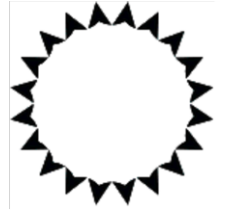




*PEF2602*  
*Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados*  
*2º semestre 2018*



# *Treliças - I*

*(Aula 3 - 10/09/2018)*

*Professores*

*Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Antônio Bitencourt Jr.*



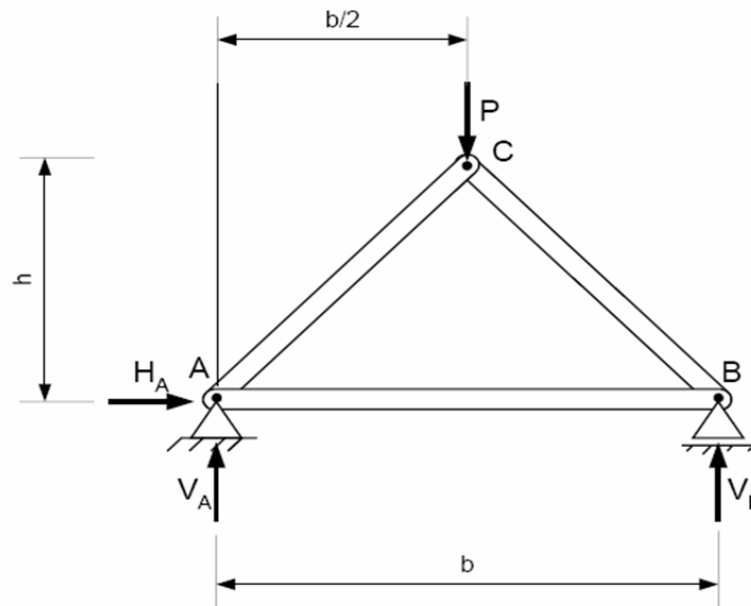
Pontes em arcos treliçados sobre o rio Karun, Irã (2012)  
Vão principal (300m)



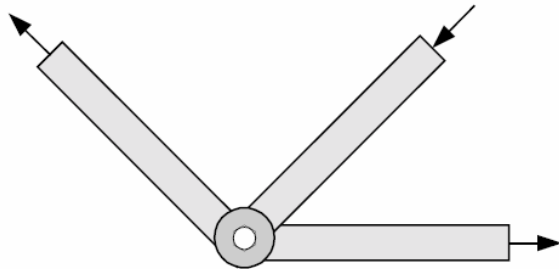
*PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados*



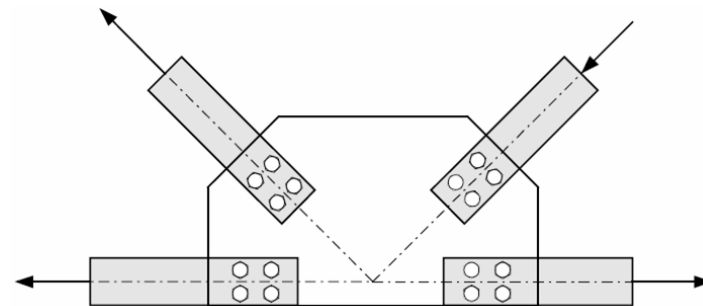




Módulo básico de uma treliça plana (Triângulo)



Nó ideal: articulação



Nó usual: rígido, mas com os eixos das barras convergindo para os nós





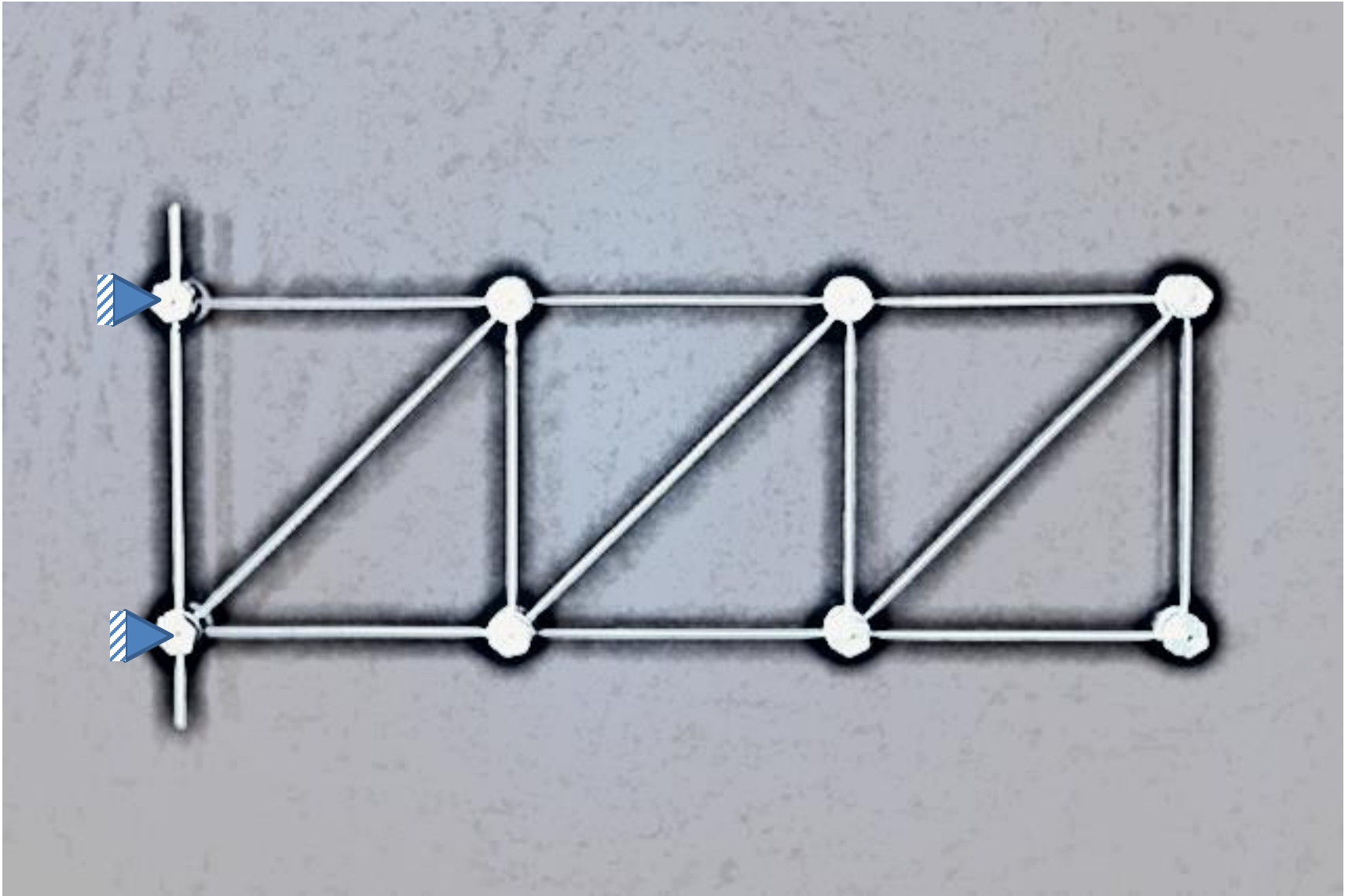




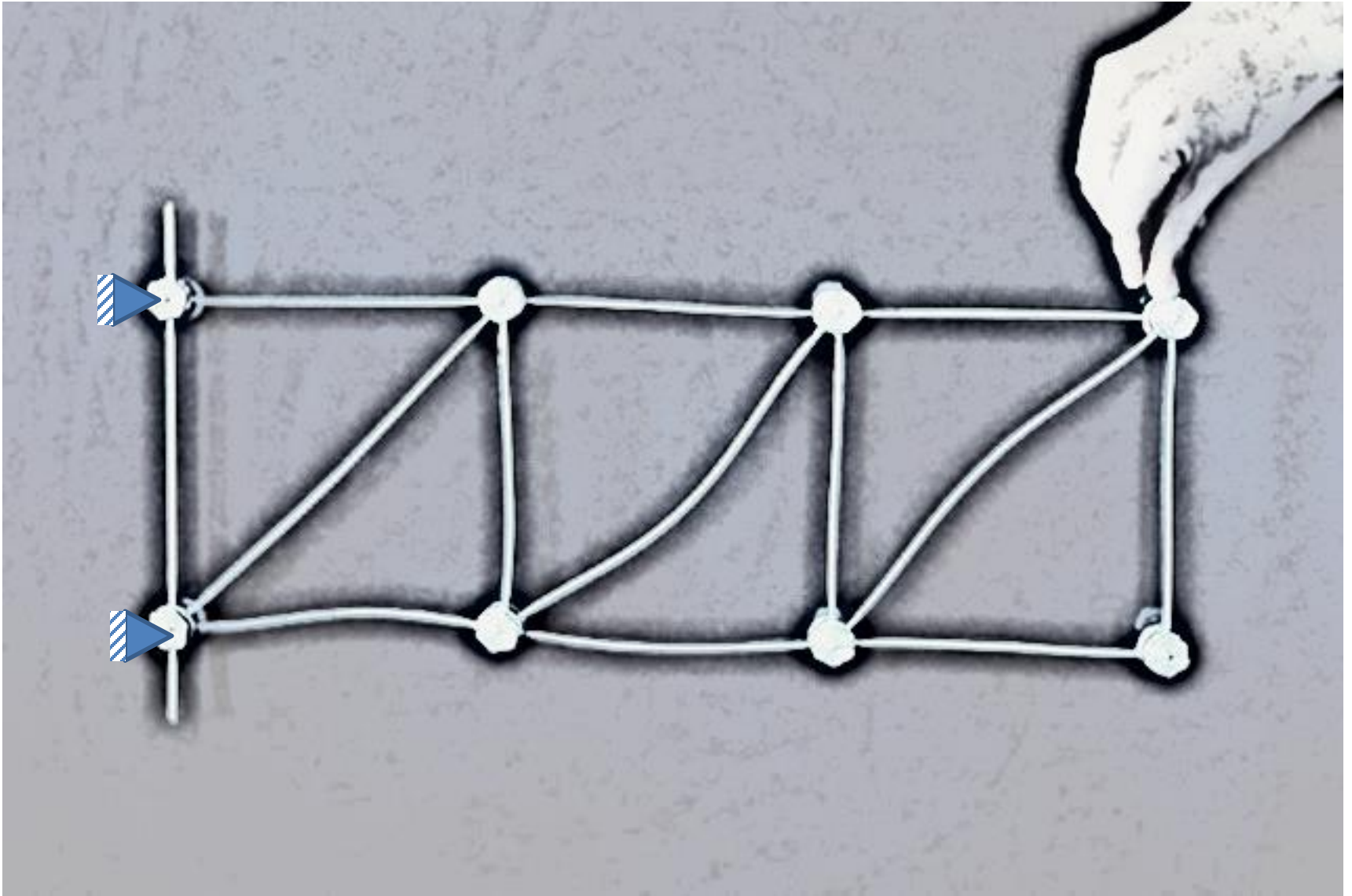
[www.ofiscaldafei.com.br](http://www.ofiscaldafei.com.br)

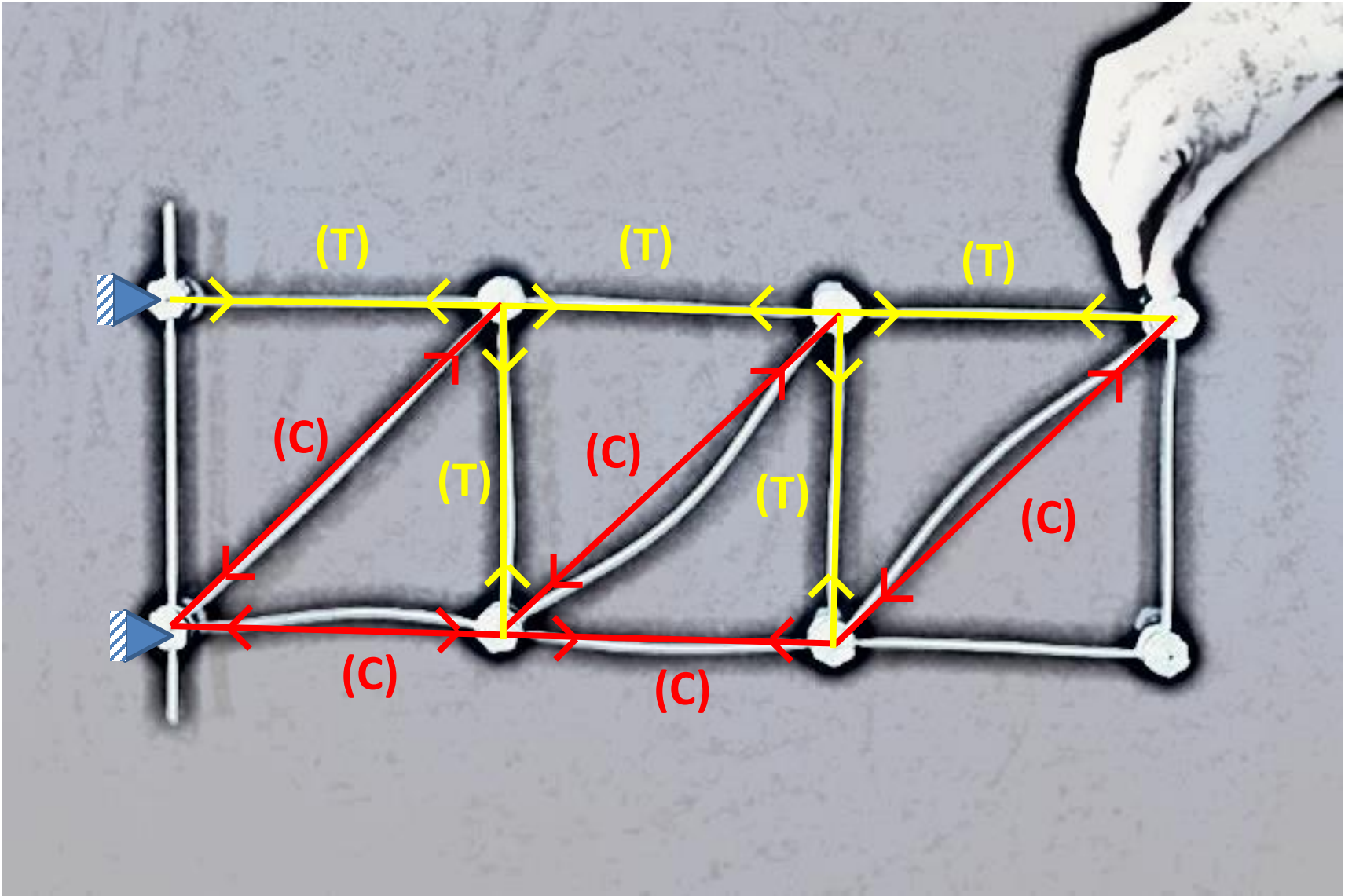
Arena Corinthians  
12/07/2013



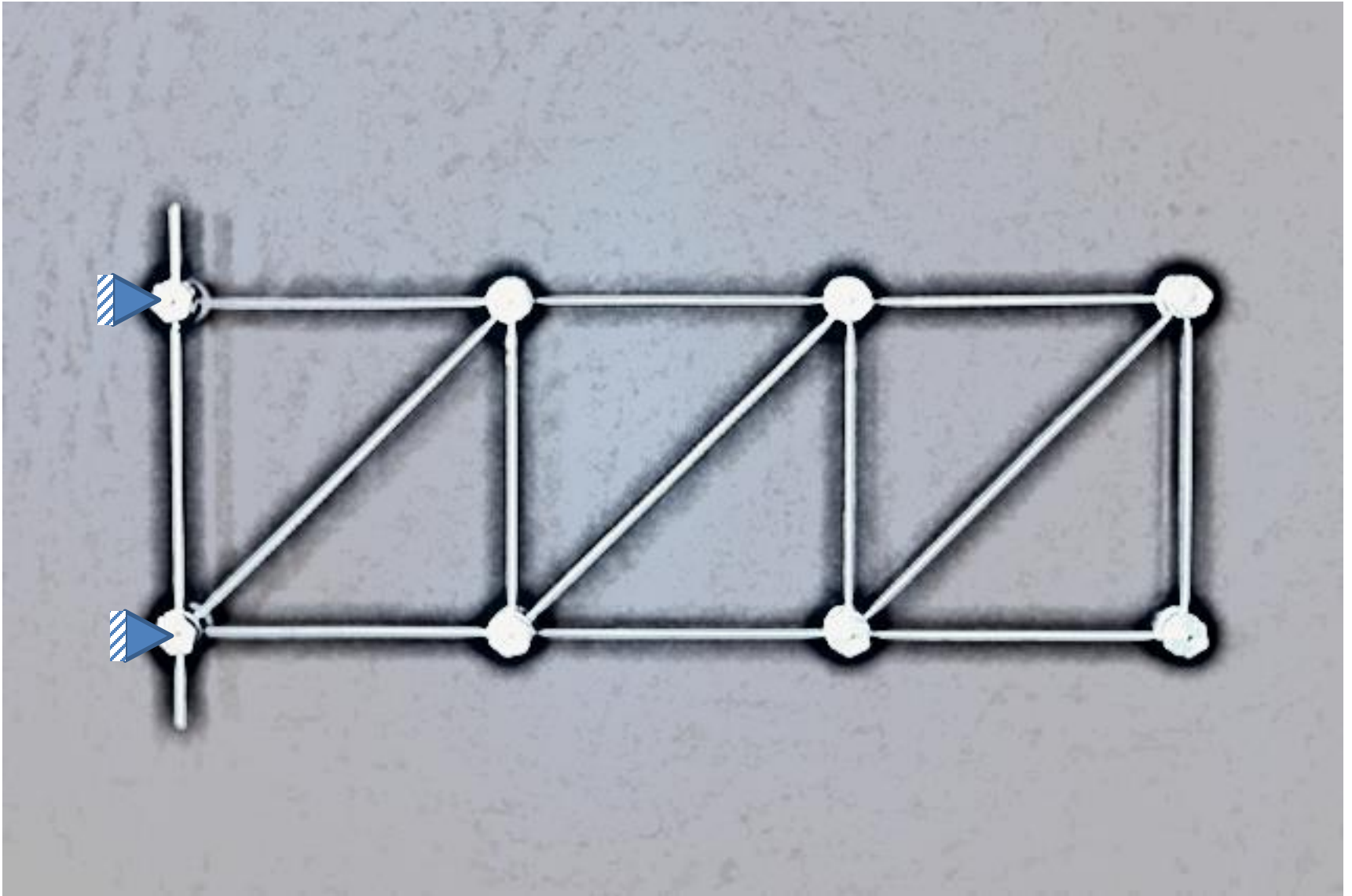


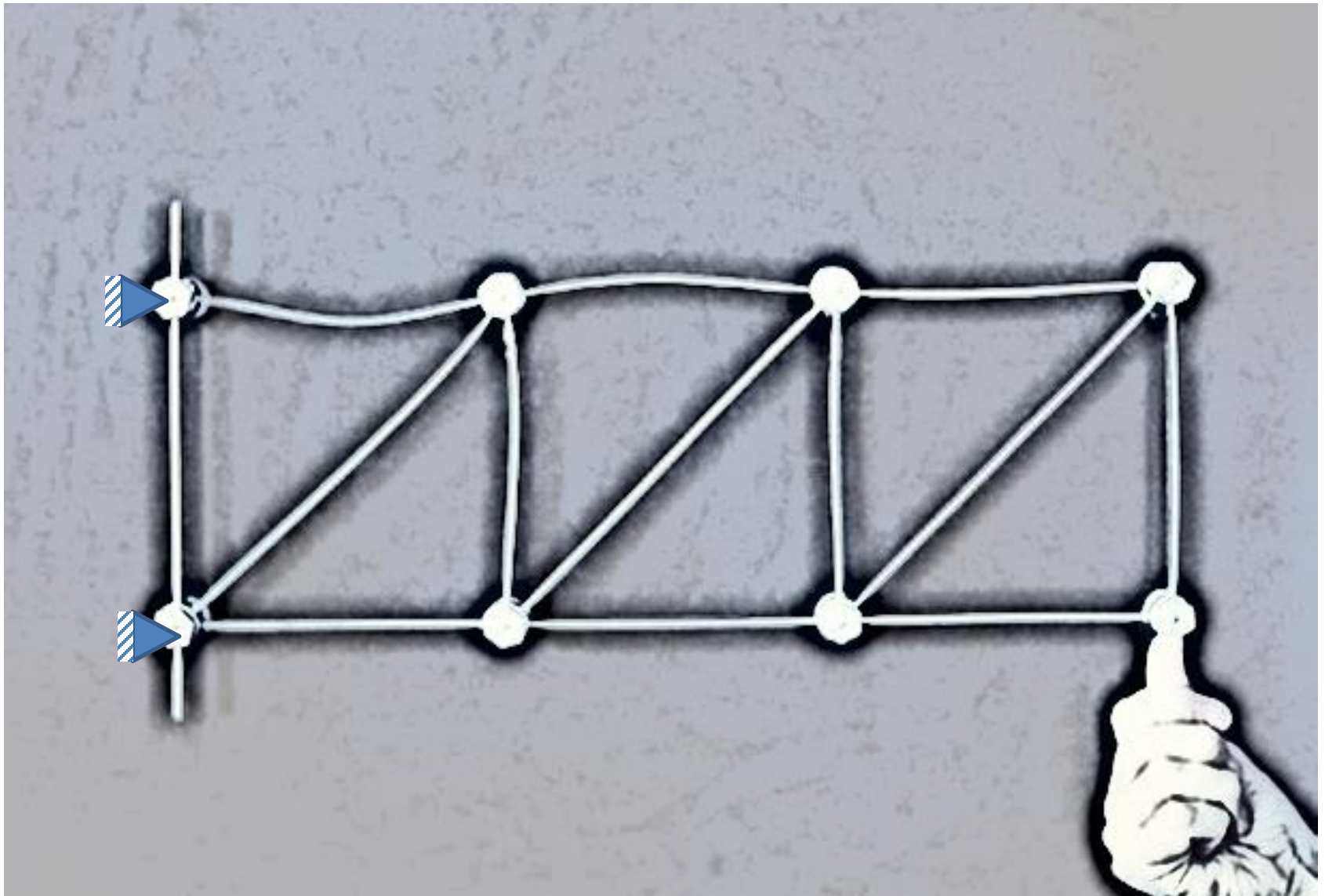




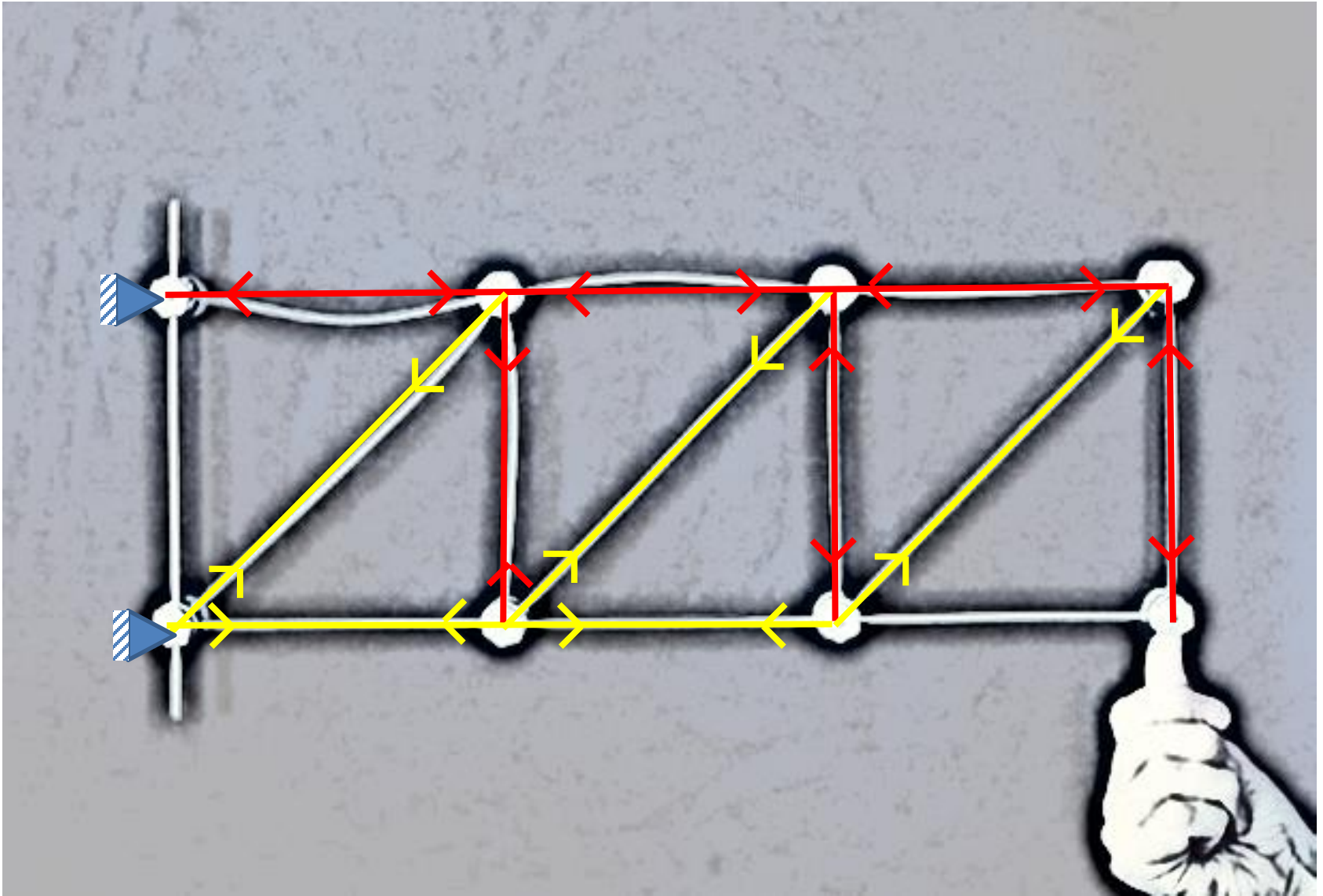


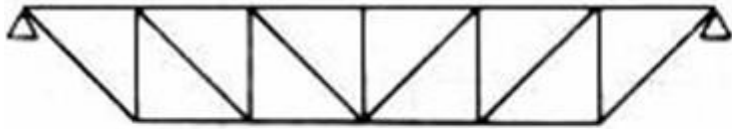




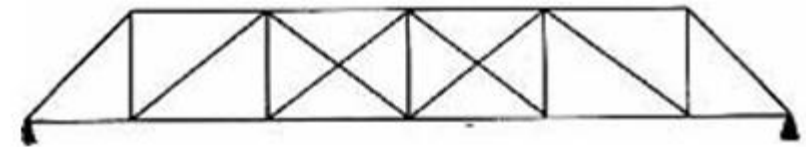
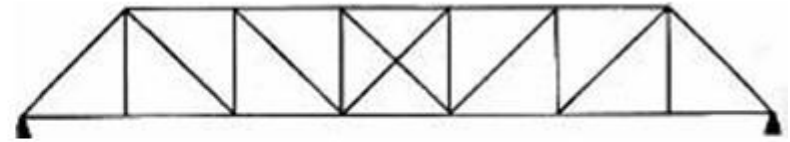




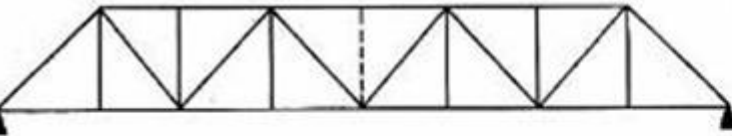




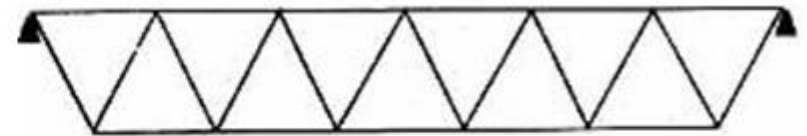
**Treça Pratt**



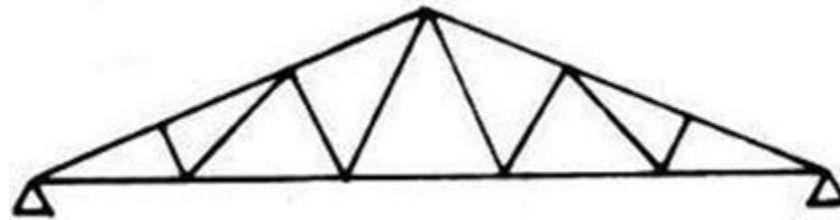
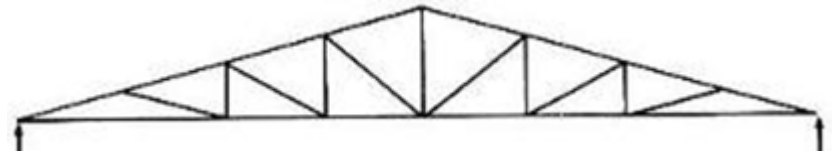
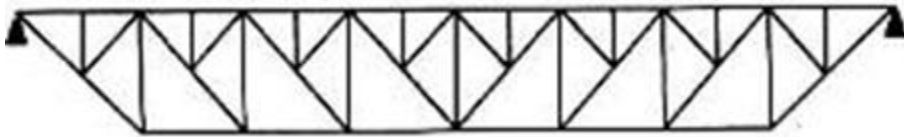
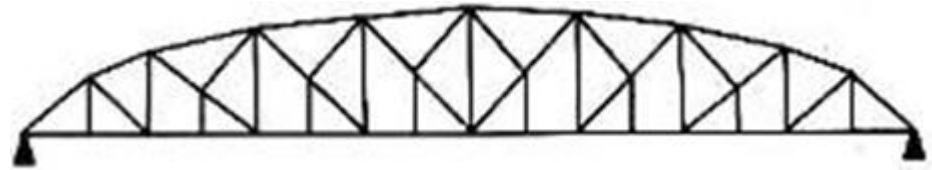
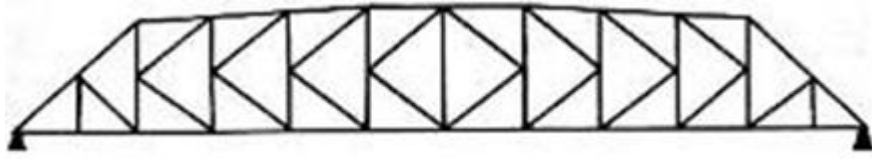
**Treça Howe**



**Treça Warren**

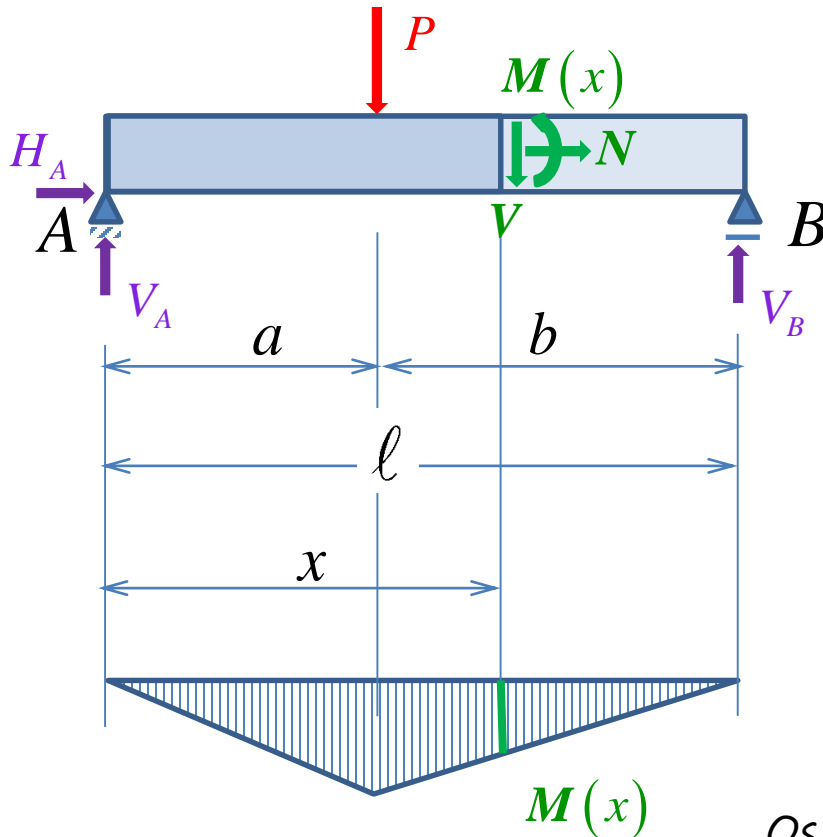






# TRELIÇAS – Método de Ritter

Recordando das VIGAS:



Equilíbrio: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_H^i = H_A = 0 \\ \sum_i F_V^i = V_A + V_B - P = 0 \\ \sum_i M^i(A) = V_B \ell - Pa = 0 \end{array} \right.$$

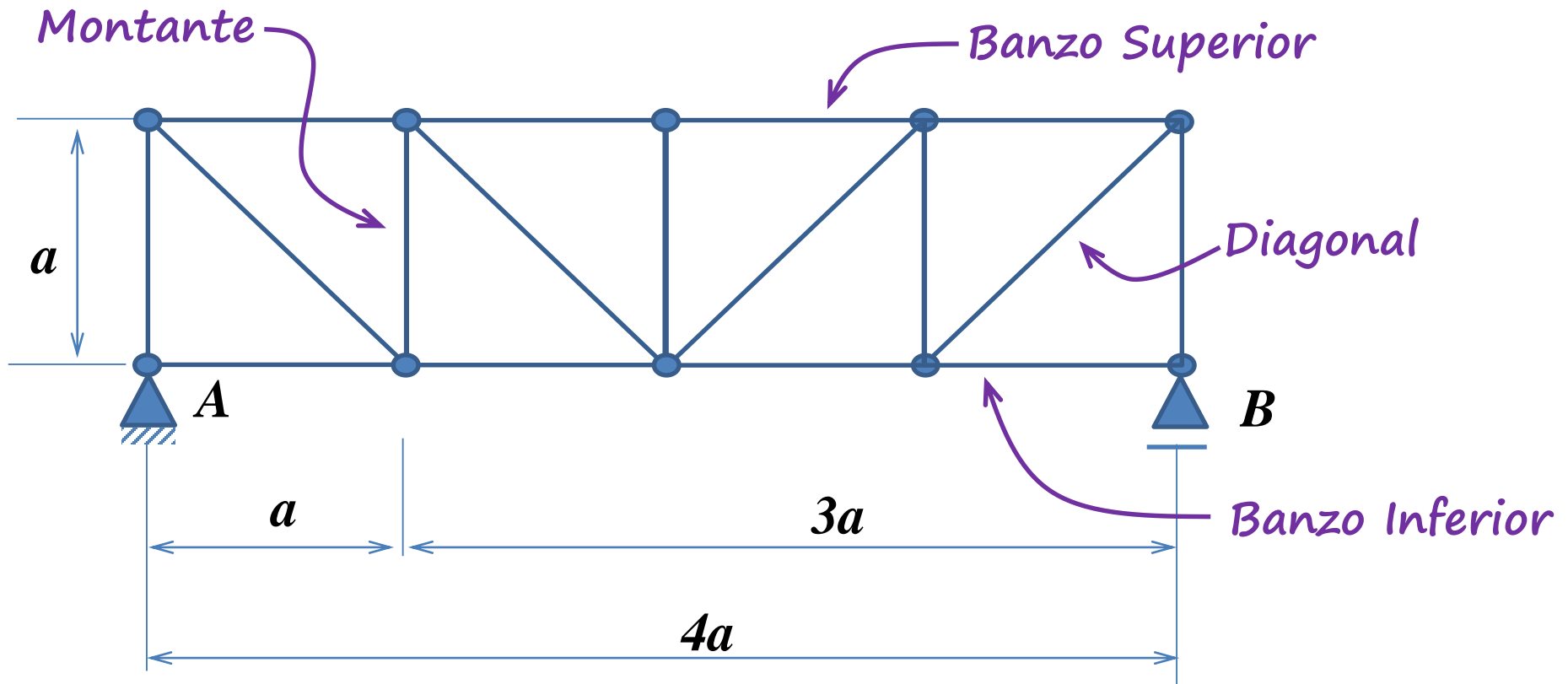
$$\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ V_B = \frac{Pa}{\ell} \\ \vdots \\ V_A = \frac{P(\ell - a)}{\ell} = \frac{Pb}{\ell} \end{array}$$

Os esforços solicitantes são determinados imaginando-se seções de corte genéricas!

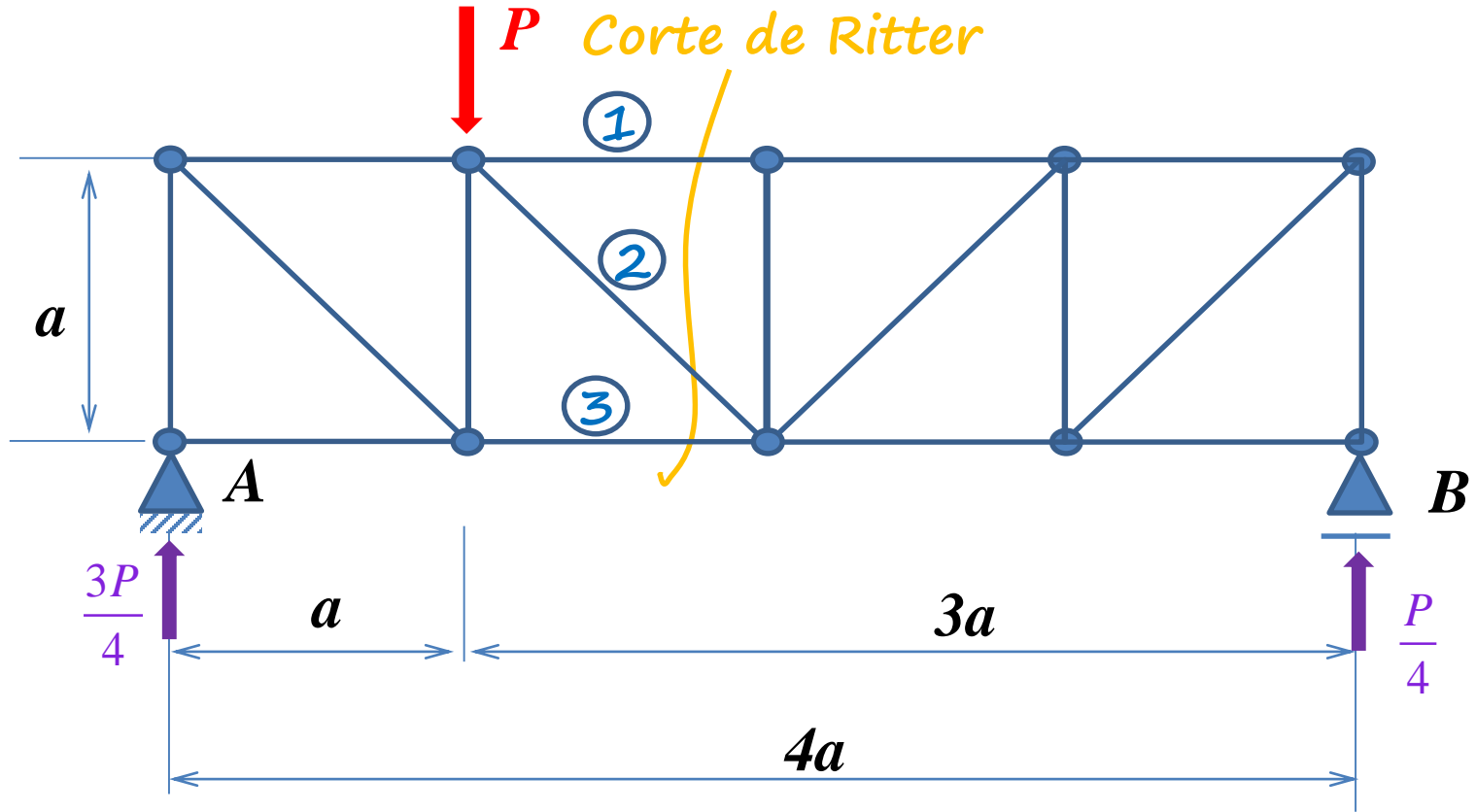




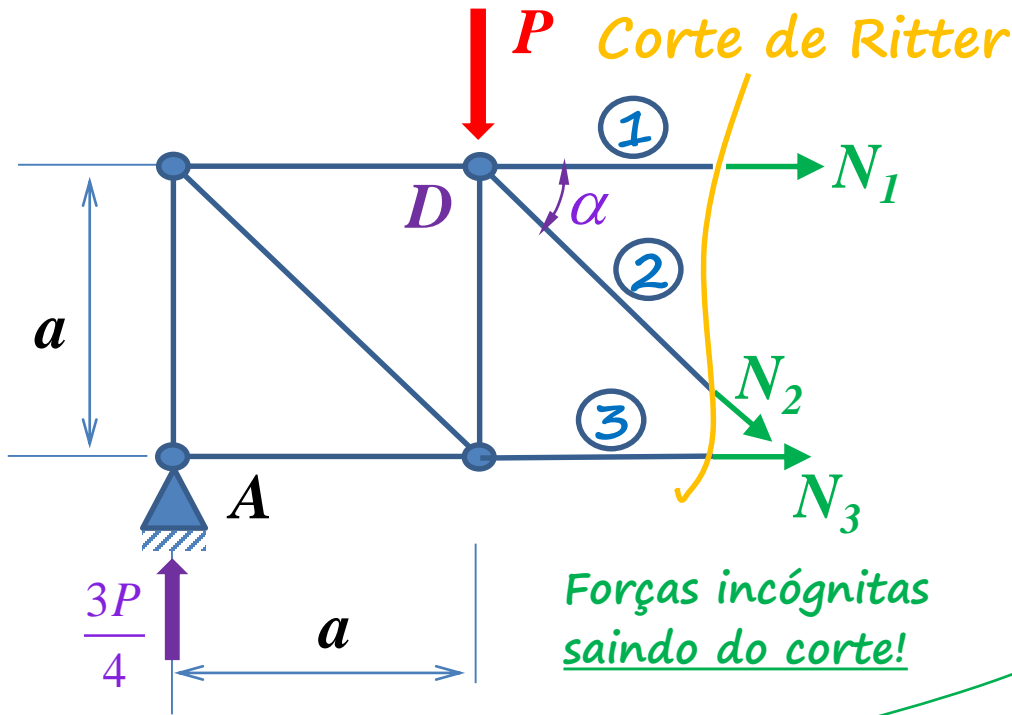
# TRELIÇAS – Método de Ritter



# TRELIÇAS – Método de Ritter



# TRELIÇAS – Método de Ritter



$$\sum_i F_H^i = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 = 0$$

$$N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 + N_3 = 0$$

$$\sum_i F_V^i = \frac{3}{4} P - P - N_2 \sin \alpha = 0$$

$$N_2 = -\frac{\sqrt{2}P}{4}$$

**Compressão!**

$$\sum_i M_{(D)}^i = N_3 a - \frac{3P}{4} a = 0$$

$$N_3 = \frac{3P}{4}$$

**Tração!**

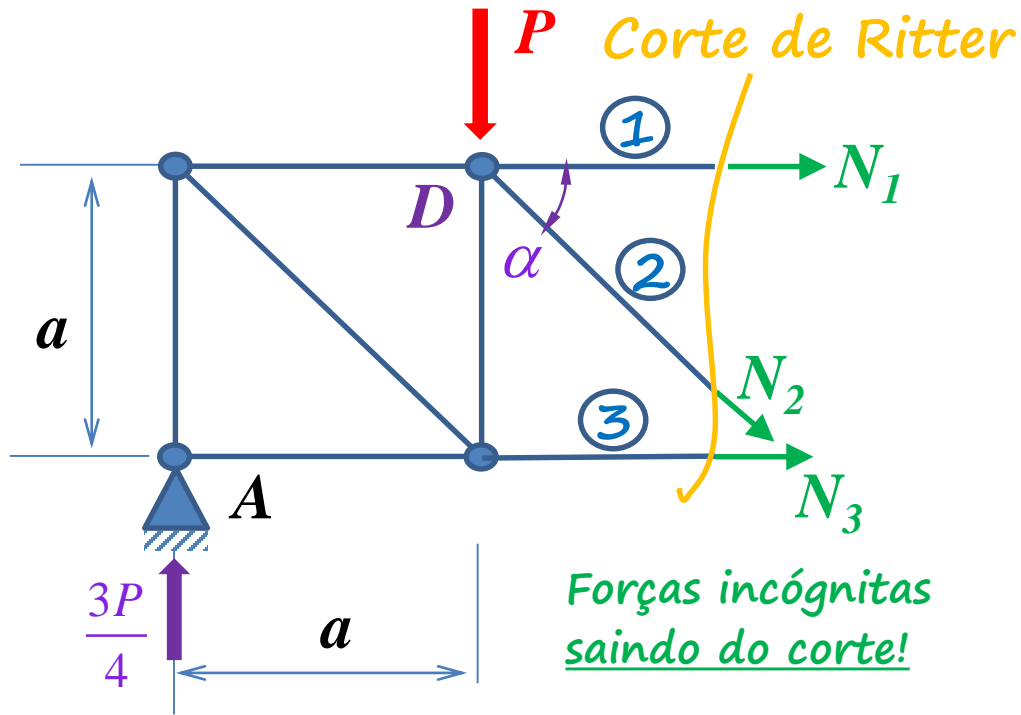
$$N_1 = -\frac{P}{4}$$

**Compressão!**





# TRELIÇAS – Método de Ritter

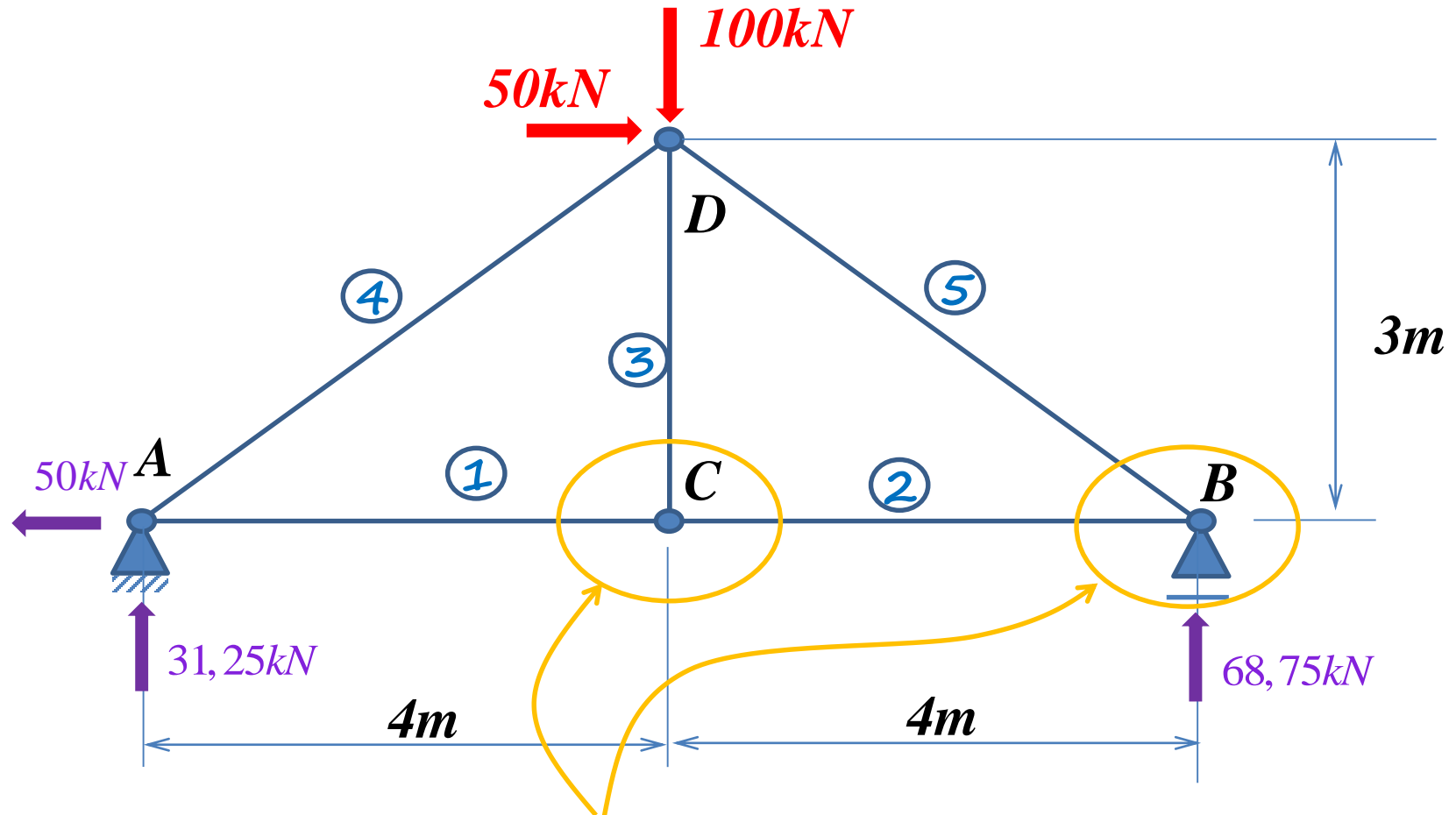


## Notas:

- Até 3 barras podem ser determinadas por cada corte de Ritter!
- Podem ser cortadas quantas barras forem necessárias!



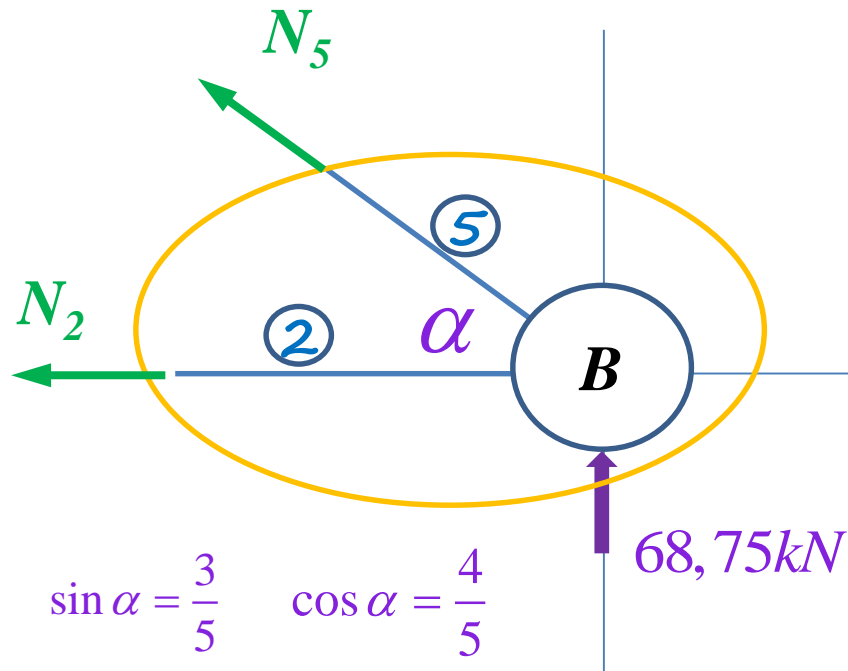
# TRELIÇAS – Método dos Nós



*Cortes de Ritter em torno dos nós!*



## Corte de Ritter em torno do nó B:



$$\sum_i F_H^i = -N_2 - N_5 \cos \alpha = 0$$

$$N_2 = -\frac{4}{5} N_5$$

$$\sum_i F_V^i = N_5 \sin \alpha + 68,75 = 0$$

$$N_5 = -\frac{5}{3} 68,75 = -114,5833 \text{ kN}$$

*Compressão!*

$$N_2 = -\frac{4}{5} \times (-114,5833) = +91,667 \text{ kN}$$

*Tração!*

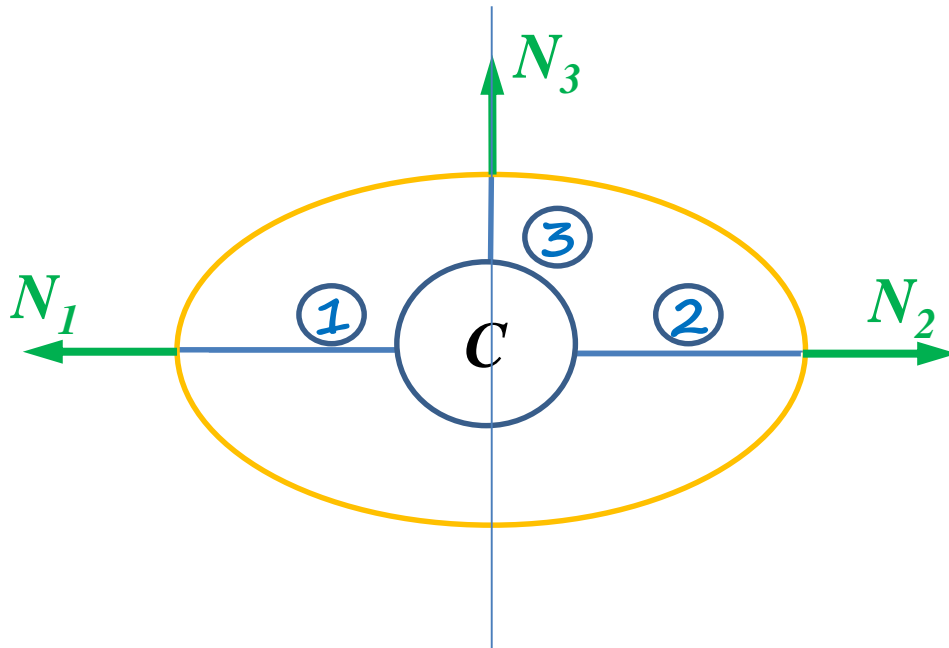
$$\sum_i M_{(B)}^i = 0$$

Trivial!  $\Rightarrow$  O Método dos nós gera apenas duas equações de equilíbrio de forças para cada nó!





## Corte de Ritter em torno do nó C:



$$\sum_i F_V^i = N_3 = 0$$

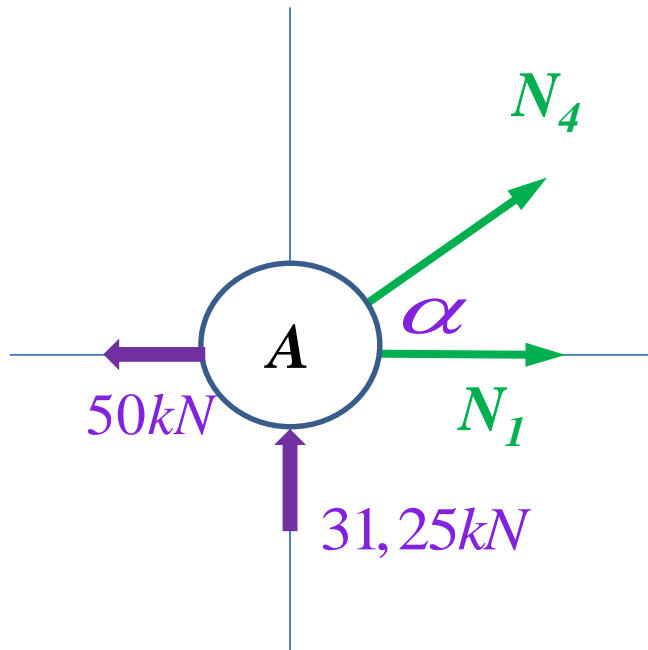
Pode-se concluir por  
simples inspeção!

$$\sum_i F_H^i = N_2 - N_1 = 0$$

$$N_1 = N_2 = +91,667 \text{ kN}$$



Nó A:



$$\sum_i F_V^i = N_4 \sin \alpha + 31,25 = 0$$

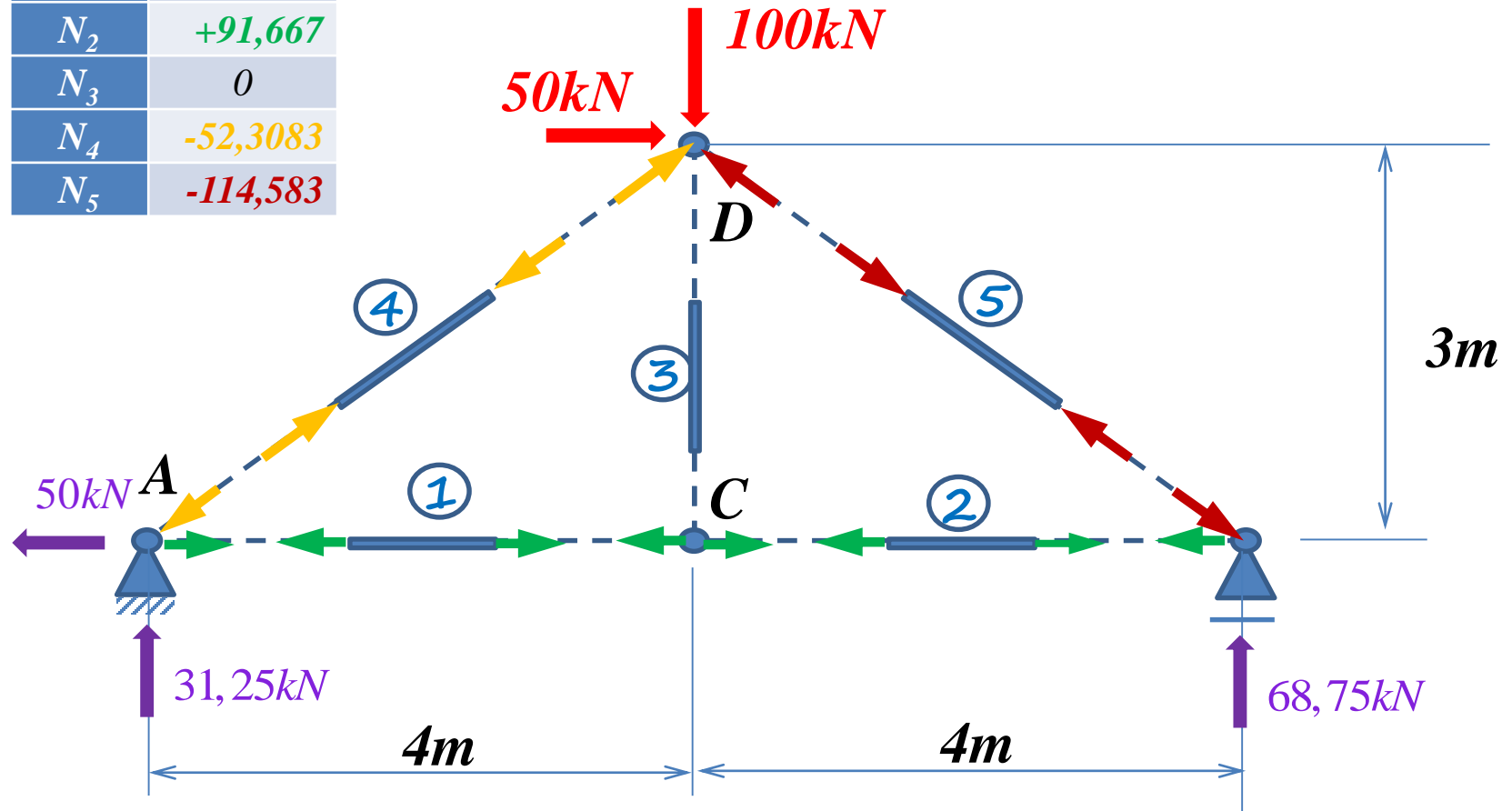
$$N_4 = -\frac{5}{3} 31,25 = -52,083kN$$

Sobram 3 equações de equilíbrio nodal: que servem de verificação:

- Equilíbrio horizontal do nó A
- Equilíbrio horizontal e vertical do nó D

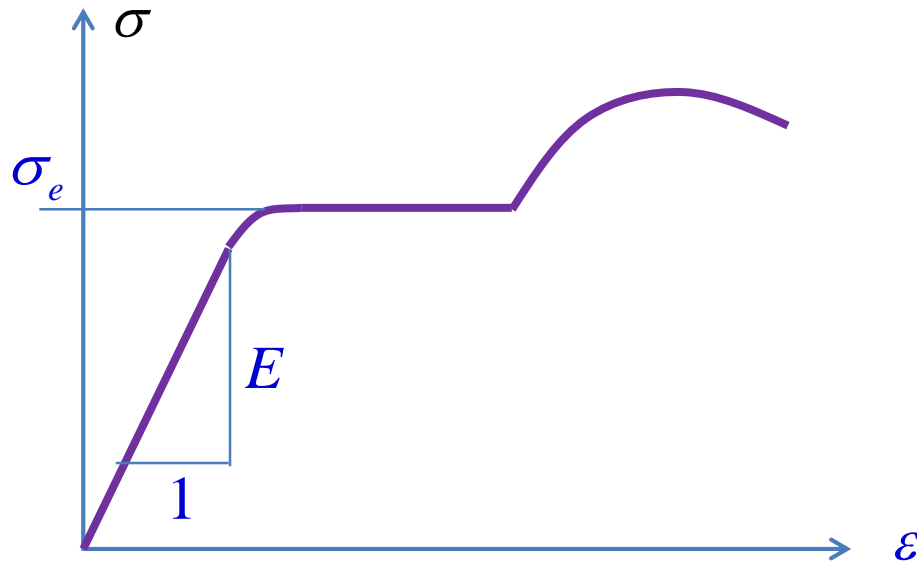


	[kN]
$N_1$	+91,667
$N_2$	+91,667
$N_3$	0
$N_4$	-52,3083
$N_5$	-114,583





## Dimensionamento:



$$E = 210GPa$$

$$\sigma_{\text{lim}} = \sigma_e = 250MPa$$

$$s = 2 \quad (\text{coeficiente de seguran\c{c}a})$$

Tens\c{c}o admiss\c{i}vel:

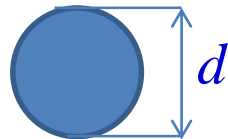
$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s} = \frac{250}{2} = 125MPa$$



1. Barras Tracionadas:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}$$

1.1. Adotando barra circular, de diâmetro 'd':

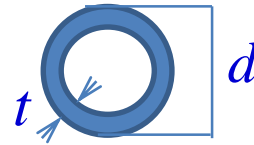


$$A = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N}{\bar{\sigma}}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi\bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{4 \times 91,667 \times 10^3}{\pi \times 125 \times 10^6}} = 0,0306m = 3,06cm$$



1.2. Escolha de um perfil comercial:



$$A \geq \frac{N}{\bar{\sigma}} = \frac{91,667 \times 10^3}{125 \times 10^6} = 7,33 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 7,33 \text{ cm}^2$$

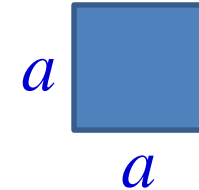
Catálogo Vallourec & Mannesmann:

Diâmetro externo	Espessura da parede	Massa linear	Superfície de corte transversal	Segundo momento da superfície	Raio de inércia	Momento elástico de resistência	Momento plástico de resistência
D	T	M	A	I	i	W <sub>el</sub>	W <sub>pl</sub>
mm	mm	kg/m	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>
48,3	2,9	3,25	4,14	10,7	1,61	4,43	5,99
	5,6	5,90	7,51	17,4	1,52	7,21	10,3
	6,3	6,53	8,31	18,7	1,50	7,76	11,2
60,3	3,2	4,51	5,74	23,5	2,02	7,78	10,4
	3,6	5,03	6,41	25,9	2,01	8,58	11,6
	4,0	5,55	7,07	28,2	2,00	9,34	12,7
	4,5	6,19	7,89	30,9	1,98	10,2	14,0
76,1	3,2	5,75	7,33	48,8	2,58	12,8	17,0
	3,6	6,44	8,20	54,0	2,57	14,2	18,9
	4,0	7,11	9,06	59,1	2,55	15,5	20,8



## 2. Barras Comprimidas:

2.1. Adotando seção quadrada maciça, de lado 'a':



$$A = a^2 \quad I = \frac{a^4}{12}$$

(Nota: não é uma escolha prática, é apenas para exercitar as fórmulas!)

1º Critério: Tensão Normal:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N_{\max}^c}{A} \leq \bar{\sigma}$$

$$N_{\max}^c = -114,4583 \text{ kN} \quad |\sigma| = \frac{|-114,4583 \times 10^3|}{a^2} \leq 125 \times 10^6$$

$$a \geq \sqrt{\frac{114,4583 \times 10^3}{125 \times 10^6}} = 0,0303 \text{ m} = 3,03 \text{ cm}$$

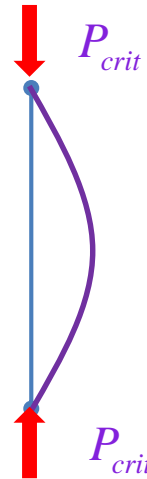




## 2. Barras Comprimidas:

### 2º Critério: Estabilidade

$$|N| \leq \frac{P_{crit}}{s}$$



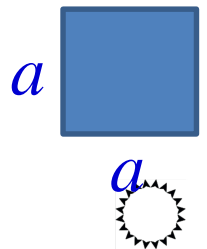
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$|N_{max}^c| \leq \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$I = \frac{a^4}{12} \geq \frac{s l^2 |N_{max}^c|}{\pi^2 E}$$

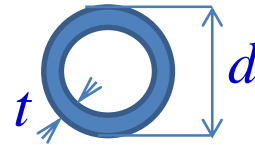
$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12 s l^2 |N_{max}^c|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \times 2 \times 5^2 \times 114,4583 \times 10^3}{\pi^2 \times 210 \times 10^9}} = 0,076m$$

$$a \geq 7,6cm$$



## 2. Barras Comprimidas:

2.1. Escolha de um perfil comercial:



1º Critério: Tensão Normal:

$$\frac{N_{\max}^c}{A} \leq \bar{\sigma}$$

$$A \geq \frac{N_{\max}^c}{\bar{\sigma}}$$

$$A \geq \frac{|-114,4583 \times 10^3|}{125 \times 10^6} = 9,157 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 9,157 \text{ cm}^2$$

2º Critério: Estabilidade

$$|N_{\max}^c| \leq \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

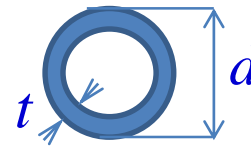
$$I \geq \frac{s l^2 |N_{\max}^c|}{\pi^2 E}$$

$$I \geq \frac{2 \times 5^2 \times 114,4583 \times 10^3}{\pi^2 \times 210 \times 10^9} = 2,76 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 276 \text{ cm}^4$$



## 2. Barras Comprimidas:

### 2.1. Escolha de um perfil comercial:



$$A \geq 9,157 \text{ cm}^2$$

$$I \geq 276 \text{ cm}^4$$

Perfis MSH de seção circular

Diâmetro externo	Espessura da parede	Massa linear	Superfície de corte transversal	Segundo momento da superfície
D	T	M	A	I
mm	mm	kg/m	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>
76,1	3,2	5,75	7,33	48,8
	3,6	6,44	8,20	54,0
	4,0	7,11	9,06	59,1
	4,5	7,95	10,1	65,1
88,9	17,5	25,3	32,2	151
	20,0	27,7	35,2	156
	3,6	7,57	9,65	87,9
	4,0	8,38	10,7	96,3
114,3	17,5	30,8	39,3	265
	20,0	34,0	43,3	279
	25,0	39,4	50,2	295
	4,5	13,0	16,6	81,0

Perfis MSH de seção circular

Diâmetro externo	Espessura da parede	Massa linear	Superfície de corte transversal	Segundo momento da superfície
D	T	M	A	I
mm	mm	kg/m	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>
101,6	4,0	9,63	12,3	146
	8,8	20,1	25,7	279
	10,0	22,6	28,8	305
	---	---	---	---
114,3	4,0	10,9	13,9	211
	4,5	12,2	15,5	234
	5,0	13,5	17,2	257
	5,6	15,0	19,1	283
139,7	4,5	15,0	19,1	437
	5,0	16,6	21,2	481
	5,6	18,5	23,6	531
	6,3	20,7	26,4	589



# Regra de Maxwell para Treliças Planas

- \* Cada nó de uma treliça plana fornece 2 equações de equilíbrio
  - Logo, sendo  $n$  o número de nós, tem-se um total de  $2n$  equações de equilíbrio;
  
- \* Cada barra treliça fornece 1 esforço solicitante, inicialmente incógnito
  - Logo, sendo  $b$  o número de barras tem-se um total de  $b$  esforços incógnitos;
  
- \* Cada vínculo externo também fornece uma incógnita!
  - Logo, sendo  $r$  o número de vínculos, tem-se um total de incógnitas igual  $(r+b)$



# Regra de Maxwell para Treliças Planas

- \* Uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma treliça seja isostática, isto é, possa ser resolvida exclusivamente por equações de equilíbrio é que  $2n = b + r$
- \* Se  $b + r > 2n$ , existe um excesso de incógnitas, e novas equações devem ser acrescentadas para a resolução do problema – a treliça é hiperestática!
- \* Se  $b + r < 2n$ , existe uma carência de vínculos (internos e externos), e a treliça é hipostática (apresenta movimentos de corpo rígido ou mecanismos!)

- Rearranjando e resumindo:

Regra de Maxwell  
(para treliças planas):

$$2n - b \begin{cases} < r & \therefore \text{treliça hiperestática} \\ = r & \therefore \text{treliça isostática} \\ > r & \therefore \text{treliça hipostática} \end{cases}$$

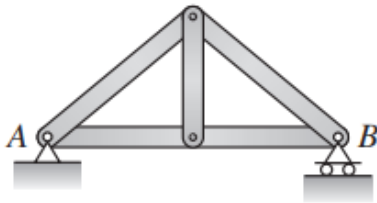
- Observa-se que a regra de Maxwell apresenta condições necessárias, mas não suficientes, para os casos de treliças isostáticas ou hiperestáticas, pois o arranjo das barras e vínculos pode ser deficiente!





# Regra de Maxwell para Treliças Planas

Exercício. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.  
(Adaptado de Leet et al., *Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).

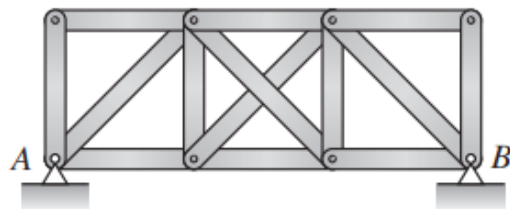


(a)

$$2n - b = 2 \times 4 - 5 = 3$$

$$r = 3$$

∴ treliça isostática



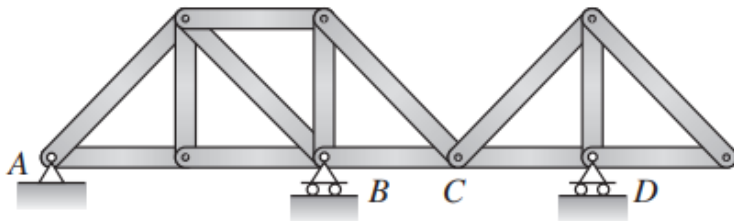
(b)

$$2n - b = 2 \times 8 - 14 = 2$$

$$r = 4$$

∴ treliça 2 vezes hiperestática

( 1 grau de hiperestaticidade interna  
+ 1 grau de hiperestaticidade externa)



(c)

$$2n - b = 2 \times 9 - 14 = 4$$

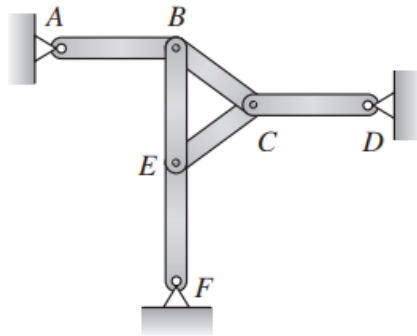
$$r = 4$$

∴ treliça isostática



# Regra de Maxwell para Treliças Planas

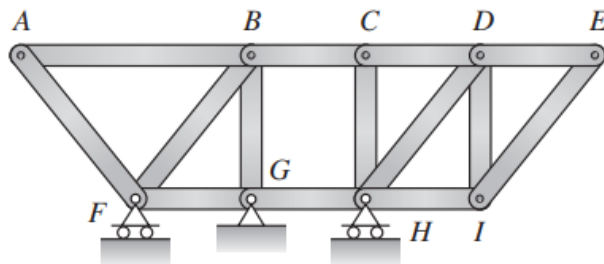
Exercício. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.  
(Adaptado de Leet et al., *Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).  
Consulte respostas comentadas nessa referencia!



(d)

$$2n - b = 2 \times 6 - 6 = 6$$

$$r = 3 \times 2 = 6 \quad \therefore \text{treliça isostática}$$



(e)

$$2n - b = 2 \times 9 - 14 = 4$$

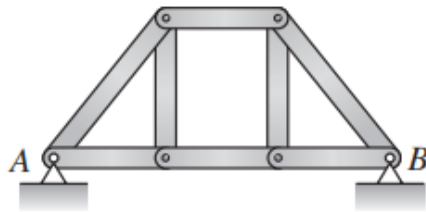
$$r = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\therefore \text{treliça isostática}$$



# Regra de Maxwell para Treliças Planas

Exercício. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.  
 (Adaptado de Leet et al., *Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).  
Consulte respostas comentadas nessa referência!

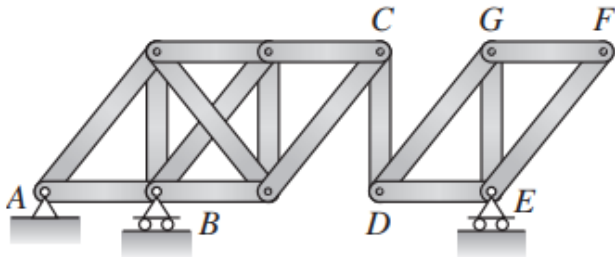


(f)

$$2n - b = 2 \times 6 - 8 = 4$$

$$r = 4 \times 2 = 4$$

∴ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torna indeterminada para pequenos deslocamentos...

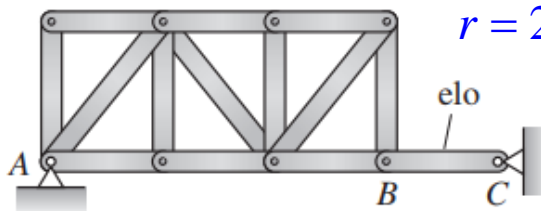


(g)

$$2n - b = 2 \times 10 - 16 = 4$$

$$r = 2 + 1 + 1 = 4$$

∴ a treliça atende a Regra de Maxwell, mas apresenta um mecanismo, que a torna 1 vez internamente hipostática.



(h)

$$2n - b = 2 \times 9 - 14 = 4$$

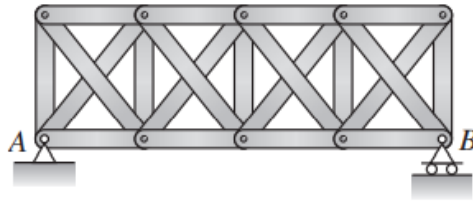
$$r = 2 + 2 = 4$$

∴ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torna indeterminada para pequenos deslocamentos...



# Regra de Maxwell para Treliças Planas

Exercício. Determine o grau de estaticidade das treliças esquematizadas a seguir.  
(Adaptado de Leet et al., *Fundamentos da análise Estrutural*, 3ª Edição, McGraw-Hill, 2009).  
Consulte respostas comentadas nessa referência!

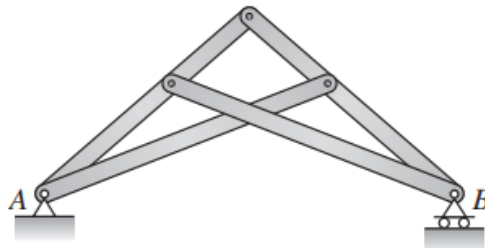


(i)

$$2n - b = 2 \times 10 - 21 = -1$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

∴ treliça quatro vezes internamente hiperestática,  
mas externamente isostática.

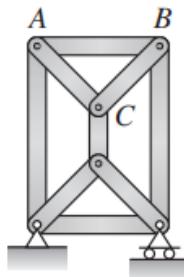


(j)

$$2n - b = 2 \times 5 - 6 = 4$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

∴ treliça uma vez hipostática



(k)

$$2n - b = 2 \times 6 - 9 = 3$$

$$r = 2 + 1 = 3$$

∴ a treliça atende a Regra de Maxwell, e parece isostática, mas apresenta um mecanismo infinitesimal, que a torna indeterminada para pequenos deslocamentos...

