Tarefa 3 - Gabarito

1. (7.2 Russel and Norvig) Dada a sentença a seguir, você poderia demonstrar que o unicórnio é mítico? E que é mágico? E que tem chifre?

- Se o unicórnio é mítico, então é imortal; porém, se ele não é mítico, então é um mamífero mortal. Se o unicórnio é imortal ou um mamífero, então ele tem chifre. O unicórnio é mágico se tem chifre.

Considere as proposições:

p: o unicórnio é mítico;	s: o unicórnio tem chifre;
q: o unicórnio é imortal;	t: o unicórnio é mágico.
r: o unicórnio é mamífero;	.

Assim, a sentença em linguagem natural é formalizada como segue:
P1: $p \to q$;
P2: $\neg p \to r \wedge \neg q$;
P3: $q \vee r \to s$;
P4: $s \to t$.

Pergunta-se: O unicórnio é mítico?

Não é possível provar se o unicórnio é mítico.
De fato, as premissas P1, P2, P3 e P4 formam nossa base de conhecimento (KB), que é satisfeita para as duas interpretações possíveis para p: $p \equiv TRUE$ ou $p \equiv FALSE$.

Se $p \equiv TRUE$, então $(p,\ p \to q) \models q$. Assim, $q \equiv TRUE$ na nossa KB e, portanto $q \models q \vee r$, ou seja $q \vee r \equiv TRUE$, donde $(q \vee r,\ q \vee r \to s) \models s$ e $(s,\ s \to t) \models t$. Isso significa que a interpretação $p \equiv TRUE,\ q \equiv TRUE,\ s \equiv TRUE,\ t \equiv TRUE$ torna a base consistente.
Por outro lado, Se $p \equiv FALSE$, então $\neg p,\ \neg p \to r \wedge q \models r \wedge q$, donde se conclui $r \wedge q \models r$ e $r \wedge q \models q$. Ainda, $(q \vee r,\ q \vee r \to s) \models s$ e $(s,\ s \to t) \models t$. Isso significa que a interpretação $p \equiv FALSE,\ q \equiv TRUE;\ r \equiv TRUE,\ s \equiv TRUE,\ t \equiv TRUE$ torna a base consistente.

Pergunta-se: O unicórnio é mágico?

Sim, o unicórnio é mágico.
Usando prova direta por resolução segue a tese. Considere as premissas P1, P2, P3, P4 na forma de cláusulas e a negação da tese.

P1: $p \to q \equiv \neg p \vee q$ - eliminação da implicação
P2: $\neg p \to r \wedge \neg q \equiv \neg\neg p \vee (r \wedge \neg q) \equiv p \vee (r \wedge \neg q) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$ - eliminação da implicação e distribuição de $\wedge$ sobre $\vee$
P3: $q \vee r \to s \equiv \neg(q \vee r) \vee s$ - eliminação da implicação;
P4: $\neg s \vee t$

C2: $p \vee r$ – simplificação $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \models p \vee r$
C3: $q \vee r$ – resolução P1 e C2 $\neg p \vee q,\ p \vee r \models\ q \vee r$
C4: s – resolução P3 e C3 $q \vee r,\ \neg(q \vee r) \vee s \models s$
C5: t – resolução P4 e C4 $s,\ \neg s \vee t \models t$

Pergunta-se: O unicórnio tem chifre?

Sim, o unicórnio tem chifre.
Usando prova direta por resolução segue a tese. Considere as premissas P1, P2, P3, P4 na forma de cláusulas e a negação da tese.

C2: $p \vee r$ – simplificação $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \models p \vee r$
C3: $q \vee r$ – resolução P1 e C2 $\neg p \vee q,\ p \vee r \models\ q \vee r$
C4: s – resolução P3 e C3 $q \vee r,\ \neg(q \vee r) \vee s \models s$

2. Demonstre ou encontre um contra-exemplo para cada uma das afirmações:

a) Se $\alpha \models \gamma$ ou $\beta \models \gamma$ (ou ambos) então $(\alpha \wedge \beta) \models \gamma$

Pelo princípio da monotonicidade, se $\alpha \models \gamma$ então $\alpha \wedge \beta \models \gamma$. Da mesma forma, se $\beta \models \gamma$, então $\beta \wedge \alpha \models \gamma$. Como $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$, segue a tese.

b) Se $\alpha \models \beta \wedge \gamma$ então $\alpha \models \beta$ e $\alpha \models \gamma$

Pela propriedade de simplificação, $\beta \wedge \gamma \models \beta$ e $\beta \wedge \gamma \models \gamma$. Assim, como $\alpha \models \beta \wedge \gamma$ e $\beta \wedge \gamma \models \beta$ segue que $\alpha \models \beta$. Analogamente segue que $\alpha \models \gamma$.

c) Se $\alpha \models \beta \vee \gamma$ então $\alpha \models \beta$ ou $\alpha \models \gamma$, (ou ambos).

Contra exemplo: seja $\alpha = \beta \vee \gamma$. É verdade que $\alpha \models \beta \vee \gamma$ porém não é verdade que $\alpha \models \beta$ para a interpretação $\beta \equiv FALSE$ e $\gamma \equiv TRUE$.

Atenção, usar $\beta = \alpha$ e $\gamma = \neg\alpha$ não é contra-exemplo pois se $\alpha \equiv TRUE$, então $\alpha \models \alpha$ e a afirmação é verdadeira e, se $\alpha \equiv FALSE$ então qualquer sentença pode ser consequencia logica de α.