos básicos da matéria.

Muito do que discutimos neste capítulo se aplica a ondas de todos os tipos. Nos exemplos, porém, vamos usar apenas ondas mecânicas.

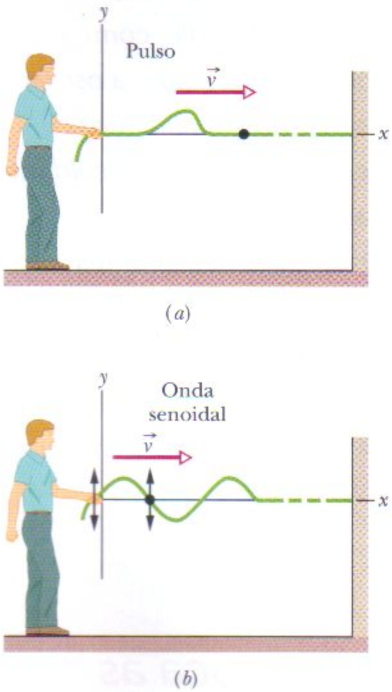


FIG. 16-1 (*a*) Um pulso isolado é produzido em uma corda esticada. Um elemento típico da corda (assinalado com um ponto) se desloca para cima e depois para baixo quando o pulso passa por ele. Como o movimento do elemento é perpendicular à direção de propagação da onda, o pulso é uma *onda transversal*. (*b*) Uma onda senoidal é produzida na corda. Um elemento típico da corda se move para cima e para baixo com a passagem da onda. Esta também é uma onda transversal.

16-3 | Ondas Transversais e Longitudinais

Uma onda que se propaga em uma corda esticada é a mais simples das ondas mecânicas. Quando damos uma sacudidela na ponta de uma corda esticada uma onda com a forma de um *pulso* se propaga ao longo da corda, como na Fig. 16-1*a*. Este pulso e o seu movimento podem ocorrer porque a corda está sob tensão. Quando você puxa a extremidade da corda para cima ela puxa para cima a parte vizinha da corda através da tensão que existe entre as duas partes. Quando a parte vizinha se move para cima puxa para cima a parte seguinte da corda, e assim por diante. Enquanto isso, você puxou para baixo a extremidade da corda. Enquanto as outras partes da corda estão se deslocando para cima começam a ser puxadas de volta para baixo pelas partes vizinhas, que já se encontram em movimento descendente. O resultado geral é que a distorção da forma da corda (o pulso) se propaga ao longo da corda com uma certa velocidade $\vec{v}$.

Se você desloca a mão para cima e para baixo continuamente, em um movimento harmônico simples, uma onda contínua se propaga ao longo da corda com velocidade $\vec{v}$. Como o movimento da sua mão é uma função senoidal do tempo, a onda tem uma forma senoidal em qualquer instante, como na Fig. 16-1*b*, ou seja, a onda possui a forma da curva seno ou co-seno.

No momento, vamos considerar apenas o caso de uma corda "ideal", na qual não existem forças de atrito para reduzir a amplitude da onda enquanto ela se propaga. Além disso, vamos supor que a corda é tão comprida que não é preciso considerar o retorno da onda depois de atingir a outra extremidade.

Um modo de estudar a onda da Fig. 16-1 é examinar a **forma de onda**, ou seja, a forma assumida pela corda em um dado instante. Outro modo consiste em observar o movimento de um elemento da corda enquanto oscila para cima e para baixo por causa da passagem da onda. Usando o segundo método, constatamos que o deslocamento dos elementos da corda é sempre *perpendicular* à direção de propagação da onda, como mostra a Fig. 16-1*b*. Este movimento é chamado de **transversal**, e dizemos que a onda que se propaga em uma corda é uma **onda transversal**.

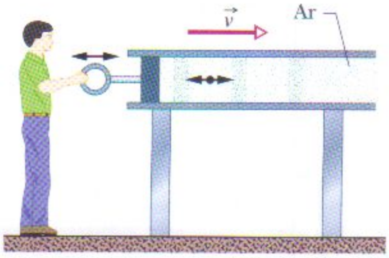


FIG. 16-2 Uma onda sonora é produzida, em um tubo cheio de ar, movendo o êmbolo para a frente e para trás. Como as oscilações de um elemento de ar (representado pelo ponto) são paralelas à direção de propagação da onda, ela é uma *onda longitudinal*.

A Fig. 16-2 mostra como uma onda sonora pode ser produzida por um êmbolo em um tubo com ar. Se você desloca o êmbolo bruscamente para a direita e depois para a esquerda, envia um pulso sonoro ao longo do tubo. O movimento do êmbolo para a direita empurra as moléculas do ar para a direita, aumentando a pressão do ar nessa região. O aumento da pressão do ar empurra as moléculas vizinhas para a direita, e assim por diante. O movimento do êmbolo para a esquerda reduz a pressão do ar nessa região. A redução da pressão do ar puxa as moléculas vizinhas para a esquerda, e assim por diante. O movimento do ar e as variações da pressão do ar se propagam para a direita ao longo do tubo na forma de um pulso.

Se você desloca o êmbolo para a frente e para trás em um movimento harmônico simples, como na Fig. 16-2, uma onda senoidal se propaga ao longo do tubo. Como o movimento das moléculas de ar é paralelo à direção de propagação da onda, este movimento é chamado de **longitudinal**, e dizemos que a onda que se propaga no ar é uma **onda longitudinal**. Neste capítulo vamos estudar as ondas transversais, principalmente as ondas em cordas; no Capítulo 17 vamos estudar as ondas longitudinais, principalmente as ondas sonoras.

Tanto as ondas transversais como as ondas longitudinais são chamadas de **ondas progressivas** quando se propagam de um lugar a outro, como no caso das ondas na corda da Fig. 16-1 e no tubo da Fig. 16-2. Observe que é a onda que se propaga, e não o meio material (corda ou ar) no qual a onda se move.

Exemplo 16-1

As ondas sísmicas são ondas que se propagam tanto no interior como na superfície da Terra. As estações sismológicas são montadas principalmente para registrar as ondas sísmicas geradas por terremotos, mas registram também as ondas sísmicas geradas por qualquer grande liberação de energia nas proximidades da superfície da Terra, como a produzida por uma explosão. Quando ondas sísmicas passam por uma estação fazem a pena de um registrador oscilar, desenhando um gráfico correspondente. A Fig. 16-3*a* mostra um dos registros das ondas sísmicas produzidas pelo misterioso acidente ocorrido com o submarino russo *Kursk* em agosto de 2000. As primeiras oscilações da pena estão assinaladas por uma seta, e foram de pequena amplitude. Oscilações muito mais fortes começaram cerca de 134 s depois.

A partir de registros como esse, os analistas concluíram que as primeiras ondas sísmicas foram geradas por uma explosão a bordo, possivelmente de um torpedo que não chegou a ser lançado por causa de algum defeito no sistema de propulsão. A explosão provavelmente abriu uma fenda no casco, provocou um incêndio e fez o submarino afundar. As ondas sísmicas posteriores, muito mais fortes, foram geradas depois que o submarino afundou e foram possivelmente geradas quando o incêndio provocou a explosão simultânea de vários mísseis. Essas ondas mais fortes chegaram às estações sismológicas como pulsos separados por um intervalo de tempo Δt de cerca de 0,11 s. Qual era a profundidade D do local onde o submarino afundou?

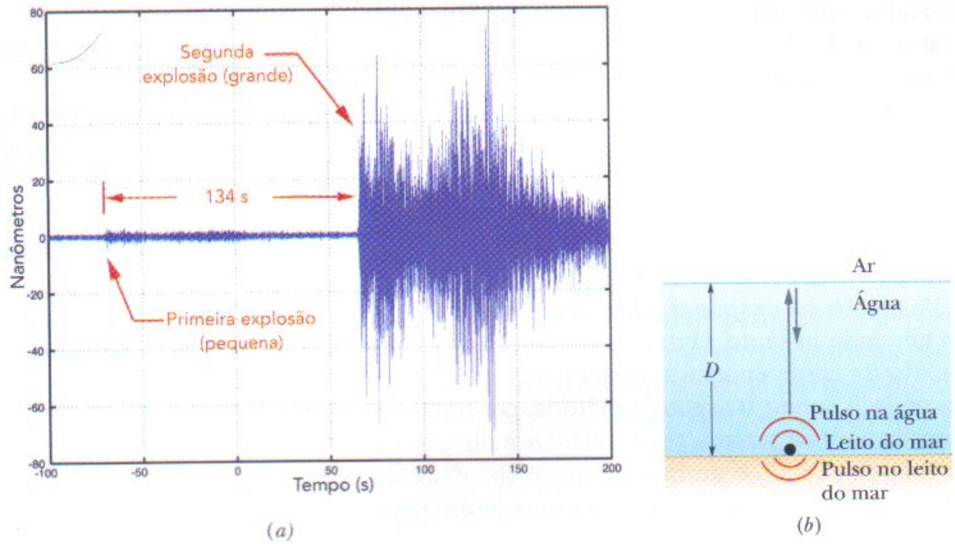


FIG. 16-3 (*a*) Gráfico produzido por um sismógrafo quando as ondas de choque provenientes do *Kursk* passaram pelo aparelho. A amplitude está registrada verticalmente; o tempo aumenta para a direita. (*Cortesia de Jay Pulli/BBN Technologies*) (*b*) Com o submarino parado a uma profundidade *D*, a grande explosão produziu pulsos no fundo do mar e na água.

IDÉIA-CHAVE A velocidade de uma onda é igual à distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

Cálculos: Vamos supor que a explosão mais forte ocorreu depois que o *Kursk* chegou ao fundo. A explosão produziu um pulso no leito do mar e um pulso na água, que se propagou para cima (Fig. 16-3*b*). O pulso que se propagou na água "ricocheteou" várias vezes entre a superfície da água e o fundo do mar. Cada vez que chegava ao fundo produzia outro pulso no leito do mar, e as estações sismológicas detectaram esses pulsos em seqüência. Assim, o intervalo de tempo Δt entre a detecção de dois pulsos consecutivos pelas estações sismológicas é igual ao tempo que o pulso levou para se propagar na água do fundo até a superfície e ser refletido de volta ao fundo. De acordo com a Eq. 2-2 ($v_{\text{méd}} = \Delta x/\Delta t$), podemos relacionar a velocidade v do pulso na água à distância de ida e volta $2D$ e ao tempo de ida e volta Δt:

$$v = \frac{2D}{\Delta t},$$

ou

$$D = \frac{v\Delta t}{2}. \tag{16-1}$$

As ondas se propagam na água com uma velocidade da ordem de 1500 m/s. Substituindo este valor e fazendo Δt = 0,11 s na Eq. 16-1, calculamos que de acordo com os dados sísmicos o Kursk estava a uma profundidade de aproximadamente

$$D = \frac{(1500 \text{ m/s})(0{,}11 \text{ s})}{2}$$

$$= 82{,}5 \text{ m} \approx 83 \text{ m} \qquad \text{(Resposta)}$$

quando ocorreram as explosões principais.

Na verdade, os destroços do submarino foram encontrados a uma profundidade de 115 m.

16-4 | Comprimento de Onda e Freqüência

Para descrever perfeitamente uma onda em uma corda (e o movimento de qualquer elemento da corda), precisamos de uma função que forneça a forma da onda. Isso significa que necessitamos de uma relação da forma $y = h(x, t)$, onde y é o deslocamento transversal de um elemento da corda e h é uma função do tempo t e da posição x do elemento na corda. Toda forma senoidal como a da onda na Fig. 16-1*b* pode ser descrita tomando h como uma função seno ou uma função co-seno; ambas fornecem a mesma forma para a onda. Neste capítulo, vamos usar a função seno.

Imagine uma onda senoidal como a da Fig. 16-1*b* se propagando no sentido positivo de um eixo x. Quando a onda passa por elementos sucessivos (ou seja, por partes muito pequenas) da corda os elementos oscilam paralelamente ao eixo y. Em um certo instante t o deslocamento y do elemento da corda situado na posição x é dado por

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{16-2}$$

Como esta equação está escrita em termos da posição x, ela pode ser usada para calcular os deslocamentos de todos os elementos da corda em função do tempo. Assim, pode nos dizer qual é a forma da onda em qualquer instante de tempo e como esta forma varia quando a onda se move ao longo da corda.

Os nomes das grandezas da Eq. 16-2 são mostrados e definidos na Fig. 16-4. Antes de discuti-los, porém, vamos examinar a Fig. 16-5, que mostra cinco "instantâneos" de uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo x. O movimento da onda está indicado pelo deslocamento para a direita da seta que aponta para um dos picos positivos da onda. De instantâneo para instantâneo a seta se move para a direita juntamente com a forma da onda, mas a corda se move *apenas* paralelamente ao eixo y. Para confirmar este fato vamos acompanhar o movimento do elemento vermelho da corda em $x = 0$. No primeiro instantâneo (Fig. 16-5*a*) esse elemento está com um deslocamento $y = 0$. No instantâneo seguinte ele está com seu deslocamento extremo para baixo, porque um *vale* (ou máximo negativo) da onda está passando por ele. Em seguida, sobe de novo para $y = 0$. No quarto instantâneo está em seu deslocamento extremo para cima porque um *pico* (ou máximo positivo) da onda está passando por ele. No quinto instantâneo está novamente em $y = 0$, tendo completado um ciclo de oscilação.

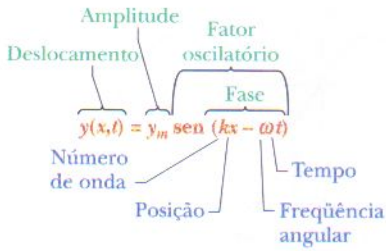


FIG. 16-4 Nomes das grandezas da Eq. 16-2, para uma onda senoidal transversal.

Amplitude e Fase

A **amplitude** y_m de uma onda como a Fig. 16-5 é o módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir da posição de equilíbrio quando a onda passa por eles. (O índice m significa máximo.) Como y_m é um módulo, é sempre uma grandeza positiva, mesmo que seja medido para baixo e não para cima, como na Fig. 16-5*a*.

A **fase** da onda é o *argumento* $kx - \omega t$ do seno da Eq. 16-2. Quando a onda passa por um elemento da corda em uma certa posição x a fase varia linearmente com o tempo t. Isso significa que o seno também varia, oscilando entre $+1$ e -1. O valor extremo positivo $(+1)$ corresponde à passagem pelo elemento de pico da onda; nesse instante, o valor de y na posição x é y_m. O valor extremo negativo (-1) corresponde à passagem pelo elemento de um vale da onda; nesse instante, o valor de y na posição x é $-y_m$. Assim, a função seno e a variação com o tempo da fase da onda correspondem à oscilação de um elemento da corda, e a amplitude da onda determina os extremos do deslocamento do elemento.

Comprimento de Onda e Número de Onda

O **comprimento de onda** λ de uma onda é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre repetições da forma de onda. Um comprimento de onda típico está indicado na Fig. 16-5*a*, que é um instantâneo da onda em $t = 0$. Nesse instante a Eq. 16-2 fornece, como descrição da forma da onda,

$$y(x, 0) = y_m \text{ sen } kx. \tag{16-3}$$

Por definição, o deslocamento y é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda, ou seja, em $x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$. Assim, de acordo com a Eq. 16-3,

$$\begin{aligned} y_m \text{ sen } kx_1 &= y_m \text{ sen } k(x_1 + \lambda) \\ &= y_m \text{ sen } (kx_1 + k\lambda). \end{aligned} \tag{16-4}$$

Uma função seno começa a se repetir quando o seu ângulo (ou argumento) aumenta de 2π rad; assim, na Eq. 16-4 devemos ter $k\lambda = 2\pi$, ou

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)}. \tag{16-5}$$

O parâmetro k é chamado de **número de onda**; sua unidade no SI é o radiano por metro, ou m^{-1}. (Observe que neste caso o símbolo k *não* representa uma constante elástica, como em capítulos anteriores.)

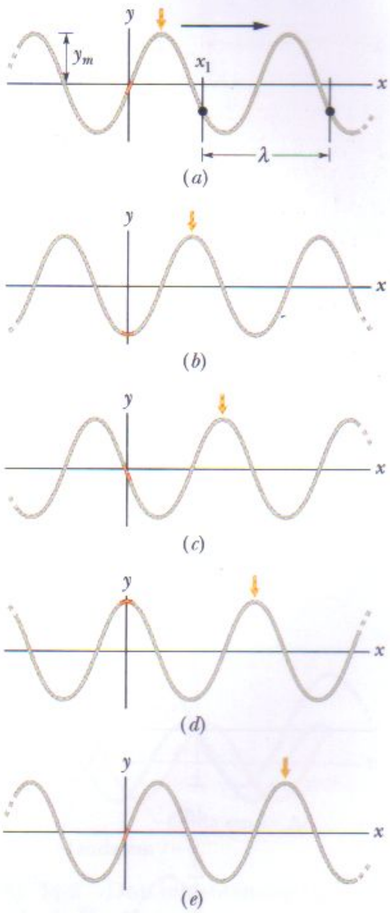


FIG. 16-5 Cinco "instantâneos" de uma onda em uma corda se propagando no sentido positivo de um eixo x. A amplitude y_m está indicada. Um comprimento de onda λ típico, medido a partir de uma posição arbitrária x_1, também está indicado.

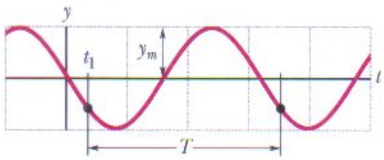


FIG. 16-6 Gráfico do deslocamento do elemento da corda situado em $x = 0$ em função do tempo, quando a onda senoidal da Fig. 16-5 passa pelo elemento. A amplitude y_m está indicada. Um período T típico, medido a partir de um tempo arbitrário t_1, também está indicado.

Observe que a onda na Fig. 16-5 se move para a direita de $\lambda/4$ de um instantâneo para o seguinte. Assim, no quinto instantâneo ela se moveu para a direita de 1λ.

Período, Freqüência Angular e Freqüência

A Fig. 16-6 mostra um gráfico do deslocamento y da Eq. 16-2 em função do tempo t em uma certa posição na corda, tomada como sendo $x = 0$. Observando a corda de perto veríamos que o elemento da corda que está nessa posição se move para cima e para baixo em um movimento harmônico simples dado pela Eq. 16-2 com $x = 0$:

$$\begin{aligned} y(0,t) &= y_m \operatorname{sen}(-\omega t) \\ &= -y_m \operatorname{sen} \omega t \quad (x = 0) \end{aligned} \tag{16-6}$$

onde fizemos uso do fato de que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ para qualquer valor de α. A Fig. 16-6 é um gráfico dessa equação; ele *não mostra* a forma da onda.

Definimos o **período** T de oscilação de uma onda como o tempo que um elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa. Um período típico está indicado no gráfico da Fig. 16-6. Aplicando a Eq. 16-6 às extremidades desse intervalo de tempo e igualando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} -y_m \operatorname{sen} \omega t_1 &= -y_m \operatorname{sen} \omega(t_1 + T) \\ &= -y_m \operatorname{sen}(\omega t_1 + \omega T). \end{aligned} \tag{16-7}$$

Esta equação é satisfeita apenas se $\omega T = 2\pi$, ou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(freqüência angular).} \tag{16-8}$$

O parâmetro ω é chamado de **freqüência angular** da onda; sua unidade no SI é o radiano por segundo.

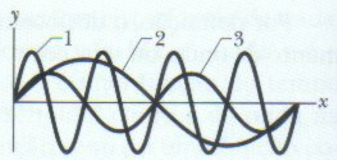
Observe novamente os cinco instantâneos de uma onda progressiva da Fig. 16-5. O intervalo de tempo entre os instantâneos é $T/4$. Assim, no quinto instantâneo todos os elementos da corda realizaram uma oscilação completa.

A **freqüência** f de uma onda é definida como $1/T$ e está relacionada à freqüência angular ω através da equação

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{(freqüência).} \tag{16-9}$$

Do mesmo modo que a freqüência do oscilador harmônico simples do Capítulo 15, a freqüência f é o número de oscilações por unidade de tempo; nesse caso, o número de oscilações realizadas por um elemento da corda. Como no Capítulo 15, f é medida em hertz ou seus múltiplos, como, por exemplo, o quilohertz.

TESTE 1 A figura é a superposição dos instantâneos de três ondas progressivas que se propagam em cordas diferentes. As fases das ondas são dadas por (a) $2x - 4t$, (b) $4x - 8t$ e (c) $8x - 16t$. Que fase corresponde a que onda na figura?



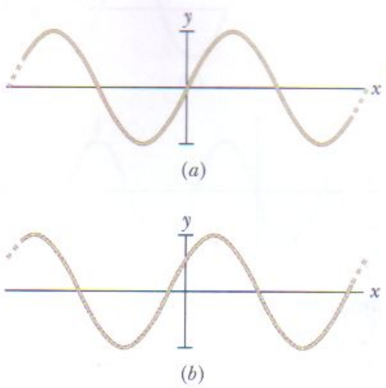


FIG. 16-7 Uma onda progressiva senoidal no instante $t = 0$ com uma constante de fase ϕ de (a) 0 e (b) $\pi/5$ rad.

Constante de Fase

Quando uma onda progressiva senoidal é expressa pela função de onda da Eq. 16-2, a onda nas proximidades de $x = 0$ se parece com a da Fig. 16-7*a* para $t = 0$. Note que, em $x = 0$ o deslocamento é $y = 0$ e a inclinação tem o valor máximo positivo. Podemos generalizar a Eq. 16-2 introduzindo uma **constante de fase** ϕ na função de onda:

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-10}$$

O valor de ϕ pode ser escolhido de tal forma que a função forneça outro deslocamento e inclinação em $x = 0$ para $t = 0$. Assim, por exemplo, a escolha de $\phi = \pi/5$ rad fornece o deslocamento e a inclinação mostrados na Fig. 16-7*b* para $t = 0$. A onda ainda é senoidal com os mesmos valores de y_m, k e ω, mas agora está deslocada em relação à onda da Fig. 16-7*a* (para a qual $\phi = 0$).

16-5 | A Velocidade de uma Onda Progressiva

A Fig. 16-8 mostra dois instantâneos da onda da Eq. 16-2, separados por um pequeno intervalo de tempo Δt. A onda está se propagando no sentido positivo de x (para a direita na Fig. 16-8), com toda forma de onda se deslocando de uma distância Δx nessa direção durante o intervalo Δt. A razão $\Delta x/\Delta t$ (ou, no limite diferencial, dx/dt) é a **velocidade** v da onda. Como podemos calcular seu valor?

Quando a onda da Fig. 16-8 se move cada ponto da forma de onda, como o ponto A assinalado em um dos picos, conserva seu deslocamento y. (Os pontos da corda não conservam seus deslocamentos, mas o mesmo não se aplica aos pontos da *forma de onda.*) Se o ponto A conserva seu deslocamento quando se move a fase da Eq. 16-2, que determina esse deslocamento, deve permanecer constante:

$$kx - \omega t = \text{constante}. \tag{16-11}$$

Observe que, embora este argumento seja constante, tanto x quanto t estão variando. Na verdade, quando t aumenta x deve aumentar também, para que o argumento permaneça constante. Isso confirma o fato de que a forma de onda se move no sentido positivo de x.

Para determinar a velocidade v da onda derivamos a Eq. 16-11 em relação ao tempo, obtendo

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \tag{16-12}$$

Usando a Eq. 16-5 ($k = 2\pi/\lambda$) e a Eq. 16-8 ($\omega = 2\pi/T$) podemos escrever a velocidade da onda na forma

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \text{(velocidade da onda).} \tag{16-13}$$

A equação $v = \lambda/T$ nos diz que a velocidade da onda é igual a um comprimento de onda por período; a onda se desloca de uma distância igual a um comprimento de onda em um período de oscilação.

A Eq. 16-2 descreve uma onda que se propaga no sentido positivo de x. Podemos obter a equação de uma onda que se propaga no sentido oposto substituindo t na Eq. 16-2 por $-t$. Isso corresponde à condição

$$kx + \omega t = \text{constante}, \tag{16-14}$$

que (compare com a Eq. 16-11) requer que x *diminua* com o tempo. Assim, uma onda que se propaga no sentido negativo de x é descrita pela equação

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{16-15}$$

Analisando a onda da Eq. 16-15, como fizemos para a onda da Eq. 16-2, descobrimos que sua velocidade é dada por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \tag{16-16}$$

O sinal negativo (compare com a Eq. 16-12) confirma que a onda está se propagando no sentido negativo de x e justifica a troca do sinal da variável tempo.

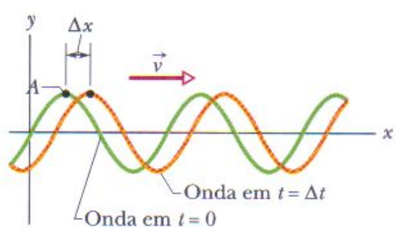


FIG. 16-8 Dois instantâneos da onda da Fig. 16-5, nos instantes $t = 0$ e $t = \Delta t$. Quando a onda se move para a direita com velocidade $\vec{v}$ a curva inteira se desloca de uma distância Δx durante um intervalo de tempo Δt. O ponto A "viaja" com a forma da onda, mas os elementos da corda se deslocam apenas para cima e para baixo.

Considere agora uma onda de forma arbitrária, dada por

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t), \tag{16-17}$$

onde h representa *qualquer* função, sendo a função seno apenas uma das possibilidades. Nossa análise anterior mostra que todas as ondas nas quais as variáveis x e t aparecem em uma combinação da forma $kx \pm \omega t$ são ondas progressivas. Além disso, todas as ondas progressivas *devem ser* da forma da Eq. 16-17. Assim, $y(x, t) = \sqrt{ax + bt}$ representa uma possível (se bem que, fisicamente um pouco estranha) onda progressiva. A função $y(x, t) = \text{sen}(ax^2 - bt)$, por outro lado, *não representa* uma onda progressiva.

TESTE 2 São dadas as equações de três ondas: (1) $y(x, t) = 2\,\text{sen}(4x - 2t)$, (2) $y(x, t) = \text{sen}(3x - 4t)$, (3) $y(x, t) = 2\,\text{sen}\,(3x - 3t)$. Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade e (b) com a velocidade máxima na direção perpendicular à direção de propagação da onda (velocidade transversal), em ordem decrescente.

Exemplo 16-2

Uma onda que se propaga em uma corda é descrita pela equação

$$y(x, t) = 0{,}00327\,\text{sen}\,(72{,}1x - 2{,}72t), \tag{16-18}$$

onde as constantes numéricas estão em unidades do SI (0,00327 m, 72,1 rad/m e 2,72 rad/s).

(a) Qual é a amplitude da onda?

IDÉIA-CHAVE A Eq. 16-18 é da mesma forma que a Eq. 16-2,

$$y = y_m\,\text{sen}\,(kx - \omega t), \tag{16-19}$$

e, portanto, temos uma onda senoidal. Comparando as duas equações, podemos determinar a amplitude.

Cálculo: Vemos que

$$y_m = 0{,}00327 \text{ m} = 3{,}27 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais são o comprimento de onda, o período e a freqüência da onda?

Cálculos: Comparando as Eqs. 16-18 e 16-19 vemos que o número de onda e a freqüência angular são

$$k = 72{,}1 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad \omega = 2{,}72 \text{ rad/s}.$$

A relação entre λ e k é dada pela Eq. 16-5:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{72{,}1 \text{ rad/m}}$$

$$= 0{,}0871 \text{ m} = 8{,}71 \text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A relação entre T e ω é dada pela Eq. 16-8:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2{,}72 \text{ rad/s}} = 2{,}31 \text{ s}, \qquad \text{(Resposta)}$$

e, de acordo com a Eq. 16-9, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}31 \text{ s}} = 0{,}433 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade da onda?

Cálculo: A velocidade da onda é dada pela Eq. 16-13:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2{,}72 \text{ rad/s}}{72{,}1 \text{ rad/m}} = 0{,}0377 \text{ m/s}$$

$$= 3{,}77 \text{ cm/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como a fase da Eq. 16-18 contém a variável posição x, a onda está se propagando ao longo do eixo x. Além disso, como a equação da onda está escrita na forma da Eq. 16-2, o sinal *negativo* na frente do termo ωt mostra que a onda está se propagando no sentido *positivo* do eixo x. (Observe que as grandezas calculadas nos itens (b) e (c) não dependem da amplitude da onda.)

(d) Qual é o deslocamento y para $x = 22{,}5$ cm e $t = 18{,}9$ s?

Cálculo: A Eq. 16-18 fornece o deslocamento em função da posição x e do tempo t. Substituindo os valores dados na equação, temos:

$$y = 0{,}00327\,\text{sen}\,(72{,}1 \times 0{,}225 - 2{,}72 \times 18{,}9)$$

$$= (0{,}00327 \text{ m})\,\text{sen}\,(-35{,}1855 \text{ rad})$$

$$= (0{,}00327 \text{ m})\,(0{,}588)$$

$$= 0{,}00192 \text{ m} = 1{,}92 \text{ mm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o deslocamento é positivo. (Não esqueça de mudar o modo da calculadora para radianos antes de calcular o seno.)

Exemplo 16-3

No Exemplo 16-2*d* mostramos que em $t = 18{,}9$ s o deslocamento transversal y do elemento da corda situado em $x = 0{,}255$ m provocado pela onda da Eq. 16-18 é 1,92 mm.

(a) Qual é a velocidade transversal u desse elemento da corda nesse instante t? (Essa velocidade, associada à oscilação transversal de um elemento da corda, é uma velocidade na direção y que varia com o tempo e não deve ser confundida com v, a velocidade constante com a qual a *forma da onda* se propaga na direção x.)

IDÉIAS-CHAVE A velocidade transversal u é a taxa de variação com o tempo do deslocamento y de um elemento da corda. Esse deslocamento é dado por

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (16\text{-}20)$$

Para um elemento em certa posição x podemos calcular a taxa de variação de y derivando a Eq. 16-20 em relação a t, mantendo x constante. Uma derivada calculada enquanto uma (ou mais) das variáveis é tratada como constante é chamada de *derivada parcial* e é representada pelo símbolo $\partial/\partial x$, em vez de d/dx.

Cálculos: Temos:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \qquad (16\text{-}21)$$

Substituindo os valores numéricos do Exemplo 16-2, obtemos

$$u = (-2{,}72 \text{ rad/s})(3{,}27 \text{ mm}) \cos(-35{,}1855 \text{ rad})$$
$$= 7{,}20 \text{ mm/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s o elemento da corda situado em $x = 22{,}5$ cm está se movendo no sentido positivo de y com uma velocidade de 7,20 mm/s.

(b) Qual é a aceleração transversal a_y do mesmo elemento nesse instante?

IDÉIA-CHAVE A aceleração transversal a_y é a taxa com a qual a velocidade transversal do elemento está variando.

Cálculos: De acordo com a Eq. 16-21, tratando novamente x como uma constante, mas permitindo que t varie, obtemos

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Comparando este resultado com a Eq. 16-20 vemos que

$$a_y = -\omega^2 y.$$

A aceleração transversal de um elemento de uma corda é, portanto, proporcional ao deslocamento transversal com o sinal contrário. Isso está de acordo com fato de que o elemento está se movendo transversalmente em um movimento harmônico simples. Substituindo os valores numéricos, obtemos

$$a_y = -(2{,}72 \text{ rad/s})^2(1{,}92 \text{ mm})$$
$$= -14{,}2 \text{ mm/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s o elemento da corda em $x = 22{,}5$ cm está deslocado de 1,92 mm em relação à posição de equilíbrio no sentido positivo de y e possui uma aceleração de módulo 14,2 mm/s² no sentido negativo de y.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1:* *Cálculo de Funções Trigonométricas para Fases Muito Grandes Às vezes, como nos Exemplos 16-2*d* e 16-3, um ângulo muito maior que 2π rad (ou 360°) aparece no problema e precisamos calcular o seno ou co-seno desse ângulo. Somar ou subtrair um múltiplo inteiro de 2π rad ou 360° a um ângulo não muda o valor de nenhuma função trigonométrica. Assim, no Exemplo 16-2*d* devemos calcular o seno de $-35{,}1855$ rad. Somando $(6)(2\pi \text{ rad})$ a este ângulo, obtemos

$$-35{,}1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2{,}51361 \text{ rad},$$

que é um ângulo menor do que 2π rad com as mesmas funções trigonométricas que $-35{,}1855$ rad (Fig. 16-9). Por exemplo, o seno tanto de 2,51361 rad como de $-35{,}1855$ rad é 0,588.

As calculadoras reduzem esses ângulos automaticamente. *Atenção:* não arredonde ângulos grandes se pretende calcular o seno ou o co-seno. Ao calcular o seno de um ângulo muito grande, *jogamos fora a maior parte do ângulo e calculamos o seno do que sobrou*. Se, por exemplo, arredondarmos $-35{,}1855$ rad para -35 rad (uma variação de 0,5%, que normalmente constitui uma aproximação razoável), estaremos mudando o valor do seno do ângulo em 27%. Além disso, ao converter um ângulo grande de graus para radianos assegure-se de que está usando um fator de conversão exato (como $180° = \pi$ rad) em vez de um fator aproximado (como $57{,}3° \approx 1$ rad).

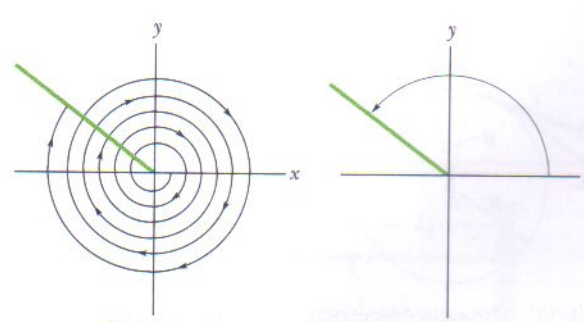


FIG. 16-9 Estes dois ângulos são diferentes, mas todas as suas funções trigonométricas são iguais.

16-6 | Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

A velocidade de uma onda está relacionada ao comprimento de onda e à freqüência através da Eq. 16-13, mas *é determinada pelas propriedades do meio*. Se uma onda se propaga em um meio como a água, o ar, o aço ou uma corda esticada, isso faz com que as partículas do meio oscilem quando ela passa. Para que isso aconteça o meio deve possuir massa (para que possa haver energia cinética) e elasticidade (para que possa haver energia potencial). Assim, as propriedades de massa e de elasticidade determinam a velocidade com a qual a onda pode se propagar no meio. Logo, é possível calcular a velocidade da onda em um meio partir dessas propriedades. Vamos fazer isso agora, de duas formas, para uma corda esticada.

Análise Dimensional

Na análise dimensional examinamos as dimensões de todas as grandezas físicas que influenciam uma dada situação para determinar as grandezas resultantes. Neste caso examinamos a massa e a elasticidade para determinar a velocidade v, que tem a dimensão de comprimento dividido por tempo, ou LT^{-1}.

No caso da massa usamos a massa de um elemento da corda, que é a massa total m da corda dividida pelo comprimento l. Chamamos essa razão de *massa específica linear* μ da corda. Assim, $\mu = m/l$, e sua dimensão é massa dividida por comprimento, ML^{-1}.

Não podemos fazer uma onda se propagar em uma corda a menos que a corda esteja sob tensão, o que significa que foi alongada e mantida alongada por forças aplicadas a suas duas extremidades. A tensão τ da corda é igual ao módulo comum dessas duas forças. Quando uma onda se propaga ao longo da corda ela desloca elementos da corda e provoca um alongamento adicional, com seções vizinhas da corda exercendo forças umas sobre as outras por causa da tensão. Assim, podemos associar a tensão da corda ao alongamento (elasticidade) da corda. A tensão e as forças de alongamento que ela produz possuem a dimensão de uma força, ou seja, MLT^{-2} (de $F = ma$).

Precisamos combinar μ (dimensão ML^{-1}) e τ (dimensão MLT^{-2}) para obter v (dimensão LT^{-1}). O estudo de várias combinações possíveis sugere que

$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{16-22}$$

onde C é uma constante adimensional que não pode ser determinada através de análise dimensional. Em nosso segundo método para determinar a velocidade da onda vamos ver que a Eq. 16-22 está correta e que $C = 1$.

Demonstração Usando a Segunda Lei de Newton

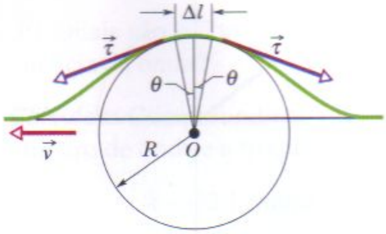


FIG. 16-10 Um pulso simétrico, visto a partir de um referencial no qual o pulso está estacionário e a corda parece se mover da direita para a esquerda com velocidade v. Podemos determinar a velocidade v aplicando a segunda lei de Newton a um elemento da corda de comprimento Δl, situado no alto do pulso.

Em vez da onda senoidal da Fig. 16-1*b*, vamos considerar um único pulso simétrico como o da Fig. 16-10, propagando-se em uma corda da esquerda para a direita com velocidade v. Por conveniência, escolhemos um referencial no qual o pulso permanece estacionário, ou seja, nos movemos juntamente com o pulso, mantendo-o sob observação. Nesse referencial a corda parece passar por nós, movendo-se da direita para a esquerda na Fig. 16-10, com velocidade v.

Considere um pequeno elemento da corda de comprimento Δl na região do pulso, um elemento que forma um arco de círculo de raio R e subtende um ângulo 2θ no centro desse círculo. Uma força $\vec{\tau}$ de um módulo igual à tensão da corda puxa tangencialmente este elemento nas duas extremidades. As componentes horizontais dessas forças se cancelam, mas as componentes verticais se somam para produzir uma força restauradora radial $\vec{F}$. Em módulo,

$$F = 2(\tau \text{ sen } \theta) \approx \tau(2\theta) = \tau\frac{\Delta l}{R} \qquad \text{(força)}, \tag{16-23}$$

onde aproximamos sen θ por θ para pequenos ângulos θ na Fig. 16-10. Com base nessa figura usamos também a relação $2\theta = \Delta l/R$. A massa do elemento é dada por

$$\Delta m = \mu \Delta l \qquad \text{(massa)}, \tag{16-24}$$

onde μ é a massa específica linear da corda.

No momento mostrado na Fig. 16-10 o elemento de corda Δl está se movendo em um arco de círculo. Assim, ele possui uma aceleração em direção ao centro do círculo dada por

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(aceleração)}. \tag{16-25}$$

As Eqs. 16-23, 16-24 e 16-25 contêm os elementos da segunda lei de Newton. Combinando-os na forma

$$\text{força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

temos

$$\frac{\tau \Delta l}{R} = (\mu\, \Delta l)\frac{v^2}{R}.$$

Explicitando a velocidade v nesta equação, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad \text{(velocidade)}, \tag{16-26}$$

em perfeito acordo com a Eq. 16-22 se a constante C, nesta equação, tiver valor unitário. A Eq. 16-26 fornece a velocidade do pulso da Fig. 16-10 e a velocidade de *qualquer* outra onda na mesma corda e sob a mesma tensão.

A Eq. 16-26 nos diz o seguinte:

A velocidade de uma onda em uma corda ideal esticada depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda, e não da freqüência da onda.

A *freqüência* da onda é fixada inteiramente pela força que a produz (por exemplo, a força aplicada pela pessoa da Fig. 16-1*b*). O *comprimento de onda* da onda é dado pela Eq. 16-13 na forma $\lambda = v/f$.

TESTE 3 Você produz uma onda progressiva em uma certa corda fazendo oscilar uma das extremidades. Se você aumentar a freqüência das oscilações, (a) a velocidade e (b) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais? Se, em vez disso, você aumentar a tensão na corda, (c) a velocidade e (d) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais?

Exemplo 16-4

Na Fig. 16-11 duas cordas foram amarradas uma na outra com um nó e esticadas entre dois suportes rígidos. As cordas têm massas específicas lineares $\mu_1 = 1{,}4 \times 10^{-4}$ kg/m e $\mu_2 = 2{,}8 \times 10^{-4}$ kg/m. Os comprimentos são $L_1 = 3{,}0$ m e $L_2 = 2{,}0$ m, e a corda 1 está submetida a uma tensão de 400 N. Dois pulsos são enviados simultaneamente em direção ao nó a partir dos suportes. Qual dos pulsos chega primeiro ao nó?

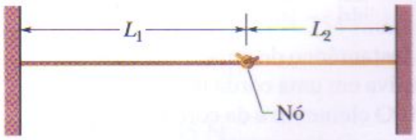


FIG. 16-11 Duas cordas, de comprimentos L_1 e L_2, emendadas com um nó e esticadas entre dois suportes rígidos.

IDÉIAS-CHAVE

1. O tempo t que um pulso leva para percorrer uma distância L é $t = L/v$, onde v é a velocidade do pulso.
2. A velocidade de um pulso em uma corda esticada depende da tensão τ e da massa específica linear μ da corda, e é dada pela Eq. 16-26 ($v = \sqrt{\tau/\mu}$).
3. Como as duas cordas foram esticadas juntas, estão submetidas à mesma tensão τ (= 400 N).

Cálculos: Juntando essas três idéias obtemos, para o tempo que o pulso da corda 1 leva para atingir o nó,

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = L_1\sqrt{\frac{\mu_1}{\tau}} = (3{,}0\ \text{m})\sqrt{\frac{1{,}4\times10^{-4}\ \text{kg/m}}{400\ \text{N}}}$$

$$= 1{,}77 \times 10^{-3}\ \text{s}.$$

Da mesma forma, os dados para o pulso da corda 2 nos fornecem

$$t_2 = L_2\sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = 1{,}67\times10^{-3}\ \text{s}.$$

Assim, o pulso da corda 2 chega primeiro ao nó.

Vamos voltar à segunda idéia-chave. Como a massa específica linear da corda 2 é maior que a da corda 1, a velocidade do pulso na corda 2 é menor que na corda 1. Poderíamos ter antecipado a resposta a partir deste fato? Não, já que, de acordo com a primeira idéia-chave, a distância percorrida pelo pulso também influencia o resultado.

16-7 | Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Quando produzimos uma onda em uma corda esticada fornecemos energia para que a corda se mova. Quando a onda se afasta de nós transporta essa energia como energia cinética e como energia potencial elástica. Vamos examinar essas duas formas, uma de cada vez.

Energia Cinética

Um elemento da corda de massa dm, oscilando transversalmente em um movimento harmônico simples enquanto a onda passa por ele, possui energia cinética associada a sua velocidade transversal $\vec{u}$. Quando o elemento está passando pela posição $y = 0$ (o elemento b da Fig. 16-12), sua velocidade transversal (e, portanto, sua energia cinética) é máxima. Quando o elemento está na sua posição extrema $y = y_m$ (como o elemento a), sua velocidade transversal (e, portanto, sua energia cinética) é nula.

Energia Potencial Elástica

Para produzir uma onda senoidal em uma corda inicialmente reta a onda deve necessariamente deformar a corda. Quando um elemento da corda de comprimento dx oscila transversalmente seu comprimento aumenta e diminui periodicamente para assumir a forma da onda senoidal. Como no caso de uma mola, a energia potencial elástica está associada a essas variações de comprimento.

Quando o elemento da corda está na posição $y = y_m$ (elemento a da Fig. 16-12), seu comprimento possui o valor de repouso dx e, portanto, a energia potencial elástica é nula. Por outro lado, quando o elemento está passando pela posição $y = 0$ possui alongamento máximo e, portanto, energia potencial elástica máxima.

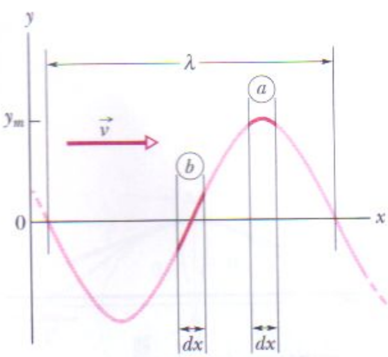


FIG. 16-12 Instantâneo de uma onda progressiva em uma corda no instante $t = 0$. O elemento a da corda está sofrendo um deslocamento $y = y_m$ e o elemento b está sofrendo um deslocamento $y = 0$. A energia cinética do elemento da corda em cada posição depende da velocidade transversal do elemento. A energia potencial depende de quanto o elemento da corda é alongado quando a onda passa por ele.

Transporte de Energia

Os elementos da corda possuem, portanto, energia cinética máxima e energia potencial máxima em $y = 0$. No instantâneo da Fig. 16-12 as regiões da corda com deslocamento máximo não possuem energia e as regiões com deslocamento nulo possuem energia máxima. Quando a onda se propaga ao longo da corda as forças associadas à tensão da corda realizam trabalho continuamente para transferir energia das regiões com energia para as regiões sem energia.

Suponha que produzimos uma onda em uma corda esticada ao longo de um eixo x horizontal tal que a Eq. 16-2 descreva o deslocamento da corda. Podemos produzir essa onda ao longo da corda fazendo uma de suas extremidade oscilar continuamente, como na Fig. 16-1b. Ao fazermos isso fornecemos energia para o movimento e o alongamento da corda; quando as partes da corda oscilam perpendicularmente ao eixo x possuem energia cinética e energia potencial elástica. Quando a onda passa por partes da corda que estavam anteriormente em repouso a energia é transferida para essas partes. Assim, dizemos que a onda *transporta* energia ao longo da corda.

A Taxa de Transmissão de Energia

A energia cinética dK associada a um elemento da corda de massa dm é dada por

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, u^2, \tag{16-27}$$

onde u é a velocidade transversal do elemento da corda. Para determinar u derivamos a Eq. 16-2 em relação ao tempo, mantendo x constante:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \tag{16-28}$$

Usando essa relação e fazendo $dm = \mu\, dx$, a Eq. 16-27 se torna

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\, dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-29}$$

Dividindo a Eq. 16-29 por dt obtemos a taxa com a qual a energia cinética passa por um elemento da corda e, portanto, a taxa com a qual a energia cinética é transportada pela onda. Como a razão dx/dt que aparece do lado direito da Eq. 16-29 é a velocidade v da onda, temos:

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-30}$$

A taxa *média* com a qual a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \left[\cos^2(kx - \omega t)\right]_{\text{méd}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2. \tag{16-31}$$

Aqui calculamos a média para um número inteiro de comprimentos de onda e usamos o fato de que o valor médio do quadrado de uma função co-seno para um número inteiro de períodos é 1/2.

A energia potencial elástica também é transportada pela onda, com a mesma taxa média dada pela Eq. 16-31. Não vamos apresentar a demonstração, mas apenas lembrar que em um sistema oscilatório, como um pêndulo ou um sistema bloco-mola, a energia cinética média e a energia potencial média são iguais.

A **potência média**, que é a taxa média com a qual as duas formas de energia são transmitidas pela onda, é, portanto,

$$P_{\text{méd}} = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} \tag{16-32}$$

ou, de acordo com a Eq. 16-31,

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \quad \text{(potência média).} \tag{16-33}$$

Os fatores μ e v nesta equação dependem do material e da tensão da corda. Os fatores ω e y_m dependem do processo usado para produzir a onda. A proporcionalidade entre a potência média de uma onda e o quadrado da amplitude e também da freqüência angular é um resultado geral, válido para ondas de todos os tipos.

Exemplo 16-5

Uma corda tem uma massa específica μ = 525 g/m e uma tensão τ = 45 N. Uma onda senoidal de freqüência f = 120 Hz e amplitude y_m = 8,5 mm é produzida na corda. Com que taxa média a onda transporta energia?

IDÉIA-CHAVE A taxa média de transporte de energia é a potência média $P_{\text{méd}}$, dada pela Eq. 16-33.

Cálculos: Para usar a Eq. 16-33 precisamos conhecer a freqüência angular ω e a velocidade v da onda. De acordo com a Eq. 16-9,

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(120\text{ Hz}) = 754\text{ rad/s}.$$

De acordo com a Eq. 16-26, temos:

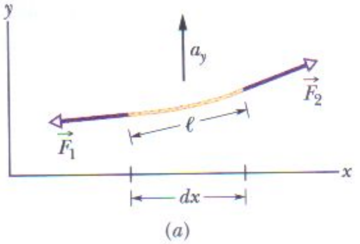
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{45\text{ N}}{0{,}525\text{ kg/m}}} = 9{,}26\text{ m/s}.$$

Nesse caso, a Eq. 16-33 nos dá

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2$$

$$= (\tfrac{1}{2})(0{,}525\text{ kg/m})(9{,}26\text{ m/s})(754\text{ rad/s})^2(0{,}0085\text{ m})^2$$

$$\approx 100\text{ W}. \qquad \text{(Resposta)}$$



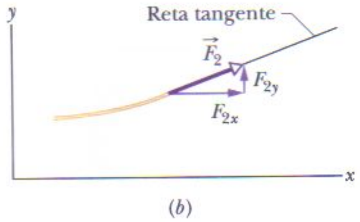


FIG. 16-13 (*a*) Um elemento da corda quando uma onda senoidal transversal se propaga em uma corda esticada. As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agem nas extremidades esquerda e direita, produzindo uma aceleração $\vec{a}$ com uma componente vertical a_y. (*b*) A força na extremidade direita do elemento está dirigida ao longo de uma reta tangente ao lado direito do elemento.

16-8 | A Equação de Onda

Quando uma onda passa por um elemento de uma corda esticada o elemento se move perpendicularmente à direção de propagação da onda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento do elemento podemos obter uma equação diferencial geral, chamada *equação de onda*, que governa a propagação de ondas de qualquer tipo.

A Fig. 16-13*a* mostra um instantâneo de um elemento de corda de massa dm e comprimento ℓ quando uma onda se propaga em uma corda de massa específica μ que está esticada ao longo de um eixo x horizontal. Vamos supor que a amplitude da onda é tão pequena que o elemento sofre apenas uma leve inclinação em relação ao eixo x quando a onda passa por ele. A força $\vec{F}_2$ que age sobre a extremidade direita do elemento possui um módulo igual à tensão τ na corda e aponta ligeiramente para cima. A força $\vec{F}_1$ que age sobre a extremidade esquerda do elemento também possui módulo igual à tensão τ, mas aponta ligeiramente para baixo. Devido à curvatura do elemento a resultante das forças é diferente de zero e produz no elemento uma aceleração a_y para cima. A aplicação da segunda lei de Newton às componentes y ($F_{\text{res},y} = ma_y$) nos dá

$$F_{2y} - F_{1y} = dm\, a_y. \tag{16-34}$$

Vamos analisar esta equação por partes.

Massa. A massa dm do elemento pode ser escrita em termos da massa específica μ da corda e do comprimento ℓ do elemento como $dm = \mu\ell$. Como a inclinação do elemento é pequena, $\ell \approx dx$ (Fig. 16-13*a*) e temos, aproximadamente,

$$dm = \mu\, dx. \tag{16-35}$$

Aceleração. A aceleração a_y da Eq. 16-34 é a derivada segunda do deslocamento y em relação ao tempo:

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-36}$$

Forças. A Fig. 16-13*b* mostra que $\vec{F}_2$ é tangente à corda na extremidade direita do elemento; assim, podemos relacionar as componentes da força à inclinação S_2 de extremidade direita da corda:

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = S_2. \tag{16-37}$$

Podemos também relacionar as componentes ao módulo F_2 ($= \tau$):

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

ou

$$\tau = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}. \tag{16-38}$$

Entretanto, como estamos supondo que a inclinação do elemento é pequena, $F_{2y} \ll F_{2x}$ e a Eq. 16-38 se torna

$$\tau = F_{2x}. \tag{16-39}$$

Substituindo na Eq. 16-37 e explicitando F_{2y}, temos:

$$F_{2y} = \tau S_2. \tag{16-40}$$

Uma análise semelhante para a extremidade esquerda do elemento da corda nos dá

$$F_{1y} = \tau S_1. \tag{16-41}$$

Podemos agora substituir as Eqs. 16-35, 16-36, 16-40 e 16-41 na Eq. 16-34 para obter

$$\tau S_2 - \tau S_1 = (\mu\, dx)\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-42}$$

Como o elemento de corda é curto, as inclinações S_2 e S_1 diferem apenas de um valor infinitesimal dS, onde S é a inclinação em qualquer ponto:

$$S = \frac{dy}{dx}. \tag{16-43}$$

Substituindo $S_2 - S_1$ na Eq. 16-42 por dS e usando a Eq. 16-43 para substituir S por dy/dx, obtemos

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{16-44}$$

Na última passagem mudamos a notação para derivadas parciais porque no lado esquerdo da equação derivamos apenas em relação a x e no lado direito derivamos apenas em relação a t. Finalmente, usando a Eq. 16-26 ($v = \sqrt{\tau/\mu}$), obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{(equação de onda).} \tag{16-45}$$

Esta é a equação diferencial geral que governa a propagação de ondas de todos os tipos.

16-9 | O Princípio da Superposição de Ondas

Freqüentemente acontece que duas ou mais ondas passam simultaneamente pela mesma região. Quando ouvimos um concerto ao vivo, por exemplo, as ondas sonoras dos vários instrumentos chegam simultaneamente aos nossos ouvidos. Os elétrons presentes nas antenas dos receptores de rádio e televisão são colocados em movimento pelo efeito combinado das ondas eletromagnéticas de muitas estações. A água de um lago ou de um porto pode ser agitada pela marola produzida por muitas embarcações.

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente na mesma corda esticada. Sejam $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda se propagasse sozinha. O deslocamento da corda quando as ondas se propagam ao mesmo tempo é então a soma algébrica

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \tag{16-46}$$

Esta soma de deslocamentos significa que

Ondas superpostas se somam algebricamente para produzir uma **onda resultante** ou **onda total**.

Este é outro exemplo do **princípio de superposição**, segundo o qual, quando vários efeitos ocorrem simultaneamente o efeito total é a soma dos efeitos individuais.

A Fig. 16-14 mostra uma seqüência de instantâneos de dois pulsos que se propagam em sentidos opostos na mesma corda esticada. Quando os pulsos se superpõem o pulso resultante é a soma dos dois pulsos. Além disso, cada pulso passa pelo outro como se ele não existisse:

Ondas superpostas não se afetam mutuamente.

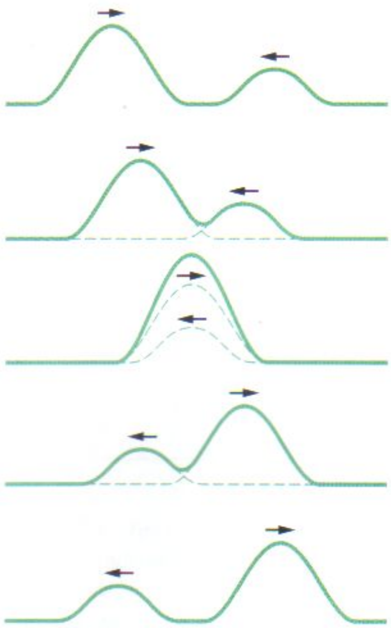


FIG. 16-14 Uma série de instantâneos que mostra dois pulsos se propagando em sentidos opostos em uma corda esticada. O princípio da superposição se aplica quando os pulsos passam um pelo outro.

16-10 | Interferência de Ondas

Suponha que produzimos duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e amplitude que se propagam no mesmo sentido em uma corda. O princípio da superposição pode ser usado. Que forma tem a onda resultante?

A forma da onda resultante depende da *fase relativa* das duas ondas. Se as ondas estão exatamente em fase (ou seja, se os picos e os vales de uma estão exatamente alinhados com os da outra), o deslocamento total a cada instante é o dobro do deslocamento que seria produzido por apenas uma das ondas. Se estão totalmente defasadas (ou seja, se os picos de uma estão exatamente alinhados com os vales da outra), elas se cancelam mutuamente e o deslocamento é zero; a corda permanece parada. O fenômeno de combinação de ondas recebe o nome de **interferência,** e dizemos que as ondas **interferem** entre si. (O termo se refere apenas aos deslocamentos; a propagação das ondas não é afetada.)

Suponha que uma das ondas que se propagam em uma corda é dada por

$$y_1(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad (16\text{-}47)$$

e que uma outra, deslocada em relação à primeira, é dada por

$$y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \qquad (16\text{-}48)$$

Essas ondas têm a mesma freqüência angular ω (e, portanto, a mesma freqüência f), o mesmo número de onda k (e, portanto, o mesmo comprimento de onda λ) e a mesma amplitude y_m. Ambas se propagam no sentido positivo do eixo x, com a mesma velocidade, dada pela Eq. 16-26. Elas diferem apenas de um ângulo constante ϕ, a constante de fase. Dizemos que essas ondas estão *defasadas* de ϕ ou que sua *diferença de fase* é ϕ.

Segundo o princípio de superposição (Eq. 16-46), a onda resultante é a soma algébrica das duas ondas e tem um deslocamento

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \end{aligned} \qquad (16\text{-}49)$$

De acordo com o Apêndice E, a soma dos senos de dois ângulos α e β obedece à identidade

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \qquad (16\text{-}50)$$

Aplicando esta relação à Eq. 16-49, obtemos

$$y'(x,t) = [2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \qquad (16\text{-}51)$$

Como mostra a Fig. 16-15, a onda resultante também é uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de x. Ela é a única onda que se pode ver na corda (as ondas dadas pelas Eqs. 16-47 e 16-48 *não podem* ser vistas).

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e comprimento de onda se propagam no *mesmo* sentido em uma corda, elas interferem para produzir uma onda resultante senoidal que se propaga nesse sentido.

$$\overbrace{y'(x,t)}^{\text{Deslocamento}} = \underbrace{[2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi]}_{\substack{\text{Termo de}\\ \text{amplitude}}} \underbrace{\operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi)}_{\substack{\text{Termo}\\ \text{oscilatório}}}$$

FIG. 16-15 A onda resultante da Eq. 16-51, produzida pela interferência de duas ondas transversais senoidais, é também uma onda transversal senoidal, com um fator de amplitude e um fator oscilatório.

A onda resultante difere das ondas individuais em dois aspectos: (1) a constante de fase é $\phi/2$, e (2) a amplitude y'_m é o módulo do fator entre colchetes na Eq. 16-51:

$$y'_m = |2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi| \quad \text{(amplitude).} \qquad (16\text{-}52)$$

Se $\phi = 0$ rad (ou 0°), as duas ondas estão exatamente em fase, como na Fig. 16-16*a*. Nesse caso, a Eq. 16-51 se reduz a

$$y'(x,t) = 2y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (\phi = 0). \qquad (16\text{-}53)$$

Esta onda resultante está plotada na Fig. 16-16*d*. Observe, tanto na figura como na Eq. 16-53, que a amplitude da onda resultante é duas vezes maior que a amplitude

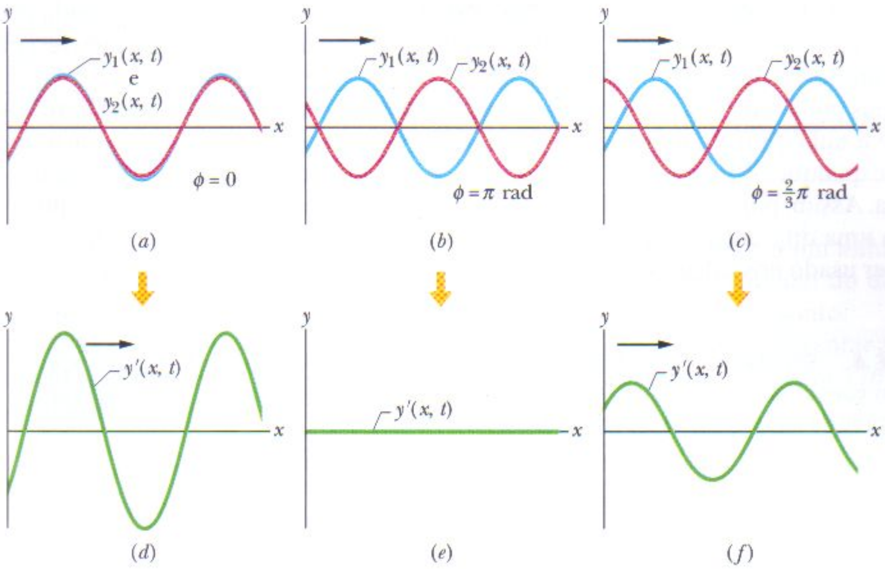


FIG. 16-16 Duas ondas senoidais iguais, $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo x. Elas interferem para produzir uma onda resultante $y'(x, t)$, que é a onda observada na corda. A diferença de fase ϕ entre as duas ondas é (*a*) 0 rad ou 0°, (*b*) π rad ou 180° e (*c*) $2\pi/3$ rad ou 120°. As ondas resultantes correspondentes são mostradas em (*d*), (*e*) e (*f*).

das ondas individuais. Esta é a maior amplitude que a onda resultante pode ter, já que o valor máximo do termo em co-seno das Eqs. 16-51 e 16-52, que é 1, acontece para $\phi = 0$. A interferência que produz a maior amplitude possível é chamada de *interferência totalmente construtiva*.

Se $\phi = \pi$ rad (ou 180°), as ondas que interferem estão totalmente defasadas, como na Fig. 16-16*b*. Nesse caso, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ e a amplitude da onda resultante, dada pela Eq. 16-52, é nula. Assim, para todos os valores de x e t,

$$y'(x,t) = 0 \qquad (\phi = \pi \text{ rad}). \tag{16-54}$$

A onda resultante está plotada na Fig. 16-16*e*. Embora duas ondas estejam se propagando na corda não vemos a corda se mover. Este tipo de interferência é chamado de *interferência totalmente destrutiva*.

Como a forma de uma onda senoidal se repete a cada 2π rad, uma diferença de fase $\phi = 2\pi$ rad (ou 360°) corresponde a uma defasagem de uma onda em relação à outra equivalente a um comprimento de onda. Assim, as diferenças de fase podem ser descritas tanto em termos de ângulos como em termos de comprimentos de onda. Por exemplo: na Fig. 16-16*b* podemos dizer que as ondas estão defasadas de 0,50 comprimento de onda. A Tabela 16-1 mostra outros exemplos de diferenças de fase e as interferências que produzem. Note que quando uma interferência não é nem totalmente construtiva nem totalmente destrutiva é chamada de *interferência intermediária*. Nesse caso, a amplitude da onda resultante está entre 0 e $2y_m$. De acordo com a Tabela 16-1, por exemplo, se as ondas que interferem têm uma

TABELA 16-1

Diferenças de Fase e Tipos de Interferência[a]

Diferença de Fase em			Amplitude da Onda	Tipo de Interferência
Graus	Radianos	Comprimentos de Onda		
0	0	0	$2y_m$	Totalmente construtiva
120	$\frac{2}{3}\pi$	0,33	y_m	Intermediária
180	π	0,50	0	Totalmente destrutiva
240	$\frac{4}{3}\pi$	0,67	y_m	Intermediária
360	2π	1,00	$2y_m$	Totalmente construtiva
865	15,1	2,40	$0{,}60y_m$	Intermediária

[a] A diferença de fase é entre duas ondas de mesma freqüência e mesma amplitude y_m que se propagam no mesmo sentido.

diferença de fase de 120° ($\phi = 2\pi/3$ rad = 0,33 comprimentos de onda), a onda resultante tem uma amplitude y_m, igual à amplitude de uma das ondas que interferem (veja Figs. 16-16*c* e *f*).

Duas ondas com o mesmo comprimento de onda estão em fase se sua diferença de fase é nula ou igual a um número inteiro de comprimentos de onda; a parte inteira de qualquer diferença de fase expressa *em comprimentos de onda* pode ser descartada. Assim, por exemplo, uma diferença de 0,40 comprimento de onda é equivalente a uma diferença de 2,40 comprimentos de onda, e o menor dos dois números pode ser usado nos cálculos.

TESTE 4 São dadas quatro diferenças de fase possíveis entre duas ondas iguais, expressas em comprimentos de onda: 0,20; 0,45; 0,60 e 0,80. Ordene as ondas de acordo com a amplitude da onda resultante, começando pela maior.

Exemplo 16-6

Duas ondas senoidais iguais, propagando-se no mesmo sentido em uma corda, interferem entre si. A amplitude y_m das ondas é 9,8 mm e a diferença de fase ϕ entre elas é 100°.

(a) Qual é a amplitude y'_m da onda resultante e qual é o tipo de interferência?

IDÉIA-CHAVE Como se trata de ondas senoidais iguais que se propagam na *mesma direção*, elas interferem para produzir uma onda progressiva senoidal.

Cálculos: Como as duas ondas são iguais, têm *a mesma amplitude*. Assim, a amplitude y'_m da onda resultante é dada pela Eq. 16-52:

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi| = |(2)(9{,}8 \text{ mm}) \cos(100°/2)|$$
$$= 13 \text{ mm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos dizer que a interferência é *intermediária* de duas formas. A diferença de fase está entre 0 e 180° e, portanto, a amplitude y'_m está entre 0 e $2y_m$ (= 19,6 mm).

(b) Que diferença de fase, em radianos e em comprimentos de onda, faz com que a amplitude da onda resultante seja 4,9 mm?

Cálculos: Neste caso, conhecemos y'_m e precisamos determinar o valor de ϕ. De acordo com a Eq. 16-52,

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi|,$$

e, portanto,

$$4{,}9 \text{ mm} = (2)(9{,}8 \text{ mm}) \cos \tfrac{1}{2}\phi,$$

que nos dá (usando uma calculadora no modo de radianos)

$$\phi = 2\cos^{-1} \frac{4{,}9 \text{ mm}}{(2)(9{,}8 \text{ mm})}$$
$$= \pm 2{,}636 \text{ rad} \approx \pm 2{,}6 \text{ rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Existem duas soluções, porque podemos obter a mesma onda resultante supondo que a primeira onda está *adiantada* (à frente) ou *atrasada* (atrás) na segunda onda. A diferença correspondente em comprimentos de onda é

$$\frac{\phi}{2\pi \text{ rad/comprimento de onda}} = \frac{\pm 2{,}636 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/comprimento de onda}}$$
$$= \pm 0{,}42 \text{ comprimento de onda}. \qquad \text{(Resposta)}$$

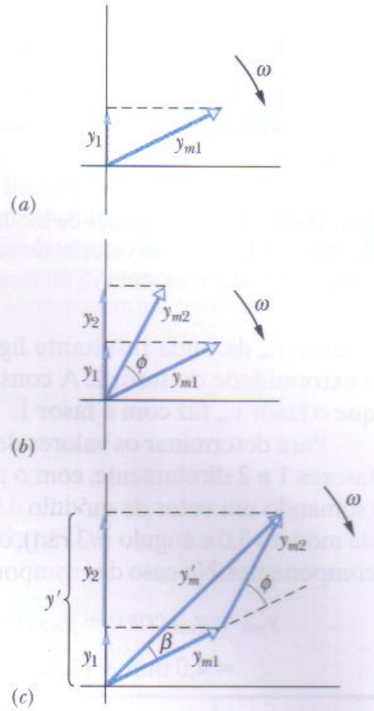
16-11 | Fasores

Podemos representar uma onda em uma corda (ou qualquer outro tipo de onda) através de um **fasor**. Um fasor é um vetor de módulo igual à amplitude da onda, que gira em torno da origem com velocidade angular igual à freqüência angular ω da onda. Assim, por exemplo, a onda

$$y_1(x, t) = y_{m1} \text{ sen } (kx - \omega t) \qquad (16\text{-}55)$$

é representada pelo fasor da Fig. 16-17*a*. O módulo do fasor é a amplitude y_{m1} da onda. Quando o fasor gira em torno da origem com freqüência angular ω sua projeção

FIG. 16-17 (*a*) Um fasor de módulo y_{m1} girando em torno de uma origem com velocidade angular ω representa uma onda senoidal. A projeção y_1 do fasor no eixo vertical representa o deslocamento de um ponto pelo qual a onda passa. (*b*) Um segundo fasor, também de velocidade angular ω, mas de módulo y_{m2} e girando com um ângulo ϕ constante de diferença em relação ao primeiro fasor, representa uma segunda onda, com uma constante de fase ϕ. (*c*) A onda resultante é representada pelo vetor soma dos dois fasores, y'_m.



ção y_1 no eixo vertical varia senoidalmente de um máximo de y_{m1} a um mínimo de $-y_{m1}$ e de volta a y_{m1}. Essa variação corresponde à variação senoidal do deslocamento y_1 de qualquer ponto da corda quando a onda passa por esse ponto.

Quando duas ondas se propagam na mesma corda podemos representar as duas ondas e a onda resultante em um *diagrama fasorial*. Os fasores da Fig. 16-17*b* representam a onda da Eq. 16-55 e uma segunda onda dada por

$$y_2(x, t) = y_{m2}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-56}$$

Esta segunda onda está defasada em relação à primeira onda de uma constante de fase ϕ. Como os fasores giram com a mesma velocidade angular ω, o ângulo entre os dois fasores é sempre ϕ. Se ϕ é um número *positivo*, o fasor da onda 2 está *atrasado* em relação ao fasor da onda 1, como mostra a Fig. 16-17*b*. Se ϕ é um número *negativo*, o fasor da onda 2 está *adiantado* em relação ao fasor da onda 1.

Como as ondas y_1 e y_2 têm o mesmo número de onda k e a mesma freqüência angular ω, sabemos pelas Eqs. 16-51 e 16-52 que a resultante é da forma

$$y'(x, t) = y'_m\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \beta), \tag{16-57}$$

onde y'_m é a amplitude da onda resultante e β é a constante de fase. Para determinar os valores de y'_m e β temos que somar as duas ondas, como fizemos para obter a Eq. 16-51. Para fazer isso em um diagrama fasorial somamos vetorialmente os dois fasores em qualquer instante da rotação, como na Fig. 16-17*c*, onde o fasor y_{m2} foi deslocado para a extremidade do fasor y_{m1}. O módulo da soma vetorial é igual à amplitude y'_m da Eq. 16-57. O ângulo entre a soma vetorial e o fasor de y_1 é igual à constante de fase β da Eq. 16-57.

Note que, ao contrário do que acontece com o método da Seção 16-10,

Podemos usar fasores para combinar ondas *mesmo que as amplitudes sejam diferentes*.

Exemplo 16-7

Duas ondas senoidais $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ têm o mesmo comprimento de onda e se propagam no mesmo sentido em uma corda. As amplitudes são $y_{m1} = 4{,}0$ mm e $y_{m2} = 3{,}0$ mm, e as constantes de fase são 0 e $\pi/3$ rad, respectivamente. Quais são a amplitude y'_m e a constante de fase β da onda resultante? Escreva a onda resultante na forma da Eq. 16-57.

IDÉIAS-CHAVE (1) As duas ondas têm algumas propriedades em comum: como se propagam na mesma corda, têm a mesma velocidade v, que, de acordo com a Eq. 16-26, depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda. Como o comprimento de onda λ é o mesmo, elas devem ter o mesmo número de onda k $(= 2\pi/\lambda)$. Como o número de onda k e a velocidade v são iguais, elas devem ter a mesma freqüência angular ω $(= kv)$.

(2) As ondas (vamos chamá-las de ondas 1 e 2) podem ser representadas por fasores girando com a mesma freqüência angular ω em torno da origem. Como a constante de fase da onda 2 é *maior* que a constante de fase da onda 1 em $\pi/3$, o fasor 2 está *atrasado* de $\pi/3$ em relação ao fasor 1 na rotação dos dois vetores no sentido horário, como mostra a Fig. 16-18*a*. A onda resultante da interferência das ondas 1 e 2 pode ser representada por um fasor que é a soma vetorial dos fasores 1 e 2.

Cálculos: Para simplificar a soma vetorial desenhamos os fasores 1 e 2 na Fig. 16-18*a* no instante em que a direção do fasor 1 coincide com a do semi-eixo horizontal positivo. Como o fasor 2 está atrasado de $\pi/3$ rad, faz um ângulo positivo de $\pi/3$ rad com o semi-eixo horizontal positivo. Na Fig. 16-18*b* o fasor 2 foi deslocado para que sua origem coincida com a extremidade do fasor 1. Podemos desenhar

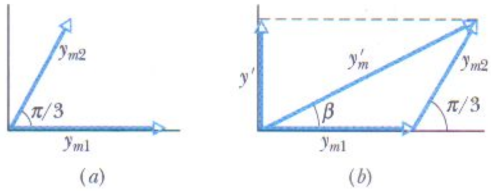


FIG. 16-18 (*a*) Dois fasores de módulos y_{m1} e y_{m2} com diferença de fase $\pi/3$. (*b*) A soma vetorial desses fasores em qualquer instante fornece o módulo y'_m do fasor da onda resultante.

o fasor y'_m da onda resultante ligando a origem do fasor 1 à extremidade do fasor 2. A constante de fase β é o ângulo que o fasor y'_m faz com o fasor 1.

Para determinar os valores de y'_m e β podemos somar os fasores 1 e 2 diretamente, com o auxílio de uma calculadora (somando um vetor de módulo 4,0 e ângulo 0 com um vetor de módulo 3,0 e ângulo $\pi/3$ rad), ou somar separadamente as componentes. No caso das componentes horizontais, temos:

$$y'_{mh} = y_{m1}\cos 0 + y_{m2}\cos \pi/3$$
$$= 4{,}0\text{ mm} + (3{,}0\text{ mm})\cos \pi/3 = 5{,}50\text{ mm}.$$

No caso das componentes verticais, temos:

$$y'_{mv} = y_{m1}\,\text{sen}\,0 + y_{m2}\,\text{sen}\,\pi/3.$$
$$= 0 + (3{,}0\text{ mm})\,\text{sen}\,\pi/3 = 2{,}60\text{ mm}.$$

Assim, a onda resultante tem uma amplitude

$$y'_m = \sqrt{(5{,}50\text{ mm})^2 + (2{,}60\text{ mm})^2}$$
$$= 6{,}1\text{ mm} \qquad \text{(Resposta)}$$

e uma constante de fase

$$\beta = \tan^{-1}\frac{2{,}60\text{ mm}}{5{,}50\text{ mm}} = 0{,}44\text{ rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Fig. 16-18*b*, a constante de fase β é um ângulo *positivo* em relação ao fasor 1. Assim, a onda resultante está *atrasada* em relação à onda 1 de um ângulo β = 0,44 rad. De acordo com a Eq. 16-57, podemos escrever a onda resultante na forma

$$y'(x,t) = (6{,}1\text{ mm})\,\text{sen}(kx - \omega t + 0{,}44\text{ rad}). \qquad \text{(Resposta)}$$

16-12 | Ondas Estacionárias

Na Seção 16-10 discutimos o caso de duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e mesma amplitude que se propagam *no mesmo sentido* em uma corda. O que acontece se elas se propagam em sentidos opostos? Também neste caso podemos obter a onda resultante aplicando o princípio da superposição.

A situação está ilustrada na Fig. 16-19. A figura mostra uma onda se propagando para a esquerda na Fig. 16-19*a* e a outra onda se propagando para a direita na Fig. 16-19*b*. A Fig. 16-19*c* mostra a soma das duas ondas, obtida aplicando graficamente o princípio de superposição. O que chama a atenção na onda resultante é o fato de que existem pontos na corda, chamados **nós**, que permanecem imóveis. Quatro desses nós estão assinalados com pontos na Fig. 16-19*c*. No ponto médio entre nós vizinhos estão **antinós**, pontos em que a amplitude da onda resultante é máxima. Ondas

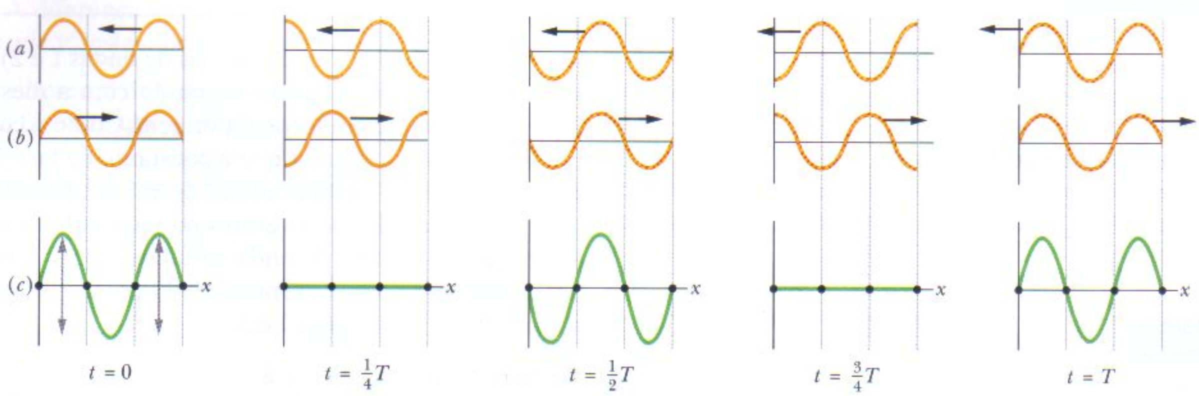


FIG. 16-19 (*a*) Cinco instantâneos de uma onda se propagando para a esquerda, em instantes t indicados abaixo da parte (*c*) (T é o período das oscilações). (*b*) Cinco instantâneos de uma onda igual à de (*a*), mas se propagando para a direita, nos mesmos instantes t. (*c*) Instantâneos correspondentes para a superposição das duas ondas na mesma corda. Nos instantes $t = 0$, $T/2$, e T a interferência é totalmente construtiva, ou seja, os picos se alinham com picos e os vales com vales. Em $t = T/4$ e $3T/4$ a interferência é totalmente destrutiva, pois os picos se alinham com vales. Alguns pontos (os nós, indicados por pontos) permanecem imóveis; outros (os antinós) oscilam com amplitude máxima.

como a da Fig. 16-19*c* são chamadas de **ondas estacionárias**, porque a forma de onda não se move para a esquerda nem para a direita; as posições de máximos e mínimos não variam com o tempo.

> Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam em sentidos *opostos* em uma corda, a interferência mútua produz uma onda estacionária.

Para analisar uma onda estacionária, representamos as duas ondas pelas equações

$$y_1(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16-58}$$

e

$$y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{16-59}$$

De acordo com o princípio de superposição, a onda resultante é dada por

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t).$$

Aplicando a relação trigonométrica da Eq. 16-50, obtemos

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t, \tag{16-60}$$

que está plotada na Fig. 16-20. Esta equação não descreve uma onda progressiva porque não é da forma da Eq. 16-17; em vez disso, descreve uma onda estacionária.

O fator $2y_m$ sen kx entre colchetes na Eq. 16-60 pode ser visto como a amplitude da oscilação do elemento da corda localizado na posição x. Entretanto, como uma amplitude é sempre positiva e sen kx pode ser negativo, tomamos o valor absoluto de $2y_m$ sen kx como a amplitude em x.

Em uma onda senoidal progressiva a amplitude da onda é a mesma para todos os elementos da corda. Isso não é verdade para uma onda estacionária, na qual a amplitude *varia com a posição*. Na onda estacionária da Eq. 16-60, por exemplo, a amplitude é zero para valores de kx tais que sen $kx = 0$. Esses valores são

$$kx = n\pi, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16-61}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ nesta equação e reagrupando os termos, obtemos

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(nós)}, \tag{16-62}$$

para as posições de amplitude zero (nós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Note que nós vizinhos estão separados de $\lambda/2$, metade do comprimento de onda.

A amplitude da onda estacionária da Eq. 16-60 tem um valor máximo de $2y_m$, que ocorre para valores de kx tais que $|\operatorname{sen} kx| = 1$. Esses valores são

$$\begin{aligned} kx &= \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi, \ldots \\ &= (n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{16-63}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ na Eq. 16-63 e reagrupando os termos, obtemos

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(antinós)}, \tag{16-64}$$

para as posições de máxima amplitude (antinós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Os antinós estão separados de $\lambda/2$ e estão situados no ponto médio de nós vizinhos.

Reflexões em uma Interface

Podemos excitar uma onda estacionária em uma corda fazendo com que uma onda progressiva seja refletida em uma das extremidades da corda e interfira consigo mesma. A onda (original) incidente e a onda refletida podem ser descritas pelas Eqs. 16-58 e 16-59, respectivamente, e se combinam para formar uma onda estacionária.

$$y'(x,t) = \overbrace{\underbrace{[2y_m \operatorname{sen} kx]}_{\text{Termo de amplitude}}\underbrace{\cos \omega t}_{\text{Termo oscilatório}}}^{\text{Deslocamento}}$$

FIG. 16-20 A onda resultante da Eq. 16-60 é uma onda estacionária, produzida pela interferência de duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda que se propagam em sentidos opostos.

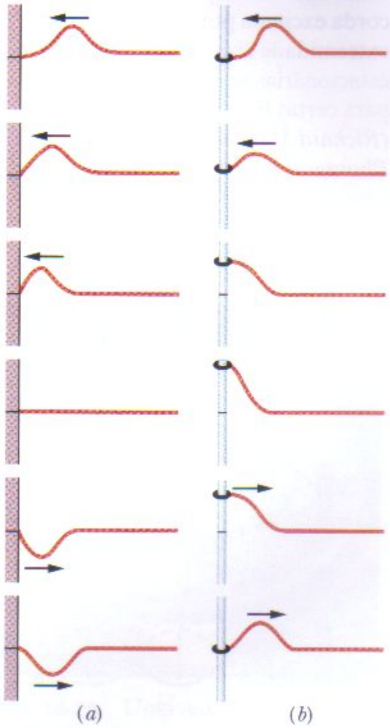


FIG. 16-21 (*a*) Um pulso proveniente da direita é refletido na extremidade esquerda da corda, que está amarrada em uma parede. Note que o pulso refletido sofre uma inversão em relação ao pulso incidente. (*b*) Neste caso, a extremidade esquerda da corda está amarrada em um anel que pode deslizar sem atrito para cima e para baixo em uma barra, e o pulso não é invertido pela reflexão.

Na Fig. 16-21 usamos um pulso isolado para mostrar como acontecem essas reflexões. Na Fig. 16-21*a* a corda está fixa na extremidade esquerda. Quando um pulso chega a essa extremidade exerce uma força para cima sobre o suporte (a parede). De acordo com a terceira lei de Newton, o suporte exerce uma força oposta, de mesmo módulo, sobre a corda. Essa força produz um pulso que se propaga no sentido oposto ao do pulso incidente. Em uma reflexão "dura" como esta existe um nó no suporte, pois a corda está fixa. Isso significa que o pulso refletido e o pulso incidente devem ter sinais opostos para se cancelarem nesse ponto.

Na Fig. 16-21*b* a extremidade esquerda da corda está presa a um anel que pode deslizar sem atrito ao longo de uma barra. Quando o pulso incidente chega a esse ponto o anel se desloca para cima ao longo da barra. Ao se mover o anel puxa a corda, esticando-a e produzindo um pulso refletido com o mesmo sinal e mesma amplitude que o pulso incidente. Assim, em uma reflexão "macia" como essa os pulsos incidente e refletido se reforçam, criando um antinó na extremidade da corda; o deslocamento máximo do anel é duas vezes maior que a amplitude de um dos pulsos.

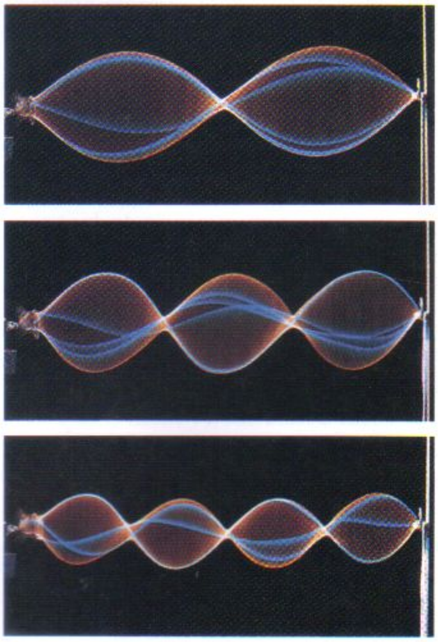


FIG. 16-22 Fotografias estroboscópicas revelam ondas estacionárias (imperfeitas) em uma corda excitada por um oscilador na extremidade esquerda. As ondas estacionárias se formam apenas para certas freqüências de oscilação. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

TESTE 5 Duas ondas com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda interferem em três situações diferentes para produzir ondas resultantes descritas pelas seguintes equações:

(1) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x - 4t)$
(2) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x)\cos(4t)$
(3) $y'(x,t) = 4 \operatorname{sen}(5x + 4t)$.

Em que situação as duas ondas estão se propagando (a) no sentido positivo de x, (b) no sentido de negativo de x e (c) em sentidos opostos?

16-13 | Ondas Estacionárias e Ressonância

Considere uma corda, por exemplo, uma corda de violão, que está esticada entre duas presilhas. Suponha que produzimos uma onda senoidal contínua de uma certa freqüência que se propaga, digamos, para a direita. Quando a onda chega à extremidade direita é refletida e começa a se propagar de volta para a esquerda. Essa onda que se propaga para a esquerda encontra a onda que ainda se propaga para a direita. Quando a onda que se propaga para a esquerda chega à extremidade esquerda é refletida mais uma vez, e a nova onda refletida começa a se propagar para a direita, encontrando as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita. Dessa forma, logo temos muitas ondas superpostas que interferem entre si.

Para certas freqüências a interferência produz uma onda estacionária (ou **modo de oscilação**) com nós e grandes antinós, como os da Fig. 16-22. Dizemos que uma onda estacionária desse tipo é gerada quando existe **ressonância**, e que a corda *ressoa* nessas freqüências, conhecidas como **freqüências de ressonância**. Se a corda é excitada em uma freqüência que não é uma das freqüências de ressonância não se forma uma onda estacionária. Nesse caso a interferência das ondas que se propagam para a esquerda com as que se propagam para a direita resulta em pequenas (talvez imperceptíveis) oscilações na corda.

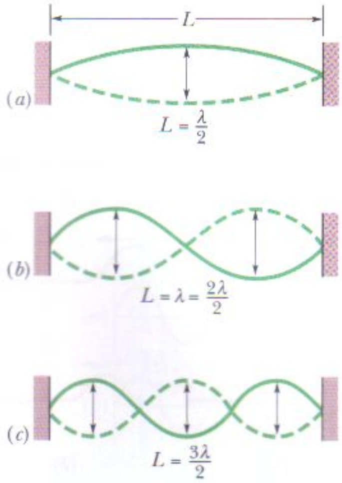


FIG. 16-23 Uma corda, esticada entre dois suportes, oscila com ondas estacionárias. (*a*) O padrão mais simples possível é o de *meio comprimento de onda*, mostrado na figura pela posição da corda nos pontos de máximo deslocamento (linhas contínua e tracejada). (*b*) O segundo padrão mais simples é o de um comprimento de onda. (*c*) O terceiro padrão mais simples é o de um e meio comprimento de onda.

Suponha que uma corda esteja fixada a duas presilhas separadas por uma distância L. Para encontrarmos expressões para as freqüências de ressonância da corda observamos que deve existir um nó em cada extremidade, pois as extremidades são fixas e não podem oscilar. A configuração mais simples que satisfaz essa condição é a da Fig. 16-23*a*, que mostra a corda nas posições extremas (uma representada por uma linha contínua e a outra por uma linha tracejada). Existe apenas um antinó, no centro da corda. Note que o comprimento L da corda é igual a meio comprimento de onda. Assim, para essa configuração $\lambda/2 = L$. Essa condição nos diz que para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita produzam essa configuração por interferência devem ter um comprimento de onda $\lambda = 2L$.

Uma segunda configuração simples que satisfaz o requisito de que existam nós nas extremidades fixas aparece na Fig. 16-23*b*. Essa configuração tem três nós e dois antinós. Para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita a excitem precisam ter um comprimento de onda $\lambda = L$. Uma terceira configuração é a que aparece na Fig. 16-23*c*, com quatro nós e três antinós, e o comprimento de onda é $\lambda = 2L/3$. Poderíamos continuar essa progressão desenhando configurações cada vez mais complicadas. Em cada passo da progressão o padrão teria um nó e um antinó a mais que o passo anterior, e um meio comprimento de onda adicional seria acomodado na distância L.

Assim, uma onda estacionária pode ser excitada em uma corda de comprimento L por uma onda cujo comprimento de onda satisfaz a condição

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16-65}$$

As freqüências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda podem ser calculadas usando a Eq. 16-13:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16-66}$$

Onde v é a velocidade das ondas progressivas na corda.

A Eq. 16-66 nos diz que as freqüências de ressonância são múltiplos inteiros da menor freqüência de ressonância, $f = v/2L$, que corresponde a $n = 1$. O modo de oscilação com a menor freqüência é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. O *segundo harmônico* é o modo de oscilação com $n = 2$, o *terceiro harmônico* é o modo com $n = 3$, e assim por diante. As freqüências associadas a esses modos costumam ser chamadas de f_1, f_2, f_3, e assim por diante. O conjunto de todos os modos de oscilação possíveis é chamado de **série harmônica**, e n é chamado de **número harmônico** do enésimo harmônico.

Para uma certa corda submetida a uma certa tensão cada freqüência de ressonância corresponde a um certo padrão de oscilação. Assim, se a freqüência está na faixa de sons audíveis é possível "ouvir" a forma da corda. A ressonância também pode ocorrer em duas dimensões (como na superfície do tímpano da Fig. 16-24) e em três dimensões (como nos balanços e torções induzidos pelo vento em um edifício).

FIG. 16-24 Uma das muitas ondas estacionárias possíveis para a membrana de um tímpano, visualizada através de um pó escuro espalhado sobre a membrana. Quando a membrana é posta para vibrar em uma única freqüência por um oscilador mecânico situado no canto superior esquerdo da figura o pó se acumula nos nós, que são circunferências e linhas retas neste exemplo bidimensional. *(Cortesia de Thomas D. Rossing, Northern Illinois University)*

Passarelas e Pistas de Dança

Logo que a Ponte do Milênio sobre o rio Tâmisa foi inaugurada o problema das oscilações não existia. As passadas dos pedestres produziam forças verticais e horizontais na ponte que tendiam a excitar o segundo harmônico da ponte (que se parece com o segundo harmônico de uma corda), mas os pedestres eram poucos e seus movimentos estavam fora de fase. Quando o número de pedestres ultrapassou um certo valor crítico, porém, as oscilações aumentaram e tornou-se difícil caminhar na ponte. Para manter o equilíbrio os pedestres começaram a sincronizar os passos com o balanço da ponte, o que agravou o problema e obrigou as autoridades a fecharem a ponte até que um sistema de amortecedores (veja o Exemplo 15-3) fosse instalado.

Oscilações do mesmo tipo podem acontecer quando os espectadores começam a pular ou balançar o corpo de forma sincronizada em um estádio de futebol ou em uma pista de dança. A pior situação talvez seja aquela em que existe uma pista de dança suspensa em um espetáculo de rock. Quando os espectadores começam a pular ao ritmo da música podem excitar uma ressonância do piso, cuja freqüência de ressonância costuma ser da ordem de 2 Hz. A amplitude das oscilações pode aumentar rapidamente à medida que mais e mais pessoas são forçadas a sincronizar seus movimentos, provocando o desabamento da estrutura. Para evitar essa possibilidade os códigos de construção modernos proíbem que as pistas de dança suspensas tenham freqüências de ressonância menores que 5 Hz.

TESTE 6 Na série de freqüências de ressonância a seguir, uma freqüência (menor que 400 Hz) está faltando: 150, 225, 300, 375 Hz. (a) Qual é a freqüência que falta? (b) Qual é a freqüência do sétimo harmônico?

Exemplo 16-8 Aumente sua capacidade

A Fig. 16-25 mostra a oscilação ressonante de uma corda de massa $m = 2{,}500$ g e comprimento $L = 0{,}800$ m sob uma tensão $\tau = 325{,}0$ N. Qual é o comprimento de onda λ das ondas transversais responsáveis pela onda estacionária mostrada na figura e qual é o número harmônico n? Qual é a freqüência f das ondas transversais e das oscilações dos elementos da corda? Qual é o módulo máximo da velocidade u_m do elemento da corda que oscila no ponto de coordenada $x = 0{,}180$ m (o eixo x está indicado na figura)? Para que deslocamento do elemento a velocidade transversal é máxima?

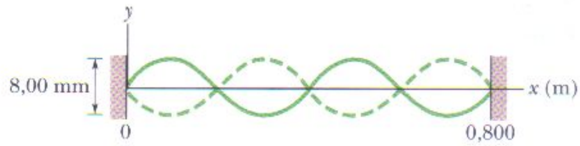


FIG. 16-25 Oscilações ressonantes em uma corda sob tensão.

IDÉIAS-CHAVE (1) As ondas transversais que produzem uma onda estacionária têm um comprimento de onda tal que o comprimento L da corda é igual a um número inteiro n de meios comprimentos de onda. (2) A freqüência dessas ondas e das oscilações dos elementos da corda é dada pela Eq. 16-66 ($f = nv/2L$). (3) O deslocamento de um elemento da corda em função da posição x e do tempo t é dado pela Eq. 16-60:

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}67)$$

Comprimento de onda e número harmônico: Na Fig. 16-25 a linha cheia, que representa um instantâneo das oscilações, mostra que o comprimento $L = 0{,}800$ m acomoda dois comprimentos de onda das oscilações. Assim, temos:

$$2\lambda = \mathrm{L},$$

ou

$$\lambda = \frac{L}{2}. \qquad (16\text{-}68)$$

$$= \frac{0{,}800 \text{ m}}{2} = 0{,}400 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Contando o número de meios comprimentos de onda na Fig. 16-25, vemos que o número harmônico é

$$n = 4. \qquad \text{(Resposta)}$$

Chegaríamos à mesma conclusão comparando as Eqs. 16-68 e 16-65 ($\lambda = 2L/n$). Assim, a corda está oscilando no quarto harmônico.

Freqüência: Podemos determinar a freqüência f das ondas transversais a partir da Eq. 16-13 ($v = \lambda/f$) se conhecermos a velocidade v das ondas. A velocidade é dada pela Eq. 16-26, mas devemos substituir a massa específica linear desconhecida μ por m/L. O resultado é o seguinte:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{(325 \text{ N})(0{,}800 \text{ m})}{2{,}50 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 322{,}49 \text{ m/s}.$$

Explicitando f na Eq. 16-13, temos:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{322{,}49 \text{ m/s}}{0{,}400 \text{ m}}$$

$$= 806{,}2 \text{ Hz} \approx 806\text{Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que obtemos o mesmo resultado usando a Eq. 16-66:

$$f = n\frac{v}{2L} = 4\frac{322{,}49 \text{ m/s}}{2(0{,}800 \text{ m})}$$

$$= 806 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que 806 Hz não só é a freqüência das ondas responsáveis pela produção do quarto harmônico, mas também a freqüência da oscilação vertical dos elementos da corda da Fig. 16-25. É também a freqüência do som produzido pela corda.

Velocidade transversal: O deslocamento y' do elemento da corda situado na coordenada x é dado pela Eq. 16-67 em função do tempo t. O fator $\cos \omega t$ é responsável pela variação com o tempo e, portanto, pelo "movimento" da onda estacionária. O fator $2y_m \operatorname{sen} kx$ estabelece a extensão do movimento. A maior extensão acontece nos antinós, onde $\operatorname{sen} kx$ é $+1$ ou -1 e a amplitude é $2y_m$. De acordo com a Fig. 16-25, $2y_m = 4{,}00$ mm e, portanto, $y_m = 2{,}00$ mm.

Queremos conhecer a velocidade transversal, ou seja, a velocidade de um elemento de corda na direção do eixo y. Para isso, derivamos a Eq. 16-67 em relação ao tempo:

$$u(x,t) = \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(2y_m \text{ sen } kx)\cos \omega t]$$

$$= [-2y_m\omega \text{ sen } kx] \text{ sen } \omega t. \qquad (16\text{-}69)$$

Na Eq. 16-69 o fator sen ωt é responsável pela variação da velocidade com o tempo, e o fator $-2y_m\omega$ sen kx estabelece a extensão dessa variação. A velocidade máxima é o valor absoluto dessa extensão:

$$u_m = |-2y_m\omega \text{ sen } kx|.$$

Para calcular esse valor para o elemento situado em $x = 0{,}180$ m observamos que $y_m = 2{,}00$ mm, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0{,}400 \text{ m})$ e $\omega = 2\pi f = 2\pi(806{,}2 \text{ Hz})$. Assim, a velocidade máxima do elemento situado em $x = 0{,}180$ m é

$$u_m = \left| -2(2{,}00\times10^{-3} \text{ m})(2\pi)(806{,}2 \text{ Hz}) \times \text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}400 \text{ m}}(0{,}180 \text{ m})\right)\right|$$

$$= 6{,}26 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar para que deslocamento do elemento a velocidade transversal é máxima poderíamos investigar o comportamento da Eq. 16-69. Entretanto, como freqüentemente acontece podemos poupar muito trabalho pensando um pouquinho. Como o elemento está descrevendo um movimento harmônico simples, a velocidade é máxima no ponto central da oscilação, ou seja, no instante em que o deslocamento é zero.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 2: *Harmônicos em uma Corda* Quando precisamos obter informações a respeito de um certo harmônico presente em uma corda esticada de comprimento L desenhamos primeiro o harmônico (como na Fig. 16-23). Para representar, digamos, o quinto harmônico devemos desenhar cinco arcos entre as extremidades da corda. Isso significa que a corda é ocupada por cinco arcos de largura $\lambda/2$. Assim, $5(\lambda/2) = L$ e $\lambda = 2L/5$. Em seguida podemos usar a Eq. 16-13 ($f = v/\lambda$) para calcular a freqüência do harmônico.

Não se esqueça de que o comprimento de onda do harmônico depende apenas do comprimento L da corda, mas a freqüência depende também da velocidade v da onda, que é estabelecida pela tensão e pela massa específica linear da corda através da Eq. 16-26.

REVISÃO E RESUMO

Ondas Transversais e Longitudinais As ondas mecânicas podem existir apenas em meios materiais, e são governadas pelas leis de Newton. As ondas mecânicas **transversais**, como as que existem em uma corda esticada, são ondas nas quais as partículas do meio oscilam perpendicularmente à direção de propagação da onda. As ondas em que as partículas do meio oscilam na direção de propagação da onda são chamadas de ondas **longitudinais**.

Ondas Senoidais Uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo x pode ser representada pela função

$$y(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t), \qquad (16\text{-}2)$$

onde y_m é a **amplitude** da onda, k é o **número de onda**, ω é a **freqüência angular** e $kx - \omega t$ é a **fase**. O **comprimento de onda** λ está relacionado a k através da equação

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (16\text{-}5)$$

O **período** T e a **freqüência** f da onda estão relacionados a ω através da equação

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \qquad (16\text{-}9)$$

Finalmente, a **velocidade** v da onda está relacionada a esses outros parâmetros através das equações

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \qquad (16\text{-}13)$$

Equação de uma Onda Progressiva Qualquer função da forma

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t) \qquad (16\text{-}17)$$

pode representar uma **onda progressiva** com uma velocidade dada pela Eq. 16-13 e uma forma de onda dada pela forma matemática da função h. O sinal positivo mostra que a onda se propaga no sentido negativo do eixo x, e o sinal negativo mostra que a onda se propaga no sentido positivo.

Velocidade de Onda em uma Corda Esticada A velocidade de uma onda em uma corda esticada é determinada pelas propriedades da corda. A velocidade em uma corda com tensão τ e massa específica linear μ é dada por

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \qquad (16\text{-}26)$$

Potência A **potência média**, ou taxa média, com a qual a energia é transmitida por uma onda senoidal em uma corda esticada é dada por

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_m^2. \qquad (16\text{-}33)$$

Superposição de Ondas Quando duas ou mais ondas se propagam no mesmo meio o deslocamento de qualquer partícula do meio é a soma dos deslocamentos que seriam provocados pelas ondas agindo separadamente.

Interferência de Ondas Duas ondas senoidais em uma mesma corda sofrem **interferência**, somando-se ou cancelando-se de acordo com o princípio da superposição. Se as duas ondas se propagam no mesmo sentido e têm a mesma amplitude y_m e a mesma freqüência angular ω (e, portanto, o mesmo comprimento de onda λ), mas têm uma **diferença de fase** ϕ, o resultado é uma única onda com esta mesma freqüência:

$$y'(x, t) = [2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \qquad (16\text{-}51)$$

Se $\phi = 0$, as ondas têm fases iguais e a interferência é totalmente construtiva; se $\phi = \pi$ rad, as ondas têm fases opostas e a interferência é totalmente destrutiva.

Fasores Uma onda $y(x, t)$ pode ser representada por um **fasor**, um vetor de módulo igual à amplitude y_m da onda que gira em torno da origem com uma velocidade angular igual à freqüência angular ω da onda. A projeção do fasor em um eixo vertical fornece o deslocamento y de um ponto situado no trajeto da onda.

Ondas Estacionárias A interferência de duas ondas senoidais iguais que se propagam em sentidos opostos produz **ondas estacionárias**. No caso de uma corda com as extremidades fixas, a onda estacionária é dada por

$$y'(x, t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}60)$$

As ondas estacionárias possuem pontos em que o deslocamento é nulo, chamados **nós**, e pontos em que o deslocamento é máximo, chamados **antinós**.

Ressonância Ondas estacionárias podem ser produzidas em uma corda através da reflexão de ondas progressivas nas extremidades da corda. Se uma extremidade é fixa, deve ser a posição de um nó. Isso limita as freqüências possíveis para as ondas estacionárias em uma dada corda. Cada freqüência possível é uma **freqüência de ressonância**, e a onda estacionária correspondente é um **modo de oscilação**. Para uma corda esticada de comprimento L com as extremidades fixas as freqüências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (16\text{-}66)$$

O modo de oscilação correspondente a $n = 1$ é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*; o modo correspondente a $n = 2$ é o *segundo harmônico*, e assim por diante.

PERGUNTAS

1 A Fig. 16-26*a* mostra um instantâneo de uma onda que se propaga no sentido positivo de x em uma corda sob tensão. Quatro elementos da corda estão indicados por letras. Para cada um desses elementos determine se, no momento do instantâneo, o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso. (*Sugestão:* Imagine a onda passando pelos quatro elementos da corda como se estivesse assistindo a um vídeo do movimento da onda.)

A Fig. 16-26*b* mostra o deslocamento em função do tempo de um elemento da corda situado, digamos, em $x = 0$. Nos instantes indicados por letras o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso?

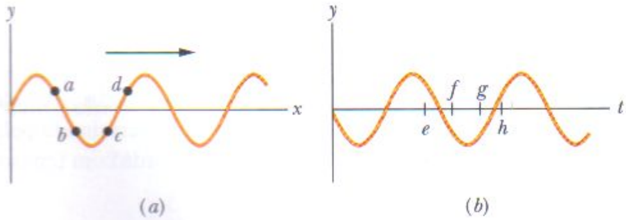


FIG. 16-26 Pergunta 1.

2 A Fig. 16-27 mostra três ondas que são produzidas *separadamente* em uma corda que está esticada ao longo de um eixo x e submetida a uma certa tensão. Ordene as ondas de acordo com (a) o comprimento de onda, (b) as velocidades e (c) a freqüência angular, em ordem decrescente.

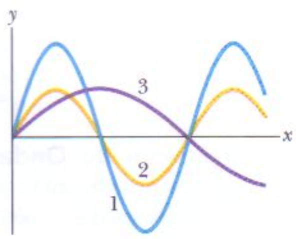


FIG. 16-27 Pergunta 2.

3 As quatro ondas a seguir são produzidas em quatro cordas com a mesma massa específica linear (x está em metros e t em segundos). Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade, (b) com a tensão na corda, em ordem decrescente:

(1) $y_1 = (3 \text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 3t)$, (3) $y_3 = (1 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4x - t)$,
(2) $y_2 = (6 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2x - t)$, (4) $y_4 = (2 \text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 2t)$.

4 Na Fig. 16-28 a onda 1 é formada por um pulso retangular com 4 unidades de altura e largura d e um vale retangular com 2 unidades de profundidade e largura d. A onda se propaga para a direita ao longo de um eixo x. As opções 2, 3 e 4 são ondas semelhantes, com a mesma altura, profundidade e largura, que se propagam para a esquerda no mesmo eixo, passando pela onda 1. A onda 1, que se propaga para a direita, e uma das ondas que se propagam para a esquerda interferem ao passar uma pela outra. Com qual das ondas que se propagam para a esquerda a interferência produz, momentaneamente, (a) o vale mais profundo, (b) uma linha reta e (c) um pulso retangular com $2d$ de largura?

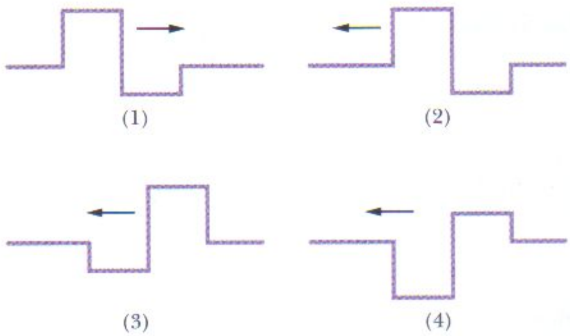


FIG. 16-28 Pergunta 4.

5 Uma onda senoidal é produzida em uma corda sob tensão transportando energia a uma taxa média $P_{\text{méd},1}$. Duas ondas, iguais à primeira, são em seguida produzidas na corda com uma diferença de fase ϕ de 0; 0,2, ou 0,5 comprimento de onda. (a) Apenas com cálculos mentais, ordene essas opções de ϕ de acordo com a taxa média com a qual as ondas transportam energia, em ordem decrescente. (b) Para a primeira opção de ϕ, qual é a taxa média em termos de $P_{\text{méd},1}$?

6 As amplitudes e as diferenças de fase para quatro pares de ondas com o mesmo comprimento de onda são (a) 2 mm, 6 mm e π rad; (b) 3 mm, 5 mm e π rad; (c) 7 mm, 9 mm e π rad; (d) 2 mm, 2 mm e 0 rad. Todos os pares se propagam no mesmo sentido na mesma corda. Sem executar cálculos, ordene os quatro pares de acordo com a amplitude da onda resultante em ordem decrescente. (*Sugestão:* Construa diagramas fasoriais.)

7 Se você começa com duas ondas senoidais de mesma amplitude que se propagam em fase em uma corda e desloca a fase de uma delas de 5,4 comprimentos de onda, que tipo de interferência ocorre na corda?

8 Se o sétimo harmônico é excitado em uma corda, (a) quantos nós estão presentes e (b) no ponto médio existe um nó, um antinó ou um estado intermediário? Se em seguida é excitado o sexto harmônico, (c) o comprimento de onda da ressonância é maior ou menor que o do sétimo harmônico e (d) a freqüência de ressonância é maior ou menor?

9 A Fig. 16-29 mostra os diagramas fasoriais de três situações nas quais duas ondas se propagam na mesma corda. As seis ondas têm a mesma amplitude. Ordene as situações de acordo com a amplitude da onda resultante, em ordem decrescente.

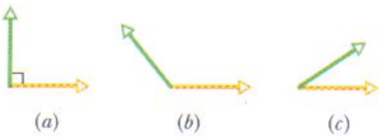


FIG. 16-29 Pergunta 9.

10 (a) Se uma onda estacionária em uma corda é dada por

$$y'(t) = (3\text{ mm})\,\text{sen}(5x)\cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$? (b) Se a onda estacionária é dada por

$$y'(t) = (3\text{ mm})\,\text{sen}(5x + \pi/2)\cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$?

11 Duas cordas A e B possuem o mesmo comprimento e a mesma massa específica linear, mas a corda B está submetida a uma tensão maior que a corda A. A Fig. 16-30 mostra quatro situações, de (a) a (d), nas quais existem ondas estacionárias nas duas cordas. Em que situações existe a possibilidade de que as cordas A e B estejam oscilando com a mesma freqüência de ressonância?

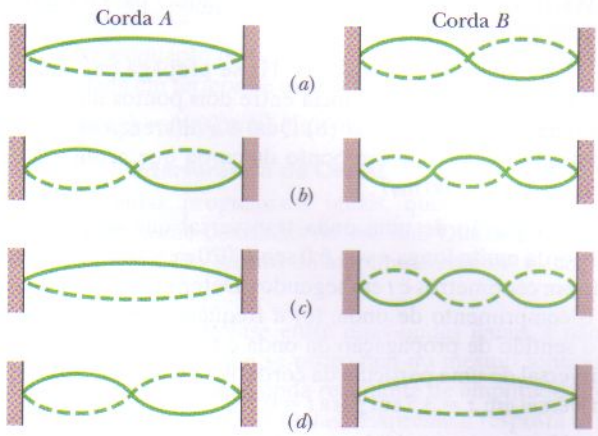


FIG. 16-30 Pergunta 11.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva

•1 Uma onda possui uma freqüência angular de 110 rad/s e um comprimento de onda de 1,80 m. Calcule (a) o número de onda e (b) a velocidade da onda.

•2 Um escorpião da areia pode detectar a presença de um besouro (sua presa) pelas ondas que o movimento do besouro produz na superfície da areia (Fig. 16-31). As ondas são de dois tipos: ondas transversais, que se propagam com uma velocidade $v_t = 50$ m/s, e ondas longitudinais, que se propagam com uma velocidade $v_l = 150$ m/s. Se um movimento brusco produz essas ondas o escorpião é capaz de determinar a que distância se encontra o besouro a partir da diferença Δt entre os instantes em que as duas ondas chegam à perna que está mais próxima do besouro. Se $\Delta t = 4{,}0$ ms, a que distância está o besouro?

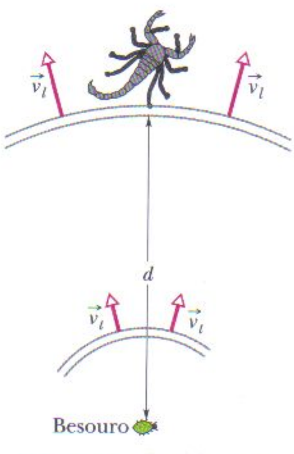


FIG. 16-31 Problema 2.

•3 Uma onda senoidal se propaga em uma corda. O tempo necessário para que um certo ponto da corda se mova do deslocamento máximo até zero é 0,170 s. Quais são (a) o período e (b) a freqüência da onda? (c) O comprimento de onda é 1,40 m; qual é a velocidade da onda?

•4 *Uma onda humana.* Uma *ola* é uma onda, criada pela torcida, que se propaga em estádios durante eventos esportivos (Fig. 16-32). Quando a onda chega a um grupo de espectadores eles ficam de pé com os braços levantados e depois tornam a se sentar. Em qualquer instante a largura w da onda é a distância entre a borda dianteira (as pessoas que estão começando a se levantar) e a borda traseira (as pessoas que estão começando a se sentar). Suponha que uma *ola* percorre uma distância de 853 assentos de um estádio em 39 s e que os espectadores levam, em média, 1,8 s para responder à passagem da onda levantando-se e voltando a se sentar. Determine (a) a velocidade v da onda (em assentos por segundo) e (b) a largura w da onda (em número de assentos).

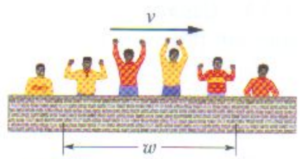


FIG. 16-32 Problema 4.

•5 Se $y(x, t) = (6{,}0\text{ mm})\,\text{sen}(kx + (600\text{ rad/s})t + \phi)$ descreve uma onda que se propaga em uma corda, quanto tempo um ponto da corda leva para se mover entre os deslocamentos $y = +2{,}0$ mm e $y = -2{,}0$ mm?

••6 A Fig. 16-33 mostra a velocidade transversal u em função do tempo t para o ponto de uma corda situado em $x = 0$, quando uma onda passa por ele. A escala do eixo vertical é definida por $u_s = 4{,}0$ m/s. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto, substituindo-o na função $y(x,t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

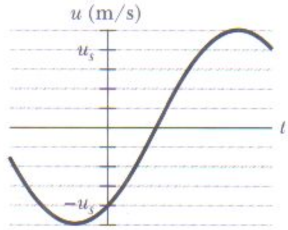


FIG. 16-33 Problema 6.

••7 Uma onda senoidal de 500 Hz se propaga em uma corda a 350 m/s. (a) Qual é a distância entre dois pontos da corda cuja diferença de fase é $\pi/3$ rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos de um ponto da corda que acontecem com um intervalo de 1,00 ms?

••8 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda muito longa é $y = 6{,}0 \operatorname{sen}(0{,}020\pi x + 4{,}0\pi t)$, onde x e y estão em centímetros e t em segundos. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a freqüência, (d) a velocidade, (e) o sentido de propagação da onda e (f) a máxima velocidade transversal de uma partícula da corda. (g) Qual é o deslocamento transversal em $x = 3{,}5$ cm para $t = 0{,}26$ s?

••9 Uma onda senoidal transversal se propaga em uma corda no sentido positivo de um eixo x com uma velocidade de 80 m/s. Em $t = 0$ uma partícula da corda situada em $x = 0$ tem um deslocamento transversal de 4,0 cm em relação à posição de equilíbrio, e não está se movendo. A velocidade transversal máxima da partícula situada em $x = 0$ é 16 m/s. (a) Qual é a freqüência da onda? (b) Qual é o comprimento de onda? Se a equação de onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (c) y_m, (d) k, (e) ω, (f) ϕ e (g) o sinal que precede ω.

••10 A função $y(x, t) = (15{,}0 \text{ cm}) \cos(\pi x - 15\pi t)$, com x em metros e t em segundos, descreve uma onda em uma corda esticada. Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda no instante em que o ponto possui um deslocamento $y = 12{,}0$ cm?

••11 Uma onda senoidal que se propaga em uma corda é mostrada duas vezes na Fig. 16-34, antes e depois que o pico A se desloque de 6,0 cm no sentido positivo de um eixo x em 4,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 6{,}0$ mm. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

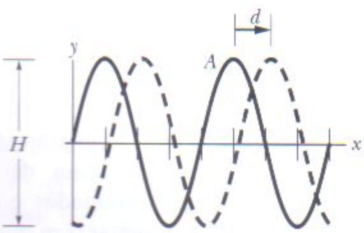


FIG. 16-34 Problema 11.

••12 Uma onda senoidal se propaga em uma corda sob tensão. A Fig. 16-35 mostra a inclinação da corda em função da posição no instante $t = 0$. A escala do eixo x é definida por $x_s = 0{,}80$ m. Qual é a amplitude da onda?

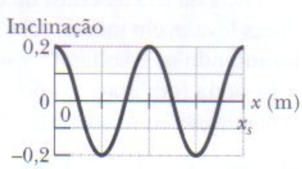


FIG. 16-35 Problema 12.

••13 Uma onda transversal senoidal com 20 cm de comprimento de onda se propaga em uma corda no sentido positivo de um eixo x. O deslocamento y da partícula na corda situada em $x = 0$ é dado na Fig. 16-36 em função do tempo t. A escala do eixo vertical é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A equação da onda deve ser da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$. (a) Em $t = 0$ o gráfico de y em função de x tem a forma de uma função seno positiva ou de uma função seno negativa? Determine (b) y_m, (c) k, (d) ω, (e) ϕ, (f) o sinal que precede ω e (g) a velocidade da onda. (h) Qual é a velocidade transversal da partícula em $x = 0$ para $t = 5{,}0$ s?

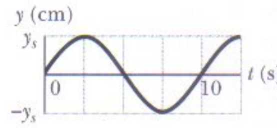


FIG. 16-36 Problema 13.

seção 16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

•14 A tensão em um fio preso nas duas extremidades é duplicada sem que o comprimento do fio sofra uma variação apreciável. Qual é a razão entre a nova e a antiga velocidade das ondas transversais que se propagam no fio?

•15 Qual é a velocidade de uma onda transversal em uma corda de 2,00 m de comprimento e 60,0 g de massa sujeita a uma tensão de 500 N?

•16 A corda mais pesada e a corda mais leve de um certo violino têm uma massa específica linear de 3,0 e 0,29 g/m, respectivamente. Qual é a razão entre o diâmetro da corda mais leve e o da corda mais pesada, supondo que as cordas são feitas do mesmo material?

•17 Uma corda esticada tem uma massa específica linear de 5,00 g/cm e está sujeita a uma tensão de 10,0 N. Uma onda senoidal na corda tem uma amplitude de 0,12 mm, uma freqüência de 100 Hz e está se propagando no sentido negativo de um eixo x. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

•18 A velocidade de uma onda transversal em uma corda é 170 m/s quando a tensão da corda é 120 N. Qual deve ser o valor da tensão para que a velocidade da onda aumente para 180 m/s?

•19 A massa específica linear de uma corda é $1{,}6 \times 10^{-4}$ kg/m. Uma onda transversal na corda é descrita pela equação

$$y = (0{,}021 \text{ m}) \operatorname{sen}[(2{,}0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t].$$

Quais são (a) a velocidade da onda e (b) a tensão da corda?

•20 A equação de uma onda transversal em uma corda é

$$y = (2{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

A tensão da corda é 15 N. (a) Qual é a velocidade da onda? (b) Determine a massa específica linear da corda em gramas por metro.

••21 Uma onda transversal senoidal se propaga em uma corda no sentido negativo de um eixo x. A Fig. 16-37 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição no instante $t = 0$; a escala do eixo y é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A tensão da corda é 3,6 N e a massa específica linear é 25 g/m. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a velocidade da onda e (d) o período da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda. Se a onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (f) k, (g) ω, (h) ϕ e (i) o sinal que precede ω.

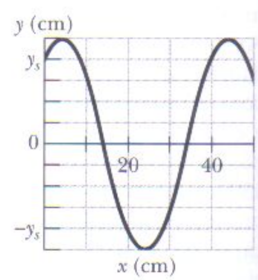


FIG. 16-37 Problema 21.

••22 Uma onda senoidal se propaga numa corda com uma velocidade de 40 cm/s. O deslocamento da corda em $x = 10$ cm varia com o tempo de acordo com a equação y = (5,0 cm) sen [1,0 − (4,0 s^{-1})t]. A massa específica linear da corda é 4,0 g/cm. Quais são (a) a freqüência e (b) o comprimento de onda da onda? Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (c) y_m, (d) k, (e) ω, e (f) o sinal que precede ω. (g) Qual é a tensão da corda?

••23 Um fio de 100 g é mantido sob uma tensão de 250 N com uma extremidade em $x = 0$ e a outra em x = 10,0 m. No instante $t = 0$ o pulso 1 começa a se propagar no fio a partir do ponto x = 10,0 m. No instante t = 30,0 ms o pulso 2 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 0$. Em que ponto x os pulsos começam a se superpor?

•••24 Na Fig. 16-38a, a corda 1 tem uma massa específica linear 3,00 g/m e a corda 2 tem uma massa específica linear 5,00 g/m. As cordas estão submetidas à tensão produzida por um bloco suspenso de massa M = 500 g. Calcule a velocidade da onda (a) da corda 1 e (b) da corda 2. (*Sugestão:* Quando uma corda envolve metade de uma polia exerce sobre a polia uma força duas vezes maior que a tensão na corda.) Em seguida, o bloco é dividido em dois blocos (com $M_1 + M_2 = M$) e o sistema é montado como na Fig. 16-38b. Determine (c) M_1 e (d) M_2 para que as velocidades das ondas nas duas cordas sejam iguais.

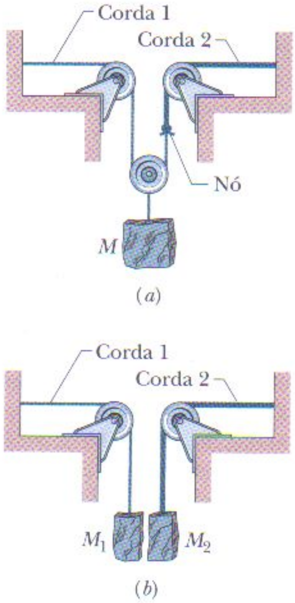


FIG. 16-38 Problema 24.

•••25 Uma corda uniforme de massa m e comprimento L está pendurada em um teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y, a distância da extremidade inferior, e é dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para atravessar a corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$.

seção 16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

•26 Uma corda na qual ondas podem se propagar tem 2,70 m de comprimento e 260 g de massa. A tensão da corda é 36,0 N. Qual deve ser a freqüência de ondas progressivas com uma amplitude de 7,70 mm para que a potência média seja 85,0 W?

••27 Uma onda senoidal é produzida em uma corda com uma massa específica linear de 2,0 g/m. Enquanto a onda se propaga a energia cinética dos elementos de massa ao longo da corda varia. A Fig. 16-39a mostra a taxa dK/dt com a qual a energia cinética passa pelos elementos da corda em um certo instante, em função da distância x ao longo da corda. A Fig. 16-37b é semelhante, exceto pelo fato de que mostra a taxa com a qual a energia cinética passa por um certo elemento de massa (situado em um certo ponto), em função do tempo t. Nos dois casos, a escala do eixo vertical é definida por R_s = 10 W. Qual é a amplitude da onda?

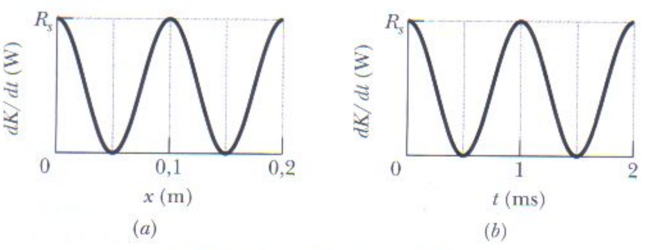


FIG. 16-39 Problema 27.

seção 16-8 A Equação de Onda

•28 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x, t) = (3{,}00\ \text{mm})\ \operatorname{sen}[(4{,}00\ \text{m}^{-1})x - (7{,}00\ \text{s}^{-1})t].$$

••29 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x, t) = (2{,}00\ \text{mm})[(20\ \text{m}^{-1})x - (4{,}0\ \text{s}^{-1})t]^{0{,}5}.$$

•••30 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada em termos de uma função genérica $h(x, t)$:

$$y(x, t) = (4{,}00\ \text{mm})\ h[(30\ \text{m}^{-1})x + (6{,}0\ \text{s}^{-1})t].$$

seção 16-10 Interferência de Ondas

•31 Duas ondas progressivas iguais, que se propagam no mesmo sentido, estão defasadas de $\pi/2$ rad. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_m das duas ondas?

•32 Que diferença de fase entre duas ondas iguais, a não ser pela constante de fase, que se propagam no mesmo sentido em corda esticada, produz uma onda resultante de amplitude 1,5 vez a amplitude comum das duas ondas? Expresse a resposta (a) em graus, (b) em radianos e (c) em comprimentos de onda.

••33 Duas ondas senoidais com a mesma amplitude de 9,00 mm e o mesmo comprimento de onda se propagam em uma corda que está esticada ao longo de um eixo x. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-40, antes e depois que o vale A se desloque de uma distância d = 56,0 cm em 8,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; H = 8,0 mm. Suponha que a equação de uma das ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi_1)$, onde $\phi_1 = 0$ e é preciso determinar o sinal que precede ω. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω, (d) ϕ_2 e (d) o sinal que precede ω.

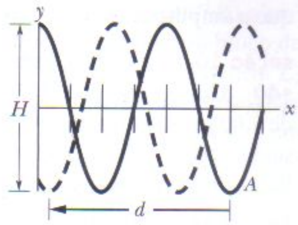


FIG. 16-40 Problema 33.

•••34 Uma onda senoidal de freqüência angular 1200 rad/s e amplitude 3,00 mm é produzida em uma corda de massa específica linear 2,00 g/m e 1200 N de tensão. (a) Qual é a taxa média com a qual a energia é transportada pela onda para a extremidade oposta da corda? (b) Se, ao mesmo tempo, uma onda igual se propaga em uma corda vizinha, de mesmas características, qual é a taxa média total com a qual a energia é transportada pelas ondas à extremidade oposta das duas cordas? Se, em vez disso, as duas ondas são produzidas ao mesmo tempo na *mesma* corda, qual é a taxa média total com a qual transportam energia quando a diferença de fase entre elas é (c) 0, (d) 0,4π rad e (e) π rad?

seção 16-11 Fasores

•35 Duas ondas senoidais de mesma freqüência se propagam no mesmo sentido em uma corda. Se y_{m1} = 3,0 cm, y_{m2} = 4,0 cm, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/2$ rad, qual é a amplitude da onda resultante?

••36 Duas ondas senoidais de mesma freqüência e no mesmo sentido são produzidas em uma corda esticada. Uma das ondas tem uma amplitude de 5,0 mm e a outra uma amplitude de 8,0 mm. (a) Que diferença de fase ϕ_1 entre as duas ondas resulta na menor amplitude da onda resultante? (b) Qual é essa amplitude mínima? (c) Que diferença de fase ϕ_2 entre as duas ondas resulta na maior amplitude da onda resultante? (d) Qual é essa amplitude máxima? (e) Qual é a amplitude resultante se o ângulo de fase é $(\phi_1 - \phi_2)/2$?

••37 Duas ondas senoidais de mesmo período, de amplitudes 5,0 e 7,0 mm, se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada; elas produzem uma onda resultante com uma amplitude de 9,0 mm. A constante de fase da onda de 5,0 mm é 0. Qual é a constante de fase da onda de 7,0 mm?

••38 Quatro ondas são produzidas na mesma corda e no mesmo sentido:

$$y_1(x,t) = (4{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (4{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}7\pi)$$
$$y_3(x,t) = (4{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\,\pi t + \pi)$$
$$y_4(x,t) = (4{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\pi t + 1{,}7\pi).$$

Qual é a amplitude da onda resultante?

••39 Duas ondas se propagam na mesma corda:

$$y_1(x,t) = (4{,}60 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (5{,}60 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}80\pi \text{ rad}).$$

Quais são (a) a amplitude e (b) o ângulo de fase (em relação à onda 1) da onda resultante? (c) Se uma terceira onda de amplitude 5,00 mm também é produzida na corda com o mesmo sentido que as duas primeiras, qual deve ser o ângulo de fase para que a amplitude da nova onda resultante seja máxima?

seção 16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

•40 Uma corda com 125 cm de comprimento tem uma massa de 2,00 g e uma tensão de 7,00 N. (a) Qual é a velocidade de uma onda nesta corda? (b) Qual é a freqüência de ressonância mais baixa desta corda?

•41 Quais são (a) a menor freqüência, (b) a segunda menor freqüência mais baixa e (c) a terceira menor freqüência das ondas estacionárias em um fio com 10,0 m de comprimento, 100 g de massa e uma tensão de 250 N?

•42 A corda *A* está esticada entre dois suportes separados por uma distância *L*. A corda *B*, com a mesma massa específica linear e a mesma tensão que a corda *A*, está esticada entre dois suportes separados por uma distância 4*L*. Considere os primeiros oito harmônicos da corda *B*. Para quais destes oito harmônicos de *B* a freqüência coincide com a freqüência (a) do primeiro harmônico de *A*, (b) do segundo harmônico de *A* e (c) do terceiro harmônico de *A*?

•43 Uma corda fixa nas duas extremidades tem 8,40 m de comprimento, uma massa de 0,120 kg e uma tensão de 96,0 N. (a) Qual é a velocidade das ondas na corda? (b) Qual é o maior comprimento de onda possível para uma onda estacionária na corda? (c) Determine a freqüência dessa onda.

•44 Duas ondas senoidais com comprimentos de onda e amplitudes iguais se propagam em sentidos opostos em uma corda com uma velocidade de 10 cm/s. Se o intervalo de tempo entre os instantes nos quais a corda fica reta é 0,50 s, qual é o comprimento de onda das ondas?

•45 Uma corda de violão de náilon tem uma massa específica linear de 7,20 g/m e está sujeita a uma tensão de 150 N. Os suportes fixos estão separados por uma distância $D = 90{,}0$ cm. A corda está oscilando da forma mostrada na Fig. 16-41. Calcule (a) a velocidade, (b) o comprimento de onda e (c) a freqüência das ondas progressivas cuja superposição produz a onda estacionária.

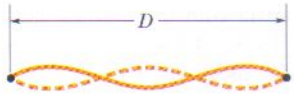


FIG. 16-41 Problema 45.

•46 Uma corda submetida a uma tensão τ_i oscila no terceiro harmônico com uma freqüência f_3, e as ondas na corda têm um comprimento de onda λ_3. Se a tensão é aumentada para $\tau_f = 4\tau_i$ e a corda é novamente posta para oscilar no terceiro harmônico, qual é (a) a freqüência de oscilação em termos de f_3 e (b) o comprimento de onda das ondas em termos de λ_3?

•47 Uma corda que está esticada entre suportes fixos separados por uma distância de 75,0 cm possui freqüências de ressonância de 420 e 315 Hz, com nenhuma outra freqüência de ressonância entre esses dois valores. Determine (a) a freqüência de ressonância mais baixa e (b) a velocidade da onda.

•48 Se uma linha de transmissão em um clima frio fica coberta de gelo, o aumento do diâmetro leva à formação de vórtices no vento que passa. As variações de pressão associadas aos vórtices podem fazer a linha oscilar (*galopar*), principalmente se a freqüência das variações de pressão coincide com uma das freqüências de ressonância da linha. Em linhas compridas, as freqüências de ressonância estão tão próximas que praticamente qualquer velocidade do vento pode excitar um modo de ressonância com amplitude suficiente para derrubar as torres de sustentação ou *curto-circuitar* as linhas. Se uma linha de transmissão tem um comprimento de 347 m, uma massa específica linear de 3,35 kg/m e uma tensão de 65,2 MN, quais são (a) a freqüência do modo fundamental e (b) a diferença de freqüência entre modos sucessivos?

•49 Uma das freqüências harmônicas de uma certa corda sob tensão é 325 Hz. A freqüência harmônica seguinte é 390 Hz. Qual é a freqüência harmônica que se segue à de 195 Hz?

••50 Uma corda sujeita a uma tensão de 200 N e fixa nas duas extremidades oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0{,}10 \text{ m}) (\operatorname{sen} \pi x/2) \operatorname{sen} 12\pi t,$$

onde $x = 0$ em uma das extremidades da corda, x está em metros e t está em segundos. Quais são (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária, qual é o período de oscilação?

••51 Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y' = (0{,}50 \text{ cm}) \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1}\right)x\right]\cos[(40\pi \text{ s}^{-1})t].$$

Quais são (a) a amplitude e (b) a velocidade das duas ondas (iguais, exceto pelo sentido de propagação) cuja superposição produz esta oscilação? (c) Qual é a distância entre os nós? (d) Qual é a velocidade transversal de uma partícula da corda no ponto $x = 1{,}5$ cm para $t = 9/8$ s?

••52 Uma onda estacionária em uma corda é descrita por

$$y(x,t) = 0{,}040 \,(\operatorname{sen} 5\pi x)\,(\cos 40\pi t),$$

onde x e y estão em metros e t em segundos. Para $x \ge 0$, qual é a localização do nó com (a) o menor, (b) o segundo menor e (c) o terceiro menor valor de x? (d) Qual é o período do movimento oscilatório de qualquer ponto (que não seja um nó)? Quais são (e) a velocidade e (f) as amplitudes das duas ondas progressivas que interferem para produzir esta onda? Para $t \geq 0$, quais são (g) o primeiro, (h) o segundo e (i) o terceiro instante em que todos os pontos da corda possuem velocidade transversal nula?

••53 Duas ondas são geradas em uma corda com 3,0 m de comprimento para produzir uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda com uma amplitude de 1,0 cm. A velocidade da onda é 100 m/s. Suponha que a equação de uma das ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

••54 Uma certa onda estacionária transversal em uma corda longa possui um antinó em $x = 0$ e um nó vizinho em $x = 0{,}10$ m. O deslocamento $y(t)$ da partícula da corda situada em $x = 0$ é mostrado na Fig. 16-42, onde a escala do eixo y é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. Para $t = 0{,}50$ s, qual é o deslocamento da partícula da corda situada (a) em $x = 0{,}20$ m e (b) em $x = 0{,}30$ m? Qual é a velocidade transversal da partícula situada em $x = 0{,}20$ (c) no instante $t = 0{,}50$ s e (d) no instante $t = 1{,}0$ s? (e) Plote a onda estacionária no instante $t = 0{,}50$ s no intervalo de $x = 0$ a $x = 0{,}40$ m.

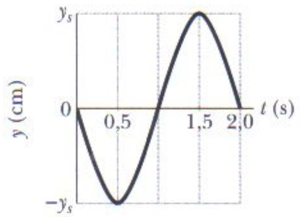


FIG. 16-42 Problema 54.

••55 Um gerador em uma das extremidades de uma corda muito longa produz uma onda dada por

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos\frac{\pi}{2}[(2{,}00 \text{ m}^{-1})x + (8{,}00 \text{ s}^{-1})t],$$

e um gerador na outra extremidade produz a onda

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos\frac{\pi}{2}[(2{,}00 \text{ m}^{-1})x - (8{,}00 \text{ s}^{-1})t].$$

Calcule (a) a freqüência, (b) o comprimento de onda e (c) a velocidade de cada onda. Para $x \geq 0$, qual é a posição do nó com (d) o menor, (e) o segundo menor e (f) o terceiro menor valor de x? Para $x \geq 0$, qual é a posição do antinó com (g) o menor, (h) o segundo menor e (i) o terceiro menor valor de x?

••56 Duas ondas senoidais com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda se propagam simultaneamente em uma corda esticada ao longo de um eixo x. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-43, uma vez com o antinó A na posição de máximo deslocamento para cima e outra, 6,0 ms depois, com o antinó A na posição de máximo deslocamento máximo para baixo. A distância entre as marcas do eixo x é 10 cm; $H = 1{,}80$ cm. A equação de uma das duas ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação para a outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

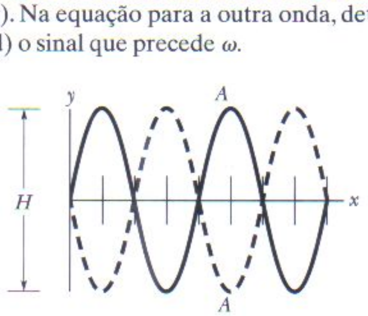


FIG. 16-43 Problema 56.

••57 As duas ondas a seguir se propagam em sentidos opostos em uma corda horizontal, criando uma onda estacionária em um plano vertical:

$$y_1(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4{,}00\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(4{,}00\pi x + 400\pi t),$$

onde x está em metros e t em segundos. Um antinó está localizado no ponto A. No intervalo de tempo que este ponto leva para passar da posição de deslocamento máximo para cima para a posição de deslocamento máximo para baixo, qual é o deslocamento de cada onda ao longo da corda?

••58 Na Fig. 16-44 uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto P e apoiada em um suporte no ponto Q, é tensionada por um bloco de massa m. A distância entre P e Q é $L = 1{,}20$ m, a massa específica linear da corda é $\mu = 1{,}6$ g/m e a freqüência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto P é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto Q. Qual deve ser o valor da massa m para que o oscilador produza na corda o quarto harmônico? (b) Qual é o modo produzido na corda pelo oscilador para $m = 1{,}00$ kg?

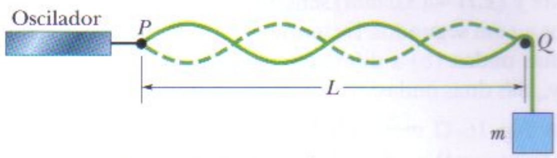


FIG. 16-44 Problemas 58 e 60.

•••59 Na Fig. 16-45 um fio de alumínio, de comprimento $L_1 = 60{,}0$ cm, seção reta $1{,}00 \times 10^{-2}$ cm^2 e massa específica 2,60 g/cm^3, está soldado a um fio de aço de massa específica 7,80 g/cm^3 e mesma seção reta. O fio composto, tensionado por um bloco de massa $m = 10{,}0$ kg, está disposto de tal forma que a distância L_2 entre o ponto de solda e a polia é 86,6 cm. Ondas transversais são excitadas no fio por uma fonte externa de freqüência variável; um nó está situado na polia. (a) Determine a menor freqüência que produz uma onda estacionária tendo o ponto de solda como um dos nós. (b) Quantos nós são observados para esta freqüência?

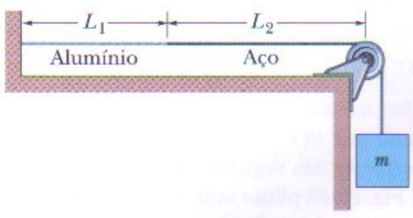


FIG. 16-45 Problema 59.

•••60 Na Fig. 16-44 uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto P e apoiada em um suporte no ponto Q, é tensionada por um bloco de massa m. A distância entre P e Q é $L = 1{,}20$ m, e a freqüência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto P é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto Q. Uma onda estacionária aparece quando a massa do bloco é 286,1 g ou 447,0 g, mas não aparece para nenhuma massa entre esses dois valores. Qual é a massa específica linear da corda?

Problemas Adicionais

61 Três ondas senoidais de mesma freqüência se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo x. Suas amplitudes são y_1, $y_1/2$ e $y_1/3$, e suas constantes de fase são 0, $\pi/2$ e π, respectivamente. Quais são (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante? (c) Plote a onda resultante no instante $t = 0$ e discuta seu comportamento quando t aumenta.

62 A Fig. 16-46 mostra o deslocamento y em função do tempo t do ponto de uma corda situado em $x = 0$ quando uma onda passa por esse ponto. A escala do eixo y é definida por $y_s = 6{,}0$ mm. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m$ sen$(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

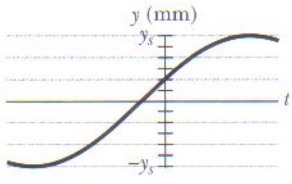


FIG. 16-46 Problema 62.

63 Duas ondas senoidais iguais, a não ser pela fase, se propagam no mesmo sentido em uma corda produzindo uma onda resultante $y'(x,t) = (3{,}0 \text{ mm})$ sen$(20x - 4{,}0t + 0{,}820 \text{ rad})$, com x em metros e t em segundos. Determine (a) o comprimento de onda λ das duas ondas, (b) a diferença de fase entre elas e (c) a amplitude y_m das duas ondas.

64 A Fig. 16-47 mostra a aceleração transversal a_y em função do tempo t do ponto $x = 0$ de uma corda, quando uma onda com a forma geral $y(x, t) = y_m$ sen$(kx - \omega t + \phi)$ passa pelo ponto. A escala do eixo vertical é definida por $a_s = 400$ m/s². Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* As calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

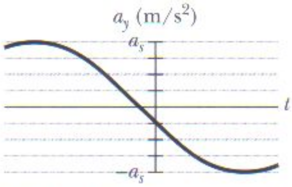


FIG. 16-47 Problema 64.

65 No instante $t = 0$ e na posição $x = 0$ de uma corda uma onda senoidal progressiva com uma freqüência angular de 440 rad/s tem um deslocamento $y = +4{,}5$ mm e uma velocidade transversal $u = -0{,}75$ m/s. Se a onda tem a forma geral $y(x, t) = y_m$ sen$(kx - \omega t + \phi)$, qual é a constante de fase ϕ?

66 Um pulso isolado, cuja forma de onda é dada por $h(x - 5t)$, com x em centímetros e t em segundos, é mostrado na Fig. 16-48 para $t = 0$. A escala do eixo vertical é definida por $h_s = 2$. Quais são (a) a velocidade e (b) o sentido de propagação do pulso? (c) Plote $h(x - 5t)$ em função de x para $t = 2$ s. (d) Plote $h(x - 5t)$ em função de t para $x = 10$ cm.

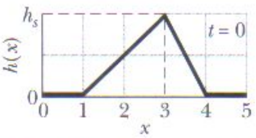


FIG. 16-48 Problema 66.

67 Uma onda transversal senoidal é gerada em uma extremidade de uma longa corda horizontal por uma barra que se move para cima e para baixo ao longo de uma distância de 1,00 cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma massa específica linear de 120 g/m e é mantida sob uma tensão de 90,0 N. Determine o valor máximo (a) da velocidade transversal u e (b) da componente transversal da tensão τ.

(c) Mostre que esses dois valores máximos calculados ocorrem para os mesmos valores da fase da onda. Qual é o deslocamento transversal y da corda nessas fases? (d) Qual é a taxa máxima de transferência de energia ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal y quando essa transferência máxima ocorre? (f) Qual é a taxa mínima de transferência de energia ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal y quando essa transferência mínima ocorre?

68 Duas ondas senoidais de 120 Hz, com a mesma amplitude, se propagam no sentido positivo de um eixo x em uma corda sob tensão. As ondas podem ser geradas em fase ou defasadas. A Fig. 16-49 mostra a amplitude y' da onda resultante em função da distância de defasagem (distância entre as ondas no mesmo instante). A escala do eixo vertical é definida por $y'_s = 6{,}0$ mm. Se as equações das duas ondas são da forma $y(x, t) = y_m$ sen$(kx \pm \omega t)$, quais são (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω?

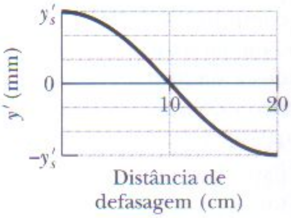


FIG. 16-49 Problema 68.

69 Uma onda transversal senoidal de amplitude y_m e comprimento de onda λ se propaga em uma corda esticada. (a) Determine a razão entre a velocidade máxima de uma partícula (a velocidade com a qual uma partícula da corda se move na direção transversal à corda) e a velocidade da onda. (b) Essa razão depende do material do qual é feita a corda?

70 Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido positivo de um eixo x tem uma amplitude de 2,0 cm, um comprimento de onda de 10 cm e uma freqüência de 400 Hz. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m$ sen$(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω. Quais são (e) a velocidade transversal máxima de um ponto da corda e (f) a velocidade da onda?

71 Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido negativo de um eixo x tem uma amplitude de 1,00 cm, uma freqüência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m$ sen$(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) ω, (c) k e (d) o sinal que precede ω.

72 Duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada. Para a onda 1, $y_m = 3{,}0$ mm e $\phi = 0$; para a onda 2, $y_m = 5{,}0$ mm e $\phi = 70°$. Quais são (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante?

73 Uma onda tem uma velocidade de 240 m/s e um comprimento de onda de 3,2 m. Quais são (a) a freqüência e (b) o período da onda?

74 A menor freqüência de ressonância de uma certa corda de violino é a da nota lá de concerto (440 Hz). Qual é a freqüência (a) do segundo e (b) do terceiro harmônico da corda?

75 Uma corda de 120 cm de comprimento está esticada entre dois suportes fixos. Quais são (a) o maior, (b) o segundo maior e (c) o terceiro maior comprimento de onda das ondas que se propagam na corda para produzir ondas estacionárias? (d) Esboce essas ondas estacionárias.

76 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = 0{,}15 \text{ sen}(0{,}79x - 13t),$$

onde x e y estão em metros e t está em segundos. (a) Qual é o deslocamento y em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s? Uma segunda onda é combinada com a primeira para produzir ondas estacionárias na corda. Se a equação da segunda onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (b) y_m, (c) k, (d) ω e (e) o sinal que precede ω. (f) Qual é o deslocamento da onda estacionária resultante em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s?

77 Um fio de 1,50 m de comprimento tem uma massa de 8,70 g e está sob uma tensão de 120 N. O fio é fixado rigidamente nas duas extremidades e posto para oscilar. (a) Qual é a velocidade das ondas no fio? Qual é o comprimento de onda das ondas que produzem ondas estacionárias com (b) meio comprimento de onda e (c) um comprimento de onda? Qual é a freqüência das ondas que produzem ondas estacionárias com (d) meio comprimento de onda e (e) um comprimento de onda?

78 Energia é transmitida a uma taxa P_1 por uma onda de freqüência f_1 em uma corda sob uma tensão τ_1. Qual é a nova taxa de transmissão de energia P_2, em termos de P_1, (a) se a tensão é aumentada para $\tau_2 = 4\tau_1$ e (b) se, em vez disso, a freqüência é reduzida para $f_2 = f_1/2$?

79 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = (2{,}0\ \text{mm})\ \operatorname{sen}[(20\ \text{m}^{-1})x - (600\ \text{s}^{-1})t].$$

Determine (a) a amplitude, (b) a freqüência, (c) a velocidade (incluindo o sinal) e (d) o comprimento de onda da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda.

80 As oscilações de um diapasão de 600 Hz produzem ondas estacionárias em uma corda presa nas duas extremidades. A velocidade das ondas na corda é 400 m/s. A onda estacionária tem dois comprimentos de onda e uma amplitude de 2,0 mm. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Escreva uma expressão para o deslocamento da corda em função da posição e do tempo.

81 Em um experimento com ondas estacionárias, uma corda de 90 cm de comprimento está presa a um dos braços de um diapasão excitado eletricamente, que oscila perpendicularmente à corda com uma freqüência de 60 Hz. A massa da corda é 0,044 kg. A que tensão a corda deve ser submetida (há pesos amarrados na outra extremidade) para oscilar com dois comprimentos de onda?

82 *Colete à prova de balas*. Quando um projétil veloz, como uma bala ou um fragmento de bomba, atinge um colete moderno à prova de balas o tecido do colete detém o projétil e impede a perfuração dispersando rapidamente a energia por uma grande área. Essa dispersão é realizada por pulsos longitudinais e transversais que se afastam *radialmente* do ponto de impacto, onde o projétil produz uma depressão em forma de cone no tecido. O pulso longitudinal, que se propaga ao longo das fibras do tecido com velocidade v_l, faz com que as fibras se afinem e se distendam, com uma transferência radial de massa na direção do ponto de impacto. Uma dessas fibras radiais aparece na Fig. 16-50*a*. Parte da energia do projétil é dissipada nessa deformação das fibras. O pulso transversal, que se propaga com uma velocidade menor v_t, está associado à depressão. À medida que o projétil penetra no tecido o raio da depressão aumenta, fazendo com que o material do colete se mova na mesma direção que o projétil (perpendicularmente à direção e propagação do pulso transversal). O resto da energia do projétil é dissipado nesse movimento. Toda a energia que não está envolvida na deformação permanente das fibras é convertida em energia térmica.

A Fig. 16-50*b* mostra um gráfico da velocidade v em função do tempo t para uma bala com uma massa de 10,2 g disparada por

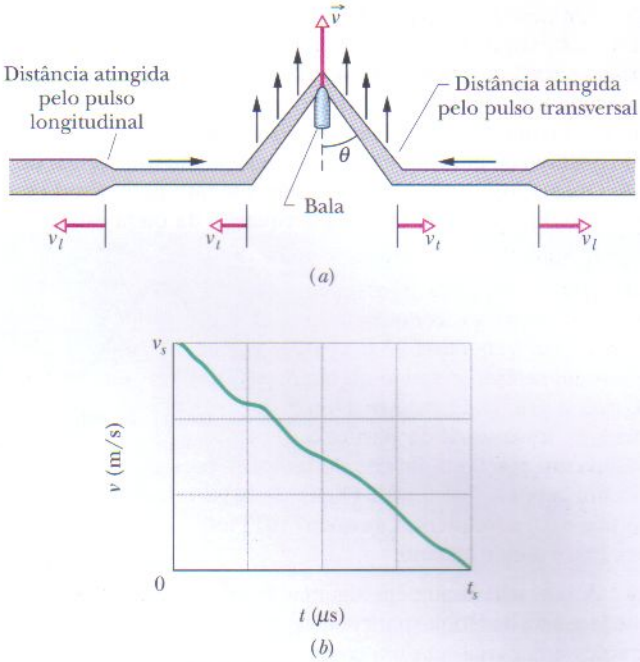


FIG. 16-50 Problema 82.

um revólver .38 *Special* em um colete à prova de balas. As escalas dos eixos vertical e horizontal são definidas por $v_s = 300$ m/s e $t_s = 40{,}0\ \mu$s. Suponha que $v_l = 2000$ m/s e que o meio ângulo θ da depressão causada pela bala é 60°. No final da colisão, qual é o raio (a) da região deformada e (b) da depressão (supondo que a pessoa que usava o colete permaneceu imóvel)?

83 Qual é a onda transversal mais rápida que pode ser produzida em um fio de aço? Por razões de segurança, a tensão máxima à qual um fio de aço deve ser submetido é $7{,}00 \times 10^8$ N/m². A massa específica do aço é 7800 kg/m³. (b) A resposta depende do diâmetro do fio?

84 (a) Escreva uma equação que descreva uma onda transversal senoidal se propagando em uma corda no sentido positivo de um eixo y com um número de onda de 60 cm^{-1}, um período de 0,20 s e uma amplitude de 3,0 mm. Tome a direção transversal como a direção z. (b) Qual é a velocidade transversal máxima de um ponto da corda?

85 Uma onda em uma corda é descrita por

$$y(x, t) = 15{,}0\ \operatorname{sen}(\pi x/8 - 4\pi t),$$

onde x e y estão em centímetros e t está em segundos. (a) Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (b) Qual é a máxima velocidade transversal em qualquer ponto na corda? (c) Qual é o módulo da aceleração transversal em um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (d) Qual é o módulo da aceleração transversal máxima em qualquer ponto da corda?

86 Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0{,}050 \cos(\pi x - 4\pi t)$$
$$y_2 = 0{,}050 \cos(\pi x + 4\pi t),$$

onde x, y_1 e y_2 estão em metros e t está em segundos. (a) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nó? Começando em $t = 0$, qual é o valor do (b) primeiro, (c) segundo e (d) terceiro instantes em que a partícula situada em $x = 0$ tem velocidade nula?

87 Em uma experiência de laboratório, uma corda horizontal de 1,2 kg é fixada nas duas extremidades ($x = 0$ e $x = 2{,}0$ m) e colocada para oscilar para cima e para baixo no modo fundamental, com uma freqüência de 5,0 Hz. No instante $t = 0$ o ponto situado em $x = 1{,}0$ m tem deslocamento nulo e se move para cima no sentido positivo de um eixo y com uma velocidade transversal de 5,0 m/s. Quais são (a) a amplitude do movimento nesse ponto e (b) a tensão da corda? (c) Escreva a equação da onda estacionária para o modo fundamental.

88 Uma certa onda transversal senoidal com um comprimento de onda de 20 cm está se propagando no sentido positivo de um eixo x. A Fig. 16-51 mostra a velocidade transversal da partícula situada em $x = 0$ em função do tempo; a escala do eixo vertical é definida por $u_s = 5{,}0$ cm/s. Quais são (a) a velocidade, (b) a amplitude e (c) a freqüência da onda? (d) Plote a onda entre $x = 0$ e $x = 20$ cm para o instante $t = 2{,}0$ s.

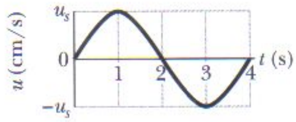


FIG. 16-51 Problema 88.

89 A borracha usada em algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de deformações. Uma tira desse material tem um comprimento ℓ no estado relaxado e uma massa m. Quando uma força F é aplicada, a tira sofre um estiramento $\Delta\ell$. (a) Qual é a velocidade (em termos de $m, \Delta\ell$ e da constante elástica k) das ondas transversais nesta tira de borracha sob tensão? (b) Use a resposta do item (a) para mostrar que o tempo necessário para que um pulso transversal atravesse a tira de borracha é proporcional a $1/\sqrt{\Delta\ell}$ se $\Delta\ell \ll \ell$ e é constante se $\Delta\ell \gg \ell$.

90 Duas ondas,

$$y_1 = (2{,}50 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(25{,}1 \text{ rad/m})x - (440 \text{ rad/s})t]$$

e

$$y_2 = (1{,}50 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(25{,}1 \text{ rad/m})x + (440 \text{ rad/s})t],$$

se propagam em uma corda esticada. (a) Plote a onda resultante em função de t para $x = 0$, $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$ e $\lambda/2$, onde λ é o comprimento de onda. Os gráficos devem se estender de $t = 0$ até pouco mais de um período. (b) A onda resultante é a superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva. Em que sentido se propaga a onda progressiva? (c) Como devem ser mudadas as ondas originais para que a onda resultante seja uma superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva com as mesmas amplitudes que antes, mas com a onda progressiva se propagando no sentido oposto? Use os gráficos do item (a) para determinar o local em que a amplitude das oscilações é (d) máxima e (e) mínima. (f) Qual é a relação entre a amplitude máxima das oscilações e a amplitude das ondas originais? (g) Qual é a relação entre a amplitude mínima das oscilações e as amplitudes das ondas originais?

91 Duas ondas são descritas por

$$y_1 = 0{,}30 \operatorname{sen}[\pi(5x - 200)t]$$

e

$$y_2 = 0{,}30 \operatorname{sen}[\pi(5x - 200t) + \pi/3],$$

onde y_1, y_2 e x estão em metros e t está em segundos. Quando as duas ondas são combinadas é produzida uma onda progressiva. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade e (c) o comprimento de onda da onda progressiva.

92 A velocidade no vácuo das ondas eletromagnéticas (como as ondas de luz visível, as ondas de rádio e os raios x) é $3{,}0 \times 10^8$ m/s. (a) Os comprimentos de onda da luz visível vão de aproximadamente 400 nm no violeta a 700 nm no vermelho. Qual é o intervalo de freqüências dessas ondas? (b) O intervalo de freqüências das ondas curtas de rádio (como as ondas de rádio FM e de VHF da televisão) é de 1,5 a 300 MHz. Qual é o intervalo de comprimentos de onda correspondente? (c) Os comprimentos de onda dos raios X vão de aproximadamente 5,0 nm a $1{,}0 \times 10^{-2}$ nm. Qual é o intervalo de freqüências dos raios X?

93 Uma onda progressiva em uma corda é descrita por

$$y = 2{,}0 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40} + \frac{x}{80}\right)\right],$$

onde x e y estão em centímetros e t em segundos. (a) Para $t = 0$, plote y em função de x para $0 \le x \le 160$ cm. (b) Repita o item (a) para $t = 0{,}05$ s e para $t = 0{,}10$ s. A partir desses gráficos, determine (c) a velocidade da onda e (d) o sentido de propagação da onda.