Técnica da Penalidade

Consiste em atribuir ao respectivo grau de liberdade restrito um valor muito grande na sua posição da diagonal principal.

Este procedimento é similar, como será visto à frente, a atribuir um elemento nesta posição restrita com rigidez “infinita”, que leve o deslocamento deste grau de liberdade a ser nulo.

Assim, seja o sistema linear (eq.42), com a imposição das linhas “2” e “j”:

$U_2 = 0$ e $U_j = 0$

Assim, pela técnica da penalidade, o sistema linear final fica:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .. & k_{1j} & k_{13nn} \\ k_{21} & \infty & k_{23} & .. & k_{2j} & k_{23nn} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .. & k_{3j} & k_{33nn} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ k_{j1} & k_{j2} & k_{j3} & .. & \infty & k_{j3nn} \\ k_{3nn1} & k_{3nn2} & k_{3nn3} & .. & k_{3nnj} & k_{3nn3nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ .. \\ U_j \\ U_{3nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ .. \\ F_j \\ F_{3nn} \end{Bmatrix}$$

Técnica da Penalidade

```
Início da Rotina CondContPenalty(Kest,Fest,nn,COND)
// Input:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura
/ nn: numero de nós da estrutura
//COND: vetor que indica se grau de liberdade está livre (0) ou impedido (1)
// Output:
// Kest: matriz de rigidez da estrutura com condições de contorno
// Fest: vetor de forças de toda a estrutura  com condições de contorno
//Declaração de variáveis
Inteiros nn,Cond(3nn)
Real Kest(3nn,3nn), Fest(3nn), INF

INF = 0
Fazer i de 1 até 3nn
Fazer j de 1 até 3nn
                INF = Max( INF, modulo(Kest(i,j) )
Fim de Fazer j
Fim de Fazer i
INF <- INF*1E10
Fazer i de 1 até 3nn
        Se ( Cond(i) = 1 ) então
                Kest(i,i) = INF
        Fim entao
Fim de Fazer i

Fim da Rotina CondContPenalty
```

Resolver sistema Linear...

$$\left[Kest\right]_{3nn\ x\ 3nn} \cdot \left\{Uest\right\}_{3nn} = \left\{Fest\right\}_{3nn}$$

Métodos Diretos: Gauss (matriz cheia, banda, skyline)
Iterativos: Gradientes Conjugados

ESFORÇOS FINAIS

Após o cálculo dos deslocamentos dos nós, os esforços podem ser obtidos, para o **elemento genérico "j"**, mediante o uso da combinação linear (ou efeito final) dada por:

$$E_j = \left(f_p\right)_j + \left(k\right)_j \cdot \left(\delta\right)_j$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

Lembrando que a matriz k é a matriz de rigidez do elemento no **sistema local**. Os deslocamentos δ são os seis valores do elemento no **sistema local**. O vetor dos termos de f_p são relativos as cargas distribuídas.

Note que a resolução sistema linear final da estrutura fornece todos os deslocamentos da estrutura no **sistema global**.

Desta forma, para cada barra é necessário obter os deslocamentos no **sistema local**, assim, primeiramente, isolam-se os deslocamentos do elemento, ou seja, para um elemento genérico "e", com nós inicial e final, respectivamente, "*i*" e "*j*"; a lei de endereçamento pode ser aplicada, de modo a se ter os deslocamentos do elemento no sistema global indicado por:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} U_{est}(3 \cdot i - 2) \\ U_{est}(3 \cdot i - 1) \\ U_{est}(3 \cdot i) \\ U_{est}(3 \cdot j - 2) \\ U_{est}(3 \cdot j - 1) \\ U_{est}(3 \cdot j) \end{Bmatrix}$$

Neste ponto, é necessário transformar os deslocamentos do elemento $\{U\}^e$ para o **sistema local**, por:

$$\{\delta\}^e_{6x1} = [R]^e \cdot \{U\}^e_{6x1}$$

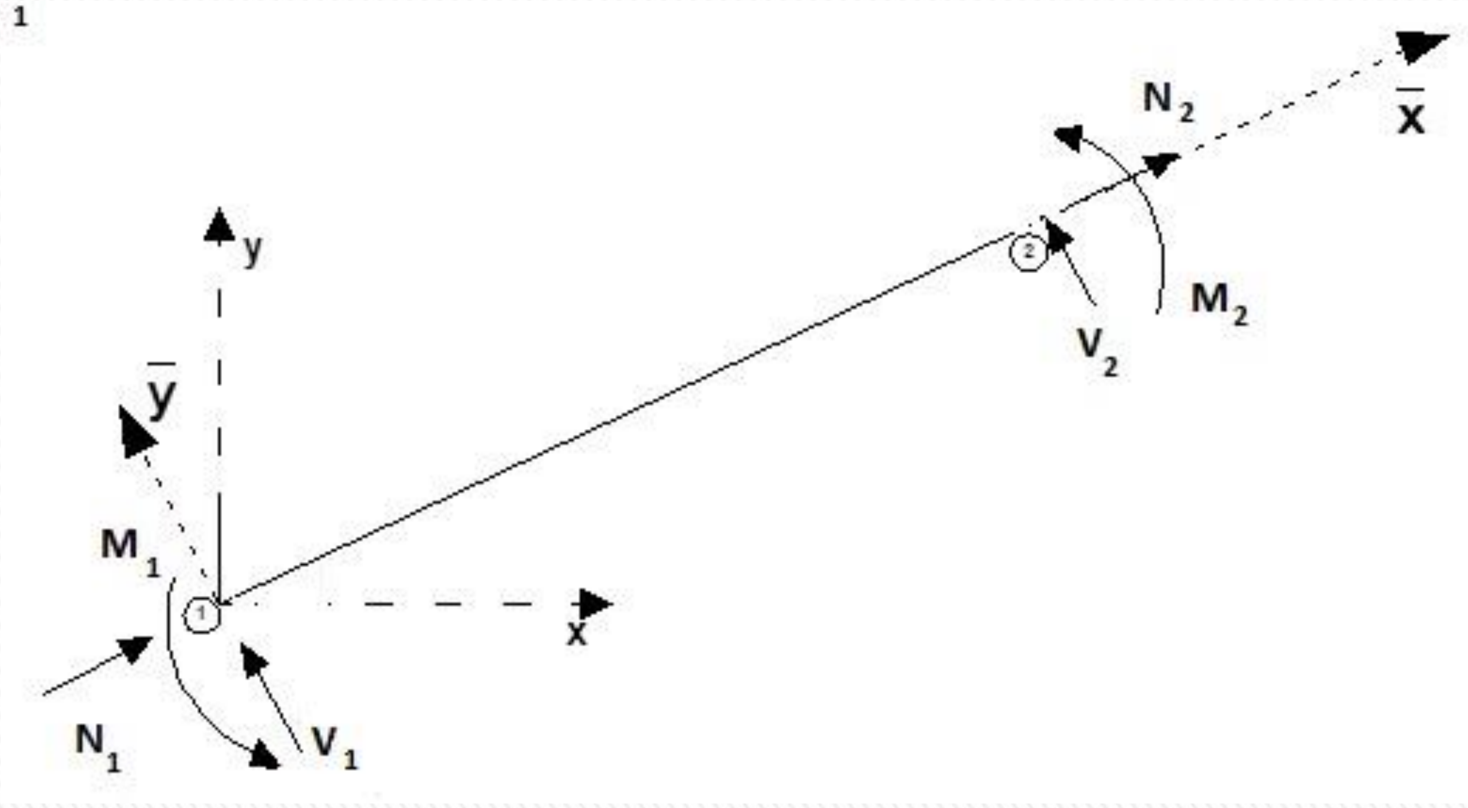
$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

Desta forma, obtém os esforços de cada elemento, onde cada um dos termos do vetor $\{E\}_6$ representa os seguintes esforços, no **sistema local**:

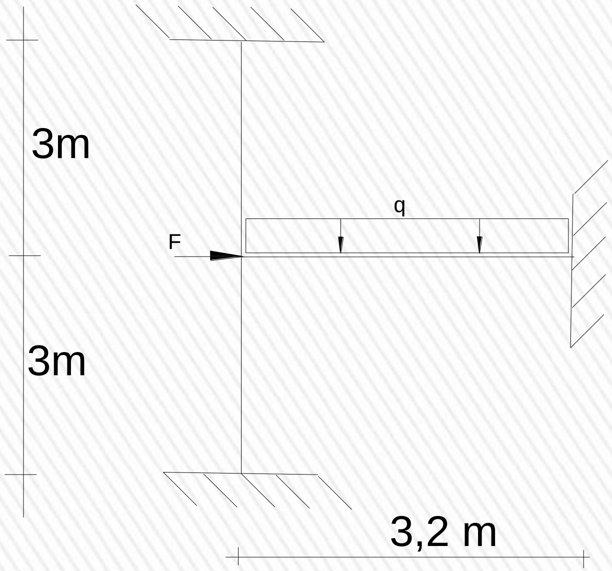
E_1 e E_4: esforço normal do nó inicial e final;

E_2 e E_5: esforço cortante do nó inicial e final;

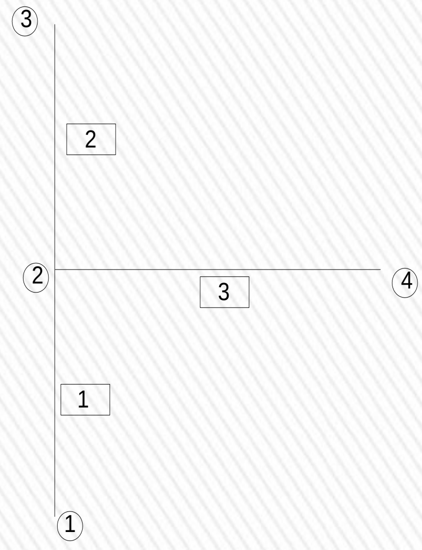
E_3 e E_6: momento fletor do nó inicial e final;



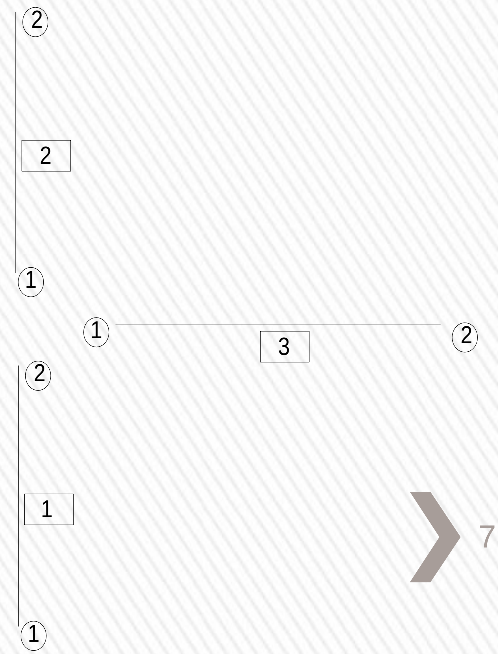
Exemplo: Obtenha via MEF os deslocamentos e esforços para o pórtico plano abaixo. Seção quadrada de lado 15 cm. q = 8 kN/m. F = 50 kN E = 21 MPa



Resolução:



Sistema Global



Sistema Local

Exemplo

$A = 0{,}0225 m^2$ $I = 4{,}21875E\text{-}5\ m^4$

Barra 1 = Barra 2

$$k^{1=2} = \begin{bmatrix} 157{,}5 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}39375 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}39375 & 0{,}590625 \\ 0 & 0{,}590625 & 1{,}18125 & 0 & -0{,}590625 & 0{,}590625 \\ -157{,}5 & 0 & 0 & 157{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}39375 & -0{,}590625 & 0 & 0{,}39375 & -0{,}590625 \\ 0 & 0{,}590625 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}590625 & 1{,}18125 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Barra 3

$$k^3 = \begin{bmatrix} 147,65625 & 0 & 0 & -147,65625 & 0 & 0 \\ 0 & 0,32444 & 0,5191 & 0 & -0,32444 & 0,5191 \\ 0 & 0,5191 & 1,1074 & 0 & -0,5191 & 0,5537 \\ -147,65625 & 0 & 0 & 147,65625 & 0 & 0 \\ 0 & -0,32444 & -0,5191 & 0 & 0,32444 & -0,5191 \\ 0 & 0,5191 & 0,5537 & 0 & -0,5191 & 1,1074 \end{bmatrix}$$

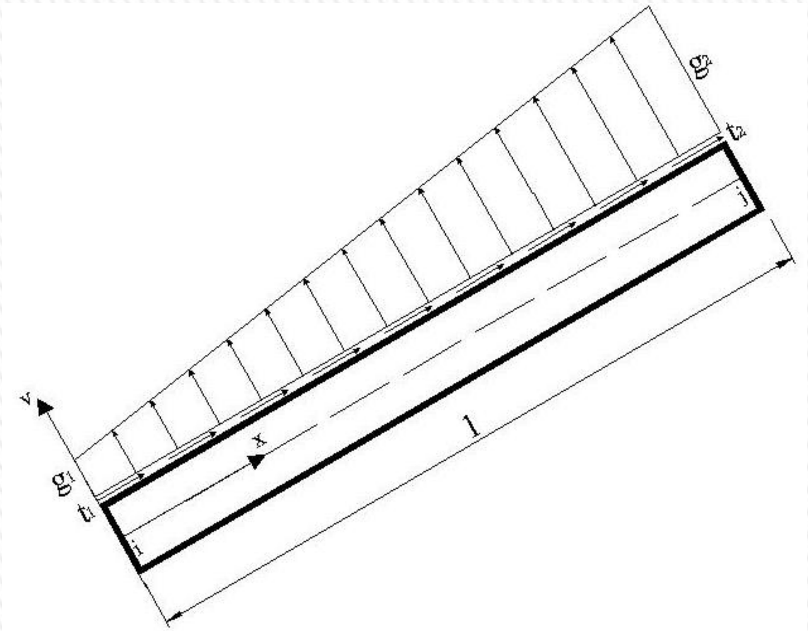
$$[R]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Forças Nodais Equivalentes:
Somente na Barra 3:

$$\{f_p\} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}.t_1 + \frac{1}{6}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{7}{20}.g_1 + \frac{3}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(\frac{1}{20}.g_1 + \frac{1}{30}.g_2\right).\ell^2 \\ \left(\frac{1}{6}.t_1 + \frac{1}{3}.t_2\right).\ell \\ \left(\frac{3}{20}.g_1 + \frac{7}{20}.g_2\right).\ell \\ \left(-\frac{1}{30}.g_1 - \frac{1}{20}.g_2\right).\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$f_p^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12{,}8 \\ -6{,}8267 \\ 0 \\ -12{,}8 \\ 6{,}8267 \end{Bmatrix}$$



Exemplo

Matriz de rigidez e vetor de forças da estrutura **sem** aplicar **condições de contorno**:

$$Kest = \begin{bmatrix} 0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & -0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 157{,}5 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}590625 & 0 & 1{,}18125 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 148{,}44375 & 0 & 0 & -0{,}39375 & 0 & -0{,}590625 & -147{,}65625 & 0 & 0 \\ 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 315{,}32444 & 0{,}5191 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & -0{,}32444 & 0{,}5191 \\ -0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}5191 & 3{,}4699 & 0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0 & -0{,}5191 & 0{,}5537 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 0{,}39375 & 0 & 0{,}590625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -157{,}5 & 0 & 0 & 157{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}590625 & 0 & 0{,}590625 & 0{,}590625 & 0 & 1{,}18125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -147{,}65625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 147{,}65625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}32444 & -0{,}5191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}32444 & -0{,}5191 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5191 & 0{,}5537 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5191 & 1{,}1074 \end{bmatrix}$$

$$\{Fest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 50 \quad -12{,}8 \quad -6{,}8267 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12{,}8 \quad 6{,}8267\}$$

Exemplo

Impondo as condições de contorno, por exemplo, aplicando a técnica de “zeros” e “uns”, tem-se a matriz e o vetor de forças alterados para:

```
kest =

    1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0  148.4437         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0  315.3244    0.5191         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.5191    3.4699         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0    1.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0    1.0000         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    1.0000         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    1.0000
```

$$\{Fest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 50 \quad -12{,}8 \quad -6{,}8267 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Resolvendo sistema linear...

Exemplo

```
>> inv(kest)*Fest

ans =

         0
         0
         0
    0.3368
   -0.0374
   -1.9618
         0
         0
         0
         0
         0
         0
```


$$\{Uest\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}3368 \quad (-3{,}7363\,E-2) \quad -1{,}9618 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

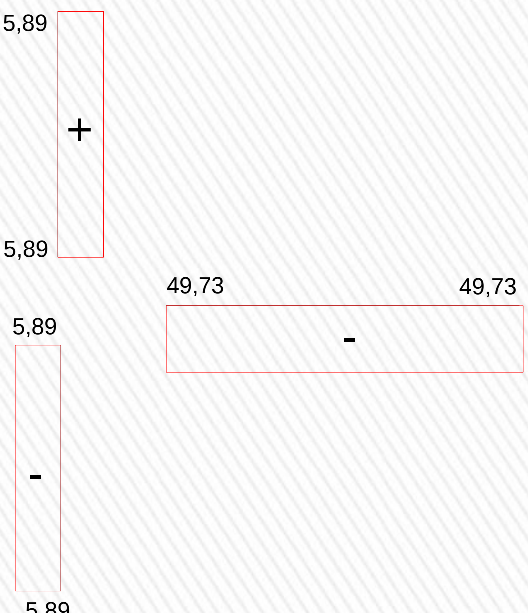
Exemplo

ESFORÇOS FINAIS

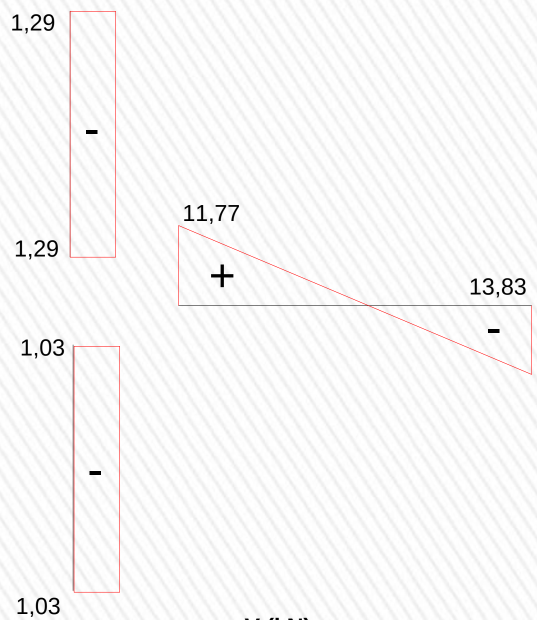
$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} 5{,}88475 \\ -1{,}0261 \\ -0{,}9597 \\ -5{,}88475 \\ 1{,}0261 \\ -2{,}1184 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} -5{,}88475 \\ -1{,}2913 \\ -2{,}5163 \\ 5{,}88475 \\ 1{,}2913 \\ -1{,}3576 \end{Bmatrix}$$

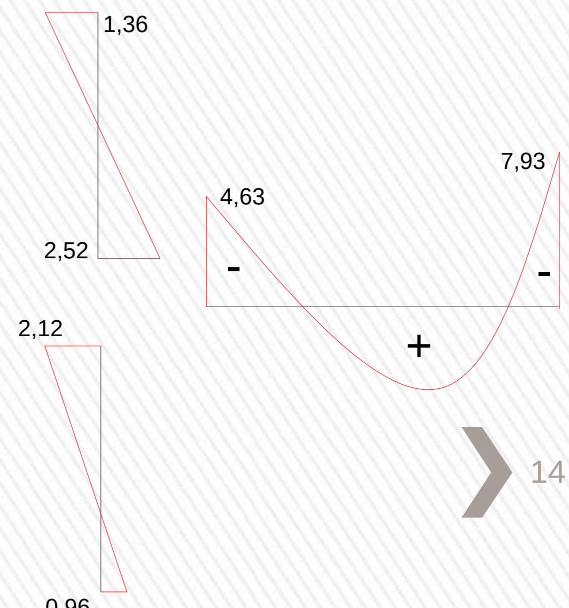
$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{Bmatrix}^3 = \begin{Bmatrix} 49{,}7347 \\ 11{,}7695 \\ 4{,}6347 \\ -49{,}7347 \\ 13{,}8305 \\ -7{,}9323 \end{Bmatrix}$$



N (kN)



V (kN)



M (kN.m)

Mostrado exemplo no programa de portico plano....