

PCS 3225

Sistemas Digitais II

Síntese de Circuitos Sequenciais

(minimização de estados)

Andrade, Marco Túlio Carvalho de

Professor Responsável

Adaptado por Glauber (2018)

Minimização de Estados

Para se obter um circuito mais simples, é importante reduzir a tabela de estados, quando possível. Esta redução é possível quando existirem na tabela **estados equivalentes**.

Definição: Dois estados são **equivalentes** quando:

- produzem a mesma saída para o mesmo valor das entradas
- são levados a estados equivalentes para o mesmo valor das entradas

Minimização de Estados

Esta noção de estados equivalentes tem as propriedades matemáticas de uma relação de equivalência

Existem dois métodos de simplificação:

- observação direta
- tabelas de implicação

Simplificação por Observação Direta

$s^t \backslash x^t$	$x = 0$	$x = 1$
A	A / 0	B / 0
B	A / 1	C / 0
C	A / 0	D / 1
D	E / 1	D / 0
E	A / 0	B / 0

s^{t+1} / z^t

Simplificação por Observação Direta

$s^t \backslash x^t$	$x = 0$	$x = 1$
A	A / 0	B / 0
B	A / 1	C / 0
C	A / 0	D / 1
D	A / 1	D / 0

s^{t+1} / z^t

Simplificação por Observação Direta

$s^t \backslash x^t$	$x = 0$	$x = 1$
A	A / 0	B / 0
B	A / 1	C / 0
C	A / 0	D / 1
D	A / 1	D / 0

s^{t+1} / z^t

Simplificação por Observação Direta

s^{t+1} / z^t

$s^t \backslash x^t$	$x = 0$	$x = 1$
A	A / 0	B / 0
B	B / 1	A / 1
C	C / 0	D / 0
D	D / 1	C / 1

- A e C são equivalentes?
- e B e D?

Minimização de Estados

- Considere a tabela contendo o estado atual, próximo estado e saída.

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	12/0
7	10/0	12/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
12	2/0	1/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z

Minimização de Estados

- O estado 9 é o único que produz saída 1.
- Os estados 11 e 12 são equivalentes: para a mesma entrada produzem a mesma saída e o mesmo próximo estado

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	12/0
7	10/0	12/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
12	2/0	1/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z

Minimização de Estados

- O estado 9 não pode ter nenhum estado equivalente (dizemos que representa uma classe de equivalência)

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	12/0
7	10/0	12/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
12	2/0	1/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z

Minimização de Estados

- Simplificando
 - Agregam-se os estados equivalentes
 - Substituem-se na tabela as referências aos estados excluídos pelo estado agregado

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	12/0
7	10/0	12/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
12	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

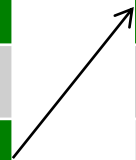
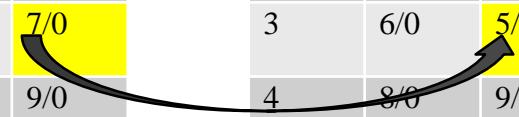
q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
7	10/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

Minimização de Estados

- Simplificando novamente

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	7/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
7	10/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z



Resumo

$q_j^v \equiv q_k^v$
Se e Somente Se
(SSE)

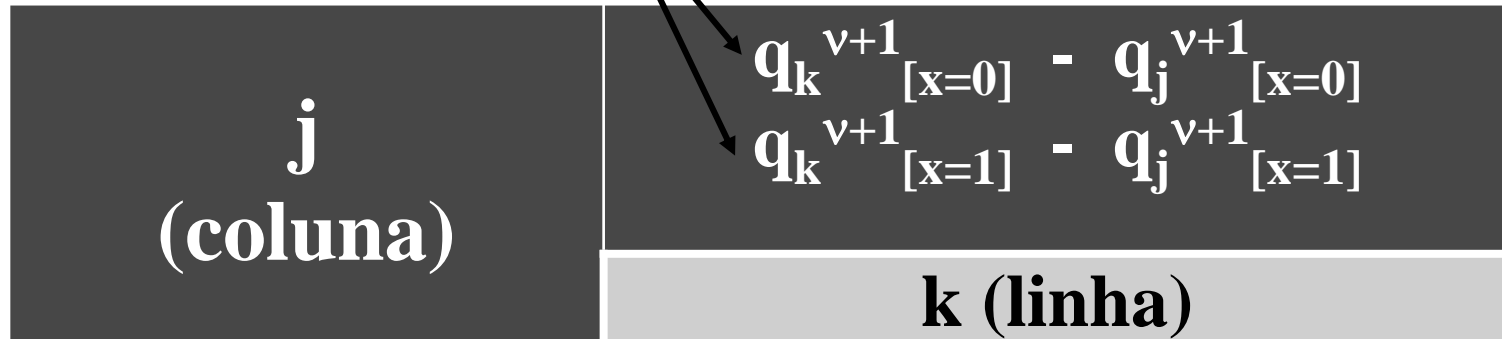
$$q_k^{v+1}_{[x=0]} \equiv q_j^{v+1}_{[x=0]}$$

E Também

$$q_k^{v+1}_{[x=1]} \equiv q_j^{v+1}_{[x=1]}$$

Pares Implicados

Pares Implicados



Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
9	10/1	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

- Monta-se uma tabela (a **tabela de implicação**) com $n-1$ linhas e colunas (deixando de fora o primeiro e o último)
- Marca-se em cada cruzamento $q_j q_k$ os pares de estados de precisam ser equivalentes para que q_j e q_k também sejam.
- **Exemplo:** $q_1 \sim q_2$ sse $q_2 \sim q_4$ e $q_3 \sim q_5$
- O cruzamento de estados com saídas diferentes para alguma entrada já podem ser descartados.
- Iterativamente, descartamos equivalências que dependem de equivalências já descartadas.

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4									
3	2-6	4-6								
4	2-8	4-8	6-8							
5	2-10	4-10	6-10	8-10						
6	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10					
8	2-8	4-8	6-8	8-8	8-10	4-8				
10	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10	4-4	4-8			
11	2-2	2-4	2-6	2-8	2-10	2-4	2-8	2-4		
9	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11	1-1	1-1		
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4									
	3-5									
3	2-6	4-6								
	3-5	5-5								
4	2-8	4-8	6-8							
	3-9	5-9	5-9							
5	2-10	4-10	6-10	8-10						
	3-11	5-11	5-11	9-11						
6	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10					
	3-11	5-11	5-11	9-11	11-11					
8	2-8	4-8	6-8	8-8	8-10	4-8				
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11				
10	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10	4-4	4-8			
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11	1-1			
11	2-2	2-4	2-6	2-8	2-10	2-4	2-8	2-4		
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11	1-1	1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Podemos eliminar pares m-m (implicados entre si)

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4									
	3-5									
3	2-6	4-6								
	3-5	5-5								
4	2-8	4-8	6-8							
	3-9	5-9	5-9							
5	2-10	4-10	6-10	8-10						
	3-11	5-11	5-11	9-11						
6	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10					
	3-11	5-11	5-11	9-11	11-11					
8	2-8	4-8	6-8	8-8	8-10	4-8				
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11				
10	2-4	4-4	4-6	4-8	4-10	4-4	4-8			
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11	1-1			
11	2-2	2-4	2-6	2-8	2-10	2-4	2-8	2-4		
	1-3	1-5	1-5	1-9	1-11	1-11	1-1	1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Descartando células que possuem implicações já descartadas
(q_4 representa outra classe de equivalência)

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	6-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-4 1-11	4-8 1-1			
11	2-2 1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	2-8 1-1	2-4 1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Repetindo para q_4

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

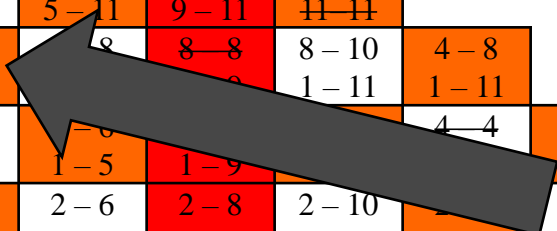
j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	6-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-4 1-11	4-8 1-1			
11	2-2 1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	2-8 1-1	2-4 1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Analizando um a um, direita para esquerda, baixo para cima

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	4-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-10 1-11	4-8 1-11			
11	2-2 1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-10 1-11	2-8 1-11	2-4 1-11		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	



Nota-se que a condição em análise não satisfaz. Descarta-se a condição recomeça-se a varredura.

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

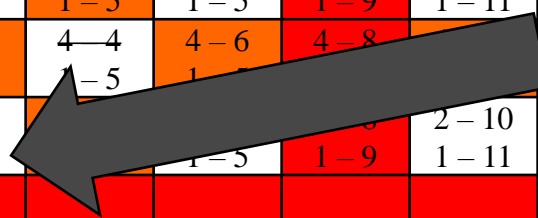
j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	6-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-4 1-11	4-8 1-1			
11	2-2 1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	2-8 1-1	2-4 1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Nota-se que a condição em análise não satisfaz. Descarta-se a condição.

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	6-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-4 1-11	4-8 1-1			
11	2-2 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	2-4 1-11	2-8 1-1	2-4 1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	



Nota-se que a condição em análise satisfaz. Deixa-se como está.

Minimização de Estados

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5	4-6 5-5								
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9							
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11						
6	2-4 3-11	4-4 5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10 11-11					
8	2-8 1-3	4-8 1-5	6-8 1-5	8-8 1-9	8-10 1-11	4-8 1-11				
10	2-4 1-3	4-4 1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	4-4 1-11	4-8 1-1			
11	2-2 1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	2-8 1-1	2-4 1-1		
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

Processo de descarte concluído.

q_8 também forma uma classe de equivalência.

Classes de Equivalência

q^v	X^v	
	= 0	= 1
1	2/0	3/0
2	4/0	5/0
3	6/0	5/0
4	8/0	9/0
5	10/0	11/0
6	4/0	11/0
8	8/0	1/0
9	10/1	1/0
10	4/0	1/0
11	2/0	1/0
	$q^{v+1/z}$	$q^{v+1/z}$

j										
2	2-4 3-5									
3	2-6 3-5		4-6 5-5							
4	2-8 3-9		4-8 5-9		6-8 5-9					
5	2-10 3-11		4-10 5-11		6-10 5-11		8-10 9-11			
6	2-4 3-11		4-4 5-11		4-6 5-11		4-8 9-11		4-10 11-11	
8	2-8 1-3		4-8 1-5		6-8 1-5		8-8 1-9		8-10 1-11	
10	2-4 1-3		4-4 1-5		4-6 1-5		4-8 1-9		4-10 1-11	
11	2-2 1-3		2-4 1-5		2-6 1-5		2-8 1-9		2-10 1-11	
9										
k	1	2	3	4	5	6	8	10	11	

(2 ≡ 6 ≡ 10)

(4)

(8)

(9)

(1 ≡ 3 ≡ 5 ≡ 11)

Tabela Final

- Estados agora são representados pelas classes equivalentes

q^v	X^v	
	= 0	= 1
(1,3,5,11) A	B/0	A/0
(2,6,10) B	C/0	A/0
(4) C	D/0	E/0
(8) D	D/0	A/0
(9) E	B/1	A/0
	q^{v+1}/z	q^{v+1}/z

Exercício

	x		
s		x = 0	x = 1
A		B / 1	H / 1
B		F / 1	D / 1
C		D / 0	E / 1
D		C / 0	F / 1
E		D / 1	C / 1
F		C / 1	C / 1
G		C / 1	D / 1
H		C / 0	A / 1

$s(t+1) / z(t)$

- Use a tabela de implicação para minimizar o número de estados. Construa a tabela de estado/saída resultante.

Exercício

- Use a tabela de implicação para minimizar o número de estados. Construa a tabela de estado/saída resultante.

	x			
s	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3
A	E / 1	C / 0	B / 1	E / 1
B	C / 0	F / 1	E / 1	B / 0
C	B / 1	A / 0	D / 1	F / 1
D	G / 0	F / 1	E / 1	B / 0
E	C / 0	F / 1	D / 1	E / 0
F	C / 1	F / 1	D / 0	H / 0
G	D / 1	A / 0	B / 1	F / 1
H	B / 1	C / 0	E / 1	F / 1

$s(t+1) / z(t)$

Bibliografia

Hill & Peterson (2006)

Exemplo 10.8

Hill, Frederic and Peterson, Gerald;

Introduction to Switching Theory and Logical Design;

Ed. John Wiley and Sons;