ACH2043 INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 08 AFN's probabilísticos (Modelos ocultos de Markov - HMMs – *Hidden Markov Models*)

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

AFDs e AFNs

- Por que o teorema de equivalência entre AFDs e AFNs é importante?
- Pode-se optar por um outro dependendo do objetivo
- AFDs são mais eficientes
- AFNs podem:
  - ser mais fáceis de serem projetados
  - facilitar demonstração de teoremas
  - ser úteis em versões probabilísticas

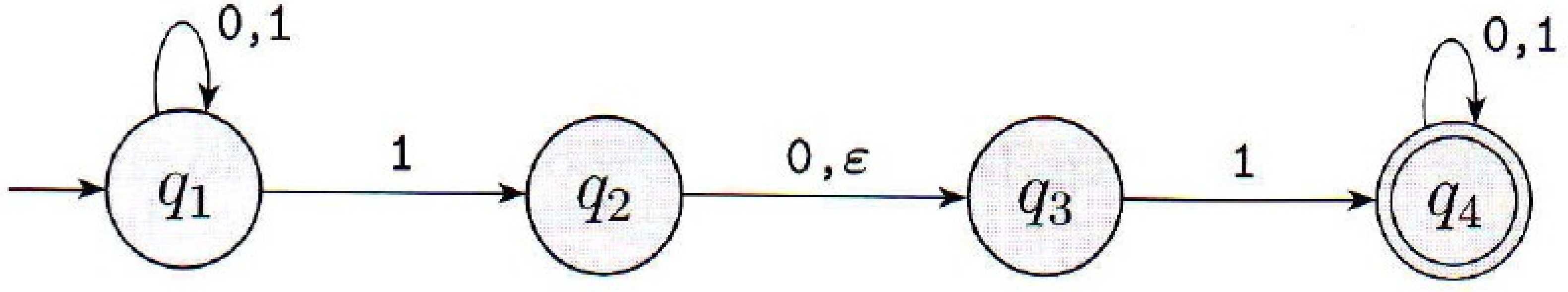
AFNs probabilísticos

- Um autômato probabilístico possui uma distribuição de probabilidades sobre as transições de cada estado
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow$ Conjunto_potência (Q)
- $P: Q \times \Sigma \rightarrow [0,1]$

sendo $\sum_j (q_{atual}, a_j) = 1$ para cada q_i em Q

AFNs probabilísticos
Exemplo

- Transformar esse autômato em probabilístico

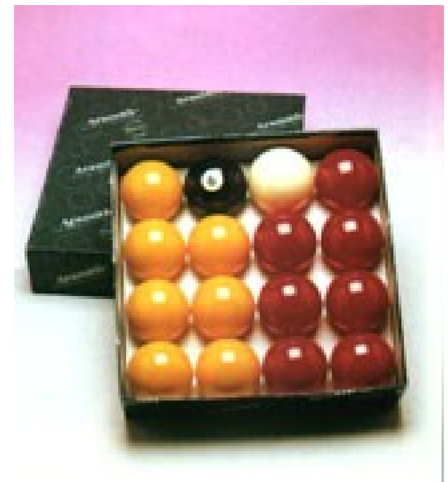


Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)

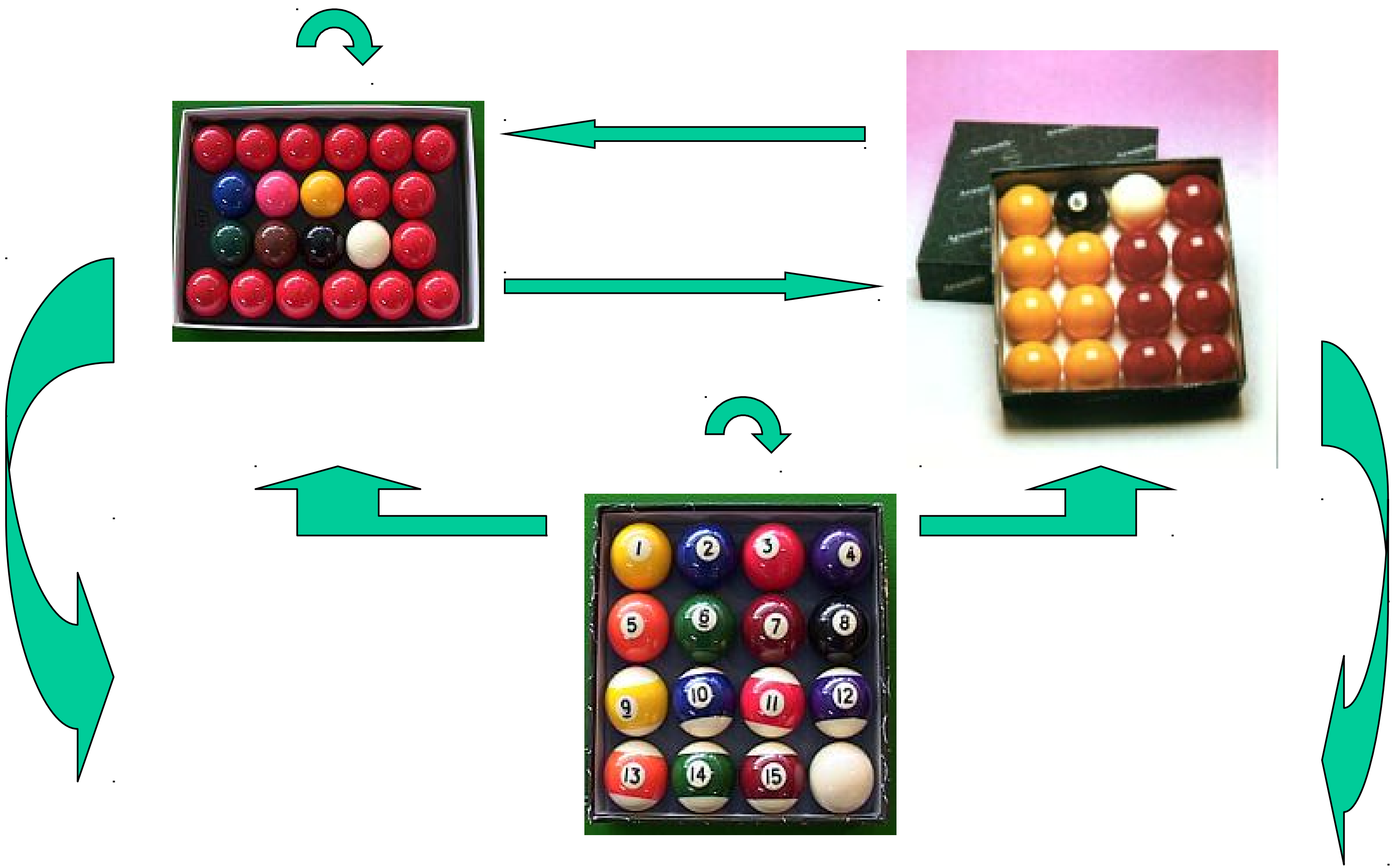
- Imagine que eu tenho várias urnas de bolas coloridas (ou seja, cada urna tem uma distribuição de probabilidades sobre essas cores, potencialmente diferente)

- Alguém tem que adivinhar qual a próxima cor. Como isso poderia ser feito?

Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)



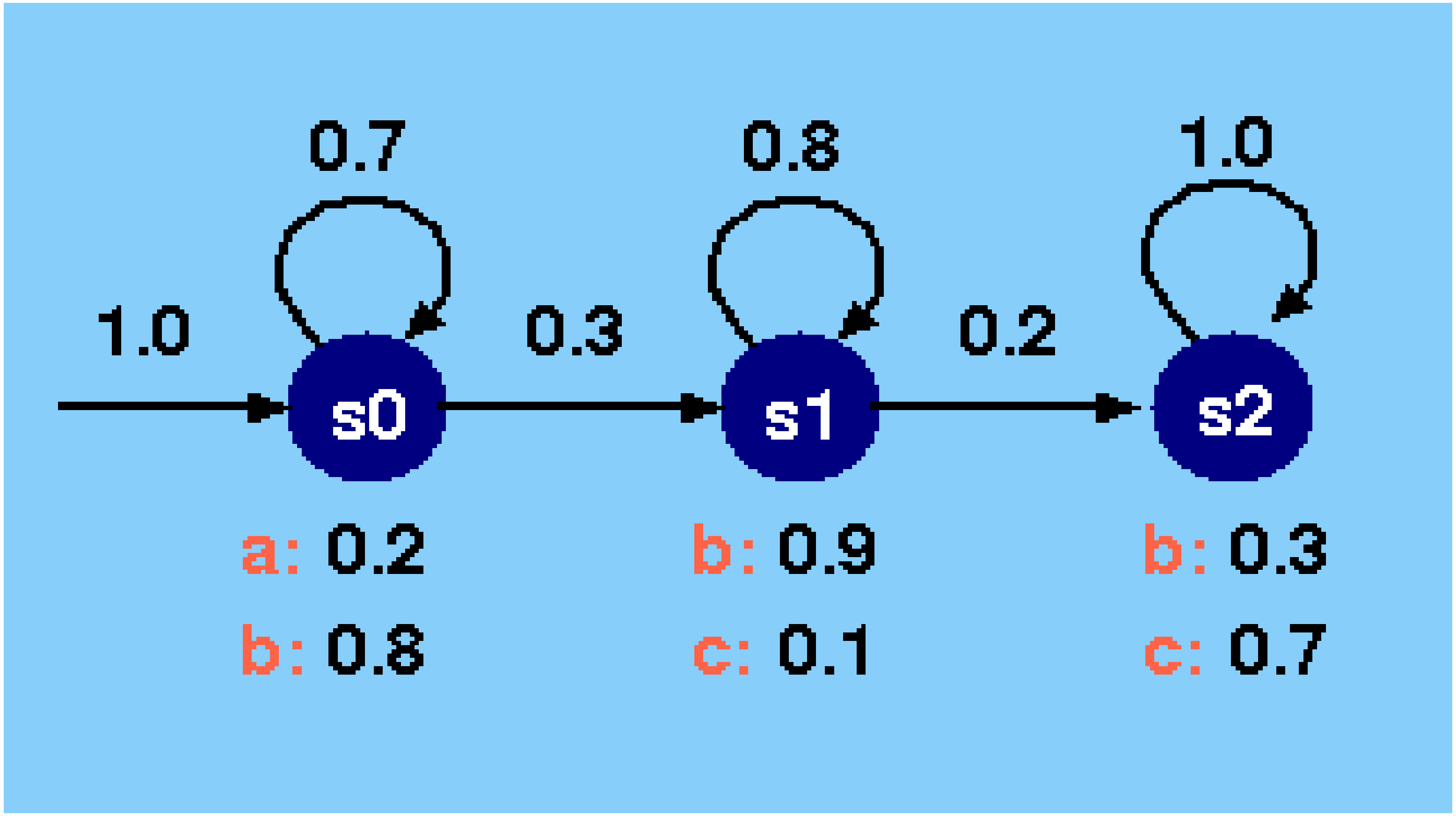
Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)



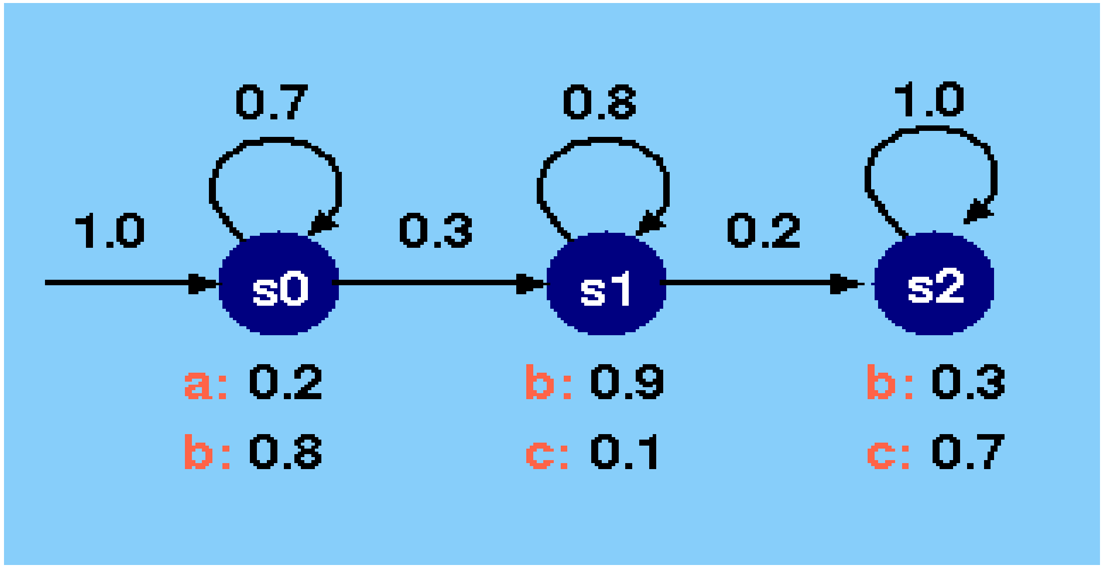
Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)

- Símbolos de emissão
- Estados ocultos
- Uma distribuição de probabilidades de emissão de símbolos associada a cada estado
- Probabilidade de transição entre estados
- Distribuição de probabilidades do estado inicial

Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)

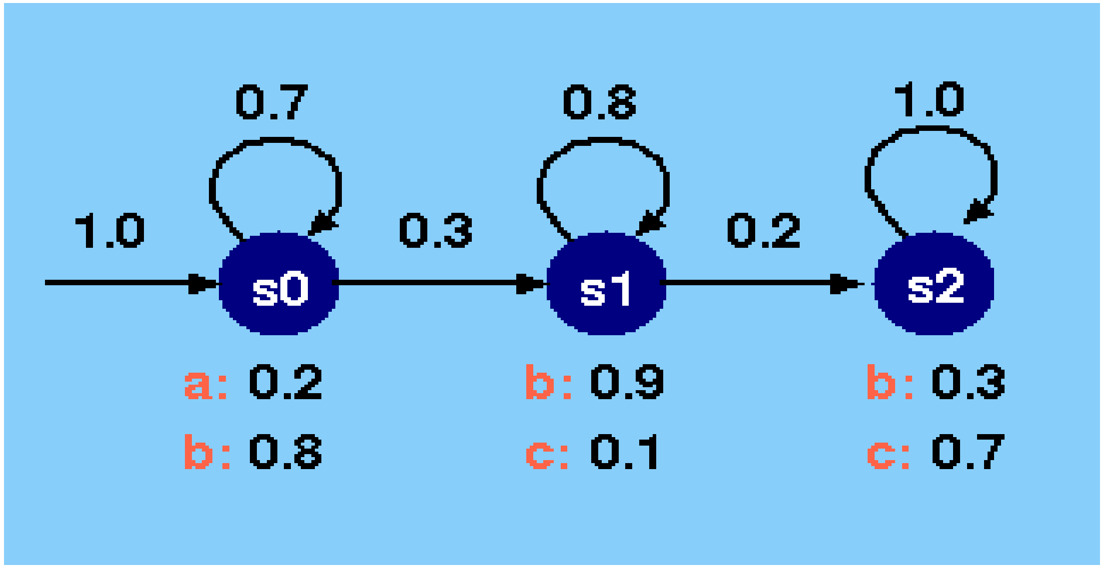


Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)



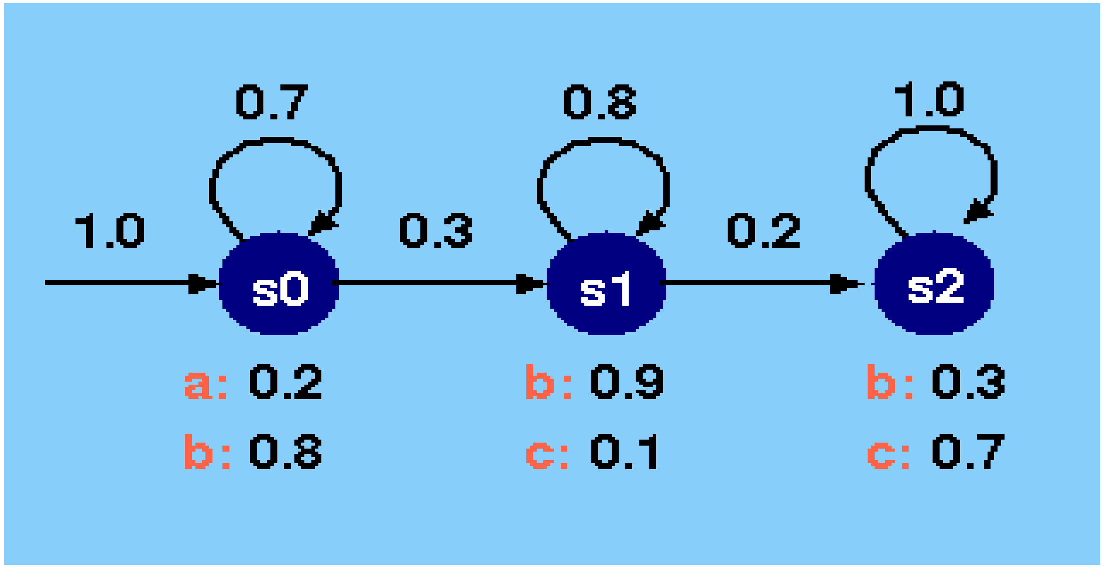
- Semelhança com algo?

Modelo Oculto de Markov Hidden Markov Model (HMM)



- Semelhança com algo?
- Como transformo essa HMM em um AF probabilístico?

Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)



- Semelhança com algo?
- Como transformo essa HMM em um AF probabilístico?

P(transição do estado si para o estado sj lendo o símbolo k) =

P (transição do estado si para o estado sj) * P(símbolo k no estado si)

Modelo Oculto de Markov
Hidden Markov Model (HMM)

- Autômatos finitos (não determinísticos) probabilísticos são equivalentes a modelos ocultos de Markov

Problemas relacionados a HMM

- Dados um HMM e uma cadeia, calcular a probabilidade dessa cadeia
  - Soma das probabilidades de cada caminho
  - Probabilidade de cada caminho: produto das probabilidades do caminho (transição e emissão)
  - Algoritmo forward ou backword

Problemas relacionados a HMM

- Dados um HMM e uma cadeia, calcular o caminho mais provável dessa cadeia
  - Algoritmo viterbi

- Dados um HMM e conjunto de cadeias (treinamento), estimar os parâmetros (probabilidades de emissão e transição)
  - Algoritmo Baum-Welch

Problemas relacionados a HMM

- Projetar a topologia de uma HMM

Últimas observações sobre autômatos

- Máquinas de Mealy: aceitam símbolos na transição (autômatos tradicionais)
- Máquinas de Moore: aceitam símbolos nos estados (HMM – modelo oculto de Markóv)
- Transdutores: geram uma cadeia de saída

Transdutor finito do tipo Máquina de Mealy

- $T_{Mealy} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0, F)$ sobre um autômato finito $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Δ é o alfabeto de saída
  - $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow \Delta^*$ é a função de transdução

Transdutor finito do tipo Máquina de Mealy

- Exemplo: $T_{Mealy} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0, F)$ onde:
  - $Q = \{q_0, q_1\}$
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - $\Delta = \{a, b, c\}$
  - $\delta = \{(q_0,a) \rightarrow q_1, (q_1,b) \rightarrow q_1, (q_1,c) \rightarrow q_0\}$
  - $\lambda = \{(q_0,a) \rightarrow ab, (q_1,b) \rightarrow \varepsilon, (q_1,c) \rightarrow c\}$
  - $F = \{q_1\}$

Transdutor finito do tipo Máquina de Moore

- $T_{Moore} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0, F)$ sobre um autômato finito $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Δ é o alfabeto de saída
  - $\lambda: Q \rightarrow \Delta^*$ é a função de transdução

Transdutor finito do tipo Máquina de Moore

- Exemplo: $T_{Moore} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0, F)$ onde:
  - $Q = \{q_0, q_1\}$
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - $\Delta = \{1\}$
  - $\delta = \{(q_0, a) \rightarrow q_1, (q_1, b) \rightarrow q_1, (q_1, c) \rightarrow q_0\}$
  - $\lambda = \{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow \varepsilon\}$
  - $F = \{q_1\}$

Equivalência dos transdutores

- Teorema: Toda Máquina de Mealy pode ser simulada por uma Máquina de Moore, e vice-versa.

Minimização de autômatos finitos

- Vários autômatos podem gerar a mesma linguagem
- Cada linguagem regular é reconhecida por um autômato finito determinístico mínimo (com relação ao número de estados) e único
  - Utilidades:
    - Gerar um reconhecedor o mais compacto e eficiente possível
    - Comparar se duas linguagens são equivalentes

Minimização de autômatos finitos

- Processo:
  - Eliminação de estados inacessíveis
    - Não há caminho de q_0 até ele
  - Eliminação de estados inúteis
    - Não conduzem a um estado final
  - Agrupamento e fusão de estados equivalentes
- Ex:
  - $\delta = \{(q_0, a) \rightarrow q_3, (q_0, a) \rightarrow q_4, (q_0, b) \rightarrow q_2, (q_1, c) \rightarrow q_3\}$
  - $F = \{q_3, q_4\}$
  -

Minimização de autômatos finitos

- Processo:
  - Eliminação de estados inacessíveis
    - Não há caminho de q_0 até ele
  - Eliminação de estados inúteis
    - Não conduzem a um estado final
  - Agrupamento e fusão de estados equivalentes
- Ex:
  - $\delta = \{(q_0, a)\rightarrow q_3, (q_0, a)\rightarrow q_4, (q_0, b)\rightarrow q_2, (q_1, c)\rightarrow q_3\}$
  - $F = \{q_3, q_4\}$
  - q_1 é inacessível, q_2 é inútil, q_3 e q_4 são equivalentes

Perigo das transições no vazio

- M = …
  - $\delta = \{(q_0, \varepsilon) \rightarrow q_1, (q_0, a) \rightarrow q_2, (q_1, \varepsilon) \rightarrow q_0, (q_2, b) \rightarrow q_3\}$
  - $F = \{q_1, q_3\}$

Perigo das transições no vazio

- M = …
  - $\delta = \{(q_0, \varepsilon)\rightarrow q_1, (q_0, a)\rightarrow q_2, (q_1, \varepsilon)\rightarrow q_0, (q_2, b)\rightarrow q_3\}$
  - $F = \{q_1, q_3\}$

- O autômato não pára!

- Felizmente há um algoritmo para eliminação de transições no vazio

Referências (complementares)

RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEGA, I. S. **Linguagens Formais**. Ed. Bookman,

- HMM:

  RABINER, L. R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. **Proceedings of the IEEE**, v. 77, n. 2, p. 257-286 1989