Oscilações e Ondas

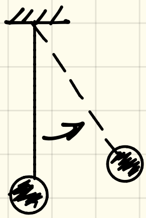
1. EXEMPLOS DE OSCILADORES
2. SISTEMA MASSA-MOLA
    - Força Elástica
    - Trabalho e Energia Potencial
    - Energia Mecânica
3. APLICAÇÕES
4. EQUAÇÃO DIFERENCIAL

OSCILAÇÕES

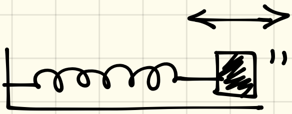
Movimento periódico, que se repete com um intervalo de tempo definido

Exemplos:

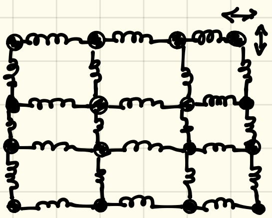
Pêndulo

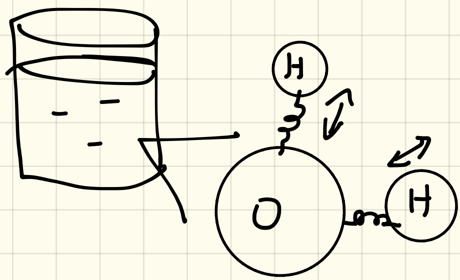


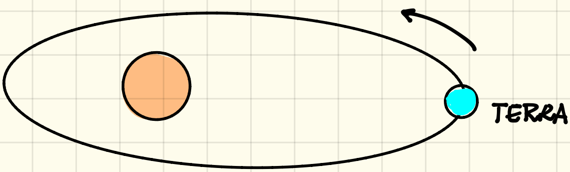
Massa-Mola



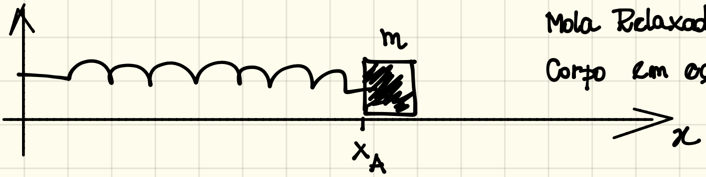
Átomos e Moléculas







Vamos estudar um sistema simples: Mola

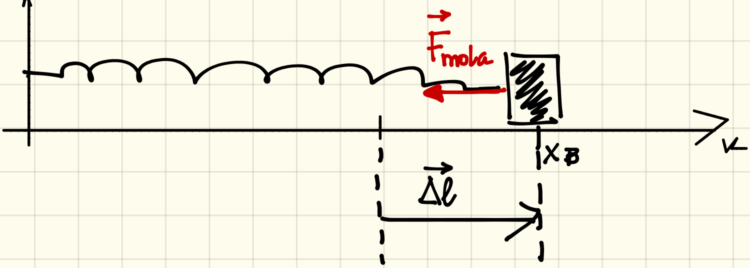


Mola Relaxada

Corpo em equilíbrio

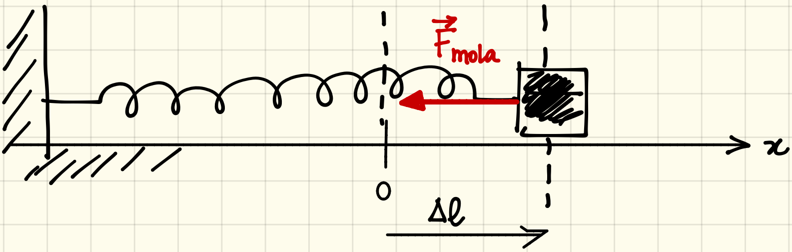
$\vec{F}_{RES} = 0$

Mola Esticada

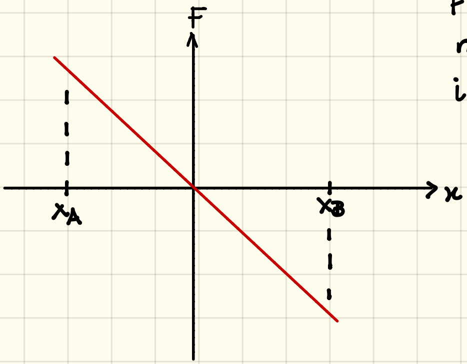


- Força exercida pela mola sobre o corpo não é constante
- Tem sentido oposto a $\Delta \ell$
- $|\vec{F}_{mola}|$ é proporcional à $|\Delta \ell| = |x_B - x_A|$

Podemos escolher a origem do eixo x em $x_A \to x_A = 0$



$\vec{F}_{mola} = -k\vec{x}$ $\quad$ $x =$ deformação da mola $= \vec{\Delta l}$



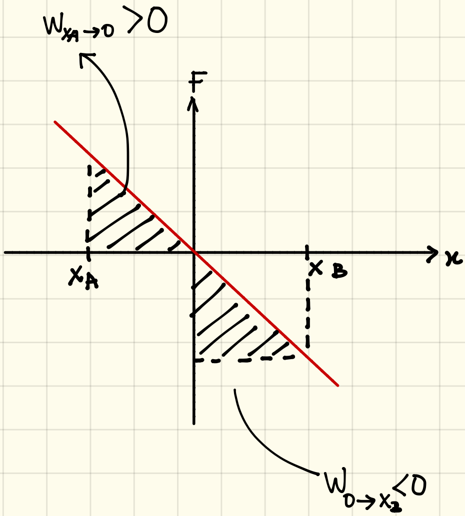
$F(x)$
reta passando por $x=0$
inclinação da reta $= k$

A força exercida pela mola realiza trabalho quando o corpo se desloca de uma posição x_A até x_B

$$W_{mola} = \int_{x_B}^{x_A} F(x)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} (-kx)\,dx = -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx$$

$$W_{mola} = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{k}{2}\left[x_B^2 - x_A^2\right]$$

$W_{mola} \equiv$ "Área" sob a curva $F(x)$ entre os pontos A e B.



Trecho $x_A \to 0$ $\begin{cases} \vec{F} \; \rightarrow \\ \Delta x \; \rightarrow \end{cases}$ $\quad \Delta \vec{W} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$

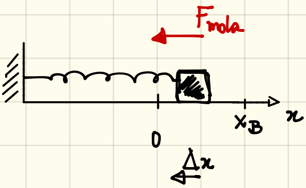
$\vec{F}$ e $\vec{\Delta x}$ tem mesma direção e mesmo sentido: $\Delta W > 0$

Trecho $0 \to x_B$ $\begin{cases} \vec{F} \; \leftarrow \\ \vec{\Delta x} \; \rightarrow \end{cases}$

$\vec{F}$ e $\vec{\Delta x}$ tem mesma direção mas sentidos opostos: $\Delta W < 0$

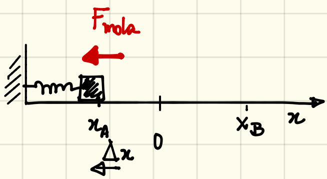
A força exercida pela mola é uma força conservativa. Se tomarmos um percurso fechado; $x_A \to x_B \to x_A$, o trabalho realizado pela força $\vec{F}_{mola}$ é igual a zero.

$$W_{x_A \to x_B \to x_A} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx + \int_{x_B}^{x_A} F(x)\,dx$$



$$\Delta W_{x_B \to 0} > 0$$

$$\Delta W_{x_B \to 0} = -\Delta W_{0 \to x_B}$$



$$\Delta W_{0 \to x_A} > 0$$

$$\Delta W_{0 \to x_A} = -\Delta W_{x_A \to 0}$$

Em cada trecho o sinal do trabalho se inverteu

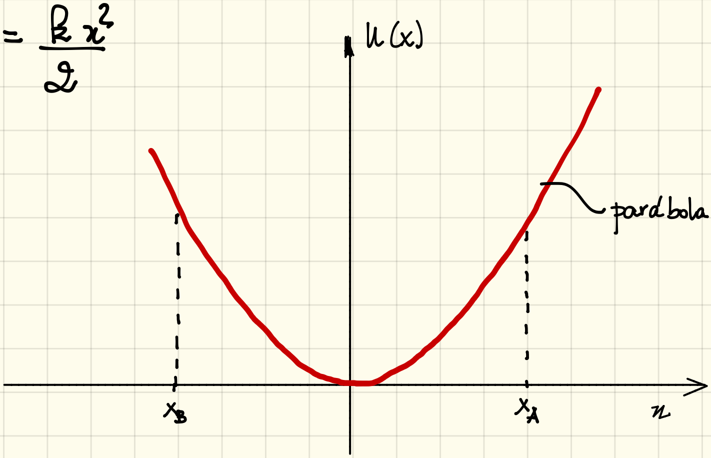
$$W_{x_B \to x_A} = -W_{x_A \to x_B}$$

$$W_{x_A \to x_B \to x_A} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx - \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = 0$$

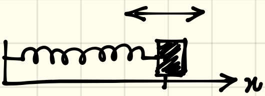
Portanto $\vec{F}_{mola}$ é uma força conservativa e existe uma função $U(x)$ tal que:

$$U(x_B) - U(x_A) = -\int_A^B F(x)\,dx$$

$$U(x) = \frac{k x^2}{2}$$



Quando o corpo é abandonado a partir do repouso c/ a mola esticada o corpo passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio.



Ao passar pela posição de equilíbrio a velocidade é máxima, embora a força exercida pela mola seja = 0.

Houve transformação da energia potencial elástica acumulada na mola em energia cinética.

Energia Mecânica Inicial: $E_{mec} = U_{mola}$

Na posição de equilíbrio → E_{mec} = Energia Cinética

Energia potencial da mola: $U = \frac{kx^2}{2} = 0$

Se não há força de atrito a energia mecânica é conservada:

$$E_{MEC}(x_B) = E_{mec}(x_A)$$

Se x_B é o ponto onde a mola passa pelo máximo de compressão, a velocidade do bloco nessa posição é igual a zero;

$$K(x_B) = 0$$

$$E_{MEC}(x_B) = \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k x_A^2$$

Então o bloco oscila simétricamente em torno da posição $x = 0$, que é a posição de equilíbrio.

Para qualquer posição x podemos escrever a energia

$$E_{MEC} = K(x) + U(x)$$

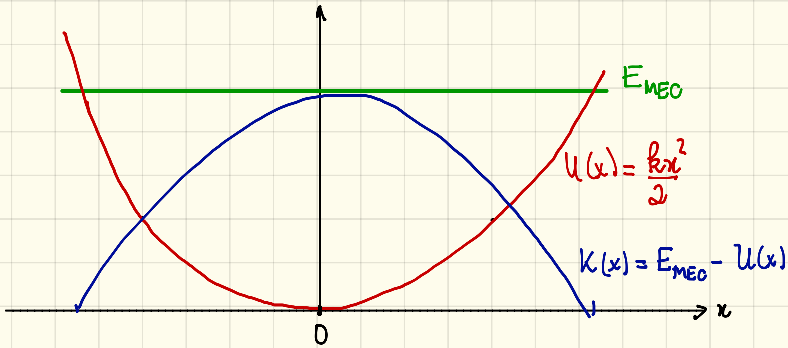
Como a energia mecânica é constante, se conhecemos a posição do bloco e a velocidade no instante $t = 0$;

Em $t=0$ $\quad x(0)=x_0$ e $v(0)=v_0$

$E_{MEC}=E_0=\text{cte}$ $\qquad E_0=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2$

sendo m a massa do bloco ligado á mola.

Então: $\quad K(x)=E_{MEC}-U(x)$



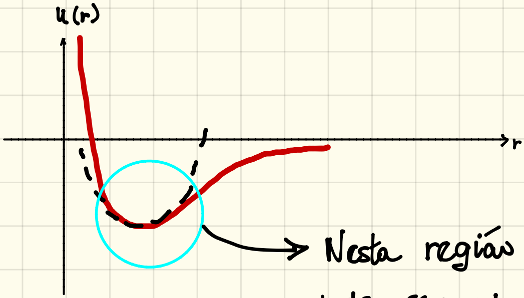
O ponto $x=0$ representa um mínimo do potencial $U(x)$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0 \qquad F(x)=-\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0$$

Esse ponto é chamado de ponto de equilíbrio estável porque se o bloco for ligeiramente afastado dessa posição, a força exercida pela mola tende a trazê-lo de volta p/ essa posição.

O corpo passa a executar um movimento de oscilação em torno da posição de equilíbrio

Existem na natureza muitos sistemas onde as partícula interagem por meio de um potencial que em algumas situações pode ser aproximado por um potencial do tipo massa-mola.



Nesta região o potencial U(r) pode ser aproximado por uma parábola.

Potenciais U(r) com essa forma funcional descrevem a a interação entre partículas em uma solução (coloides), átomos em uma molécula, asteroide orbitando um planeta, entre o elétron e o núcleo...

Daí o interesse em estudar osciladores, que embora sejam simples podem ser usados como modelos para o estudo de problemas mais complexos.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Quando estudamos o movimento retilíneo queremos obter a equação que descreve a posição da partícula em função do tempo, conhecendo-se as forças que atuam sobre ela.

Vamos considerar inicialmente a situação mais simples de uma força resultante constante;

$$\vec{F} = cte \rightarrow \vec{a} = cte \longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Integrando essa equação obtivemos a velocidade da partícula $\vec{v}(t)$.

Como estamos considerando o movimento apenas em uma dimensão vamos simplificar a notação:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v = \int a(t)\,dt$$

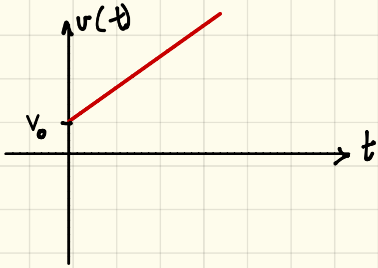
Solução $\Rightarrow v = at + cte$

Ao integrar uma vez essa equação temos uma constante

Essa constante tem a dimensão de velocidade, isto é m/s.

Conhecendo-se a velocidade da partícula em um certo instante $t_0 \rightarrow v(t_0) = v_0$

$$v = v_0 + at$$



Podemos agora continuar essa operação para obter a função $x(t)$.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow dx = (v_0 + at)dt$$

$$x(t) = \int (v_0 + at)\, dt$$

Solução: $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + cte$

dimensão de posição

se em t_0 conhecemos a posição $\Rightarrow x(t_0) = x_0$

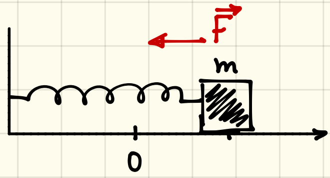
Então temos: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Essa equação foi obtida a partir da integração de uma equação diferencial de segunda ordem:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = cte$$

Como $a = cte$ conseguimos realizar a integração e obter a solução.

No caso do corpo ligado à uma mola: $F = -kx \neq cte$



$$a = \frac{F}{m}$$

Então:

$$a = -\frac{kx}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Agora não é possível realizar analiticamente a integração.