PEF2602
Estruturas na Arquitetura II - Sistemas Reticulados

2º Semestre 2018
Aula 3 – 10/09/2018

EP-USP

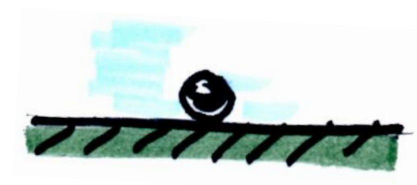
FAU-USP

Parte I :

- **Estabilidade de Barras (Flambagem)**
- **Exercício sobre dimensionamento de colunas**

Professores
Ruy Marcelo Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Antônio Bittencourt Jr.

Estabilidade do Equilíbrio



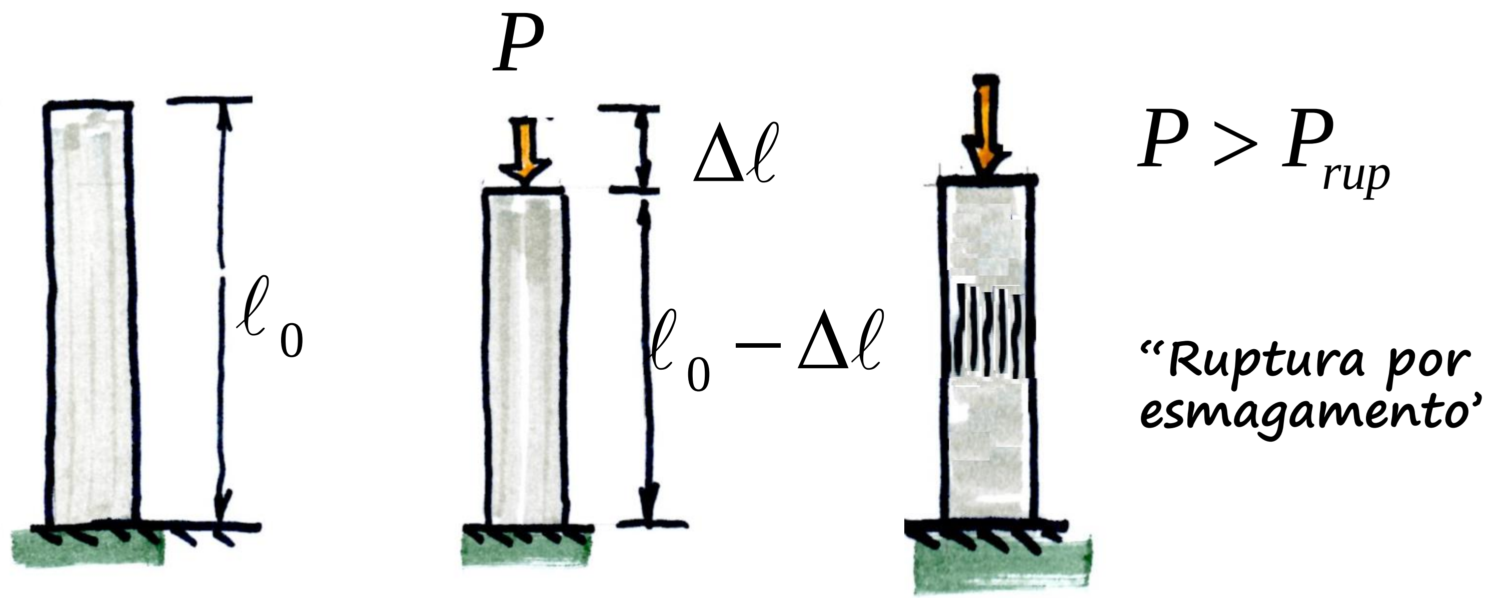
Equilíbrio
Estável

Equilíbrio
Instável

Equilíbrio
Indiferente

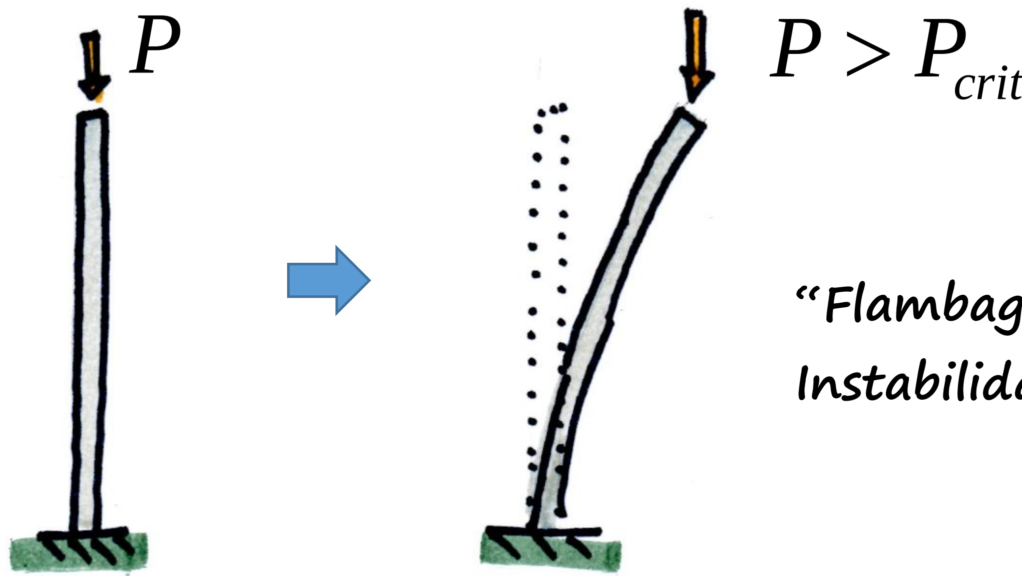
Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Curto:



Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Esbelto



“Flambagem”

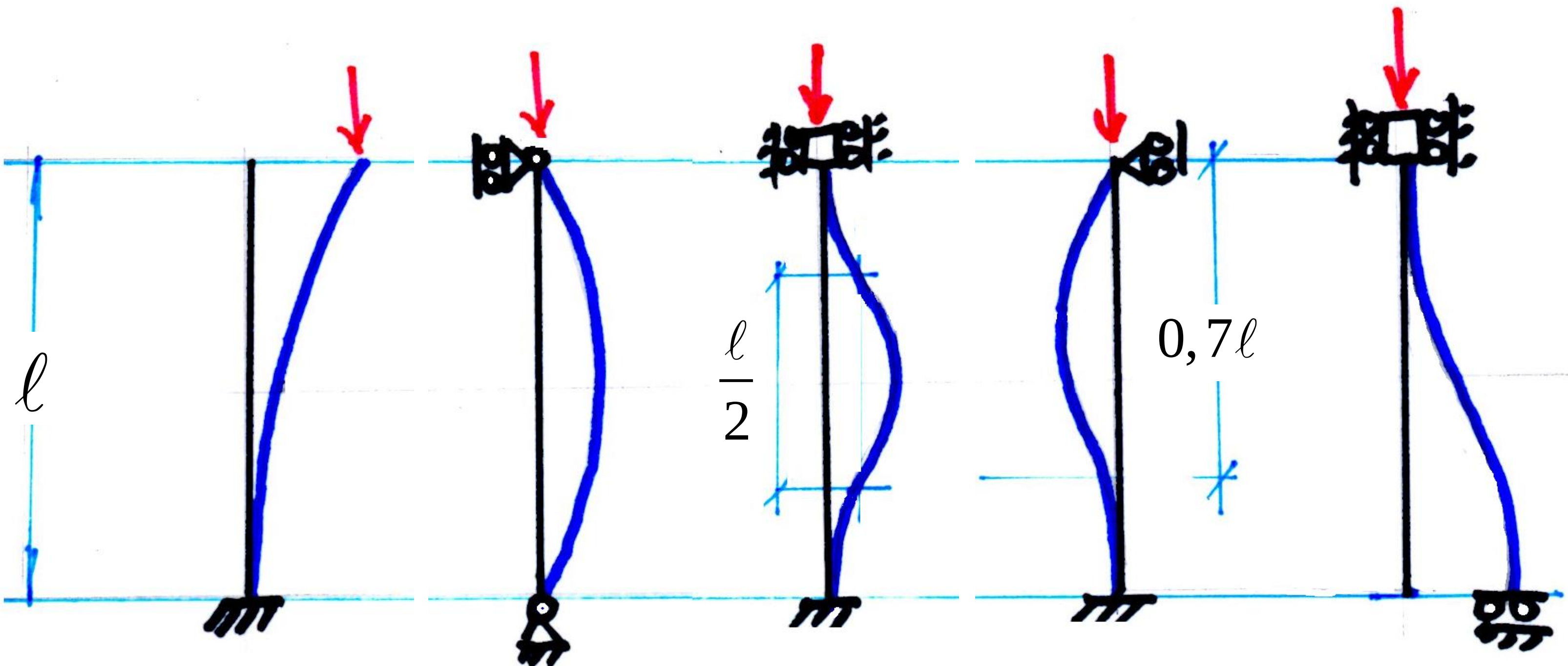
Instabilidade Elástica”

$$\boxed{P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2}}$$

“Fórmula de Euler”

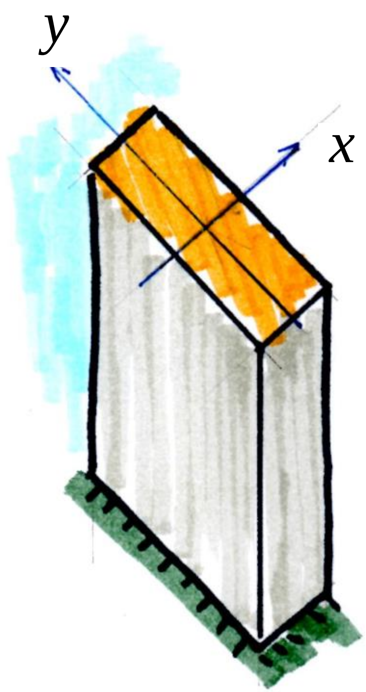
ℓ_f : *comprimento de flambagem*

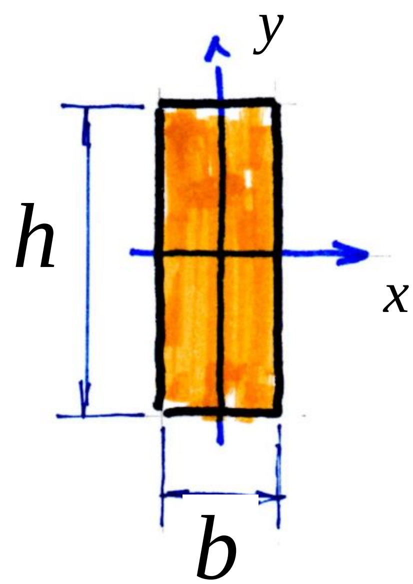
ℓ_f depende da vinculação:



$\ell_f = 2\ell$ $\quad$ $\ell_f = \ell$ $\quad$ $\ell_f = \frac{\ell}{2}$ $\quad$ $\ell_f \cong 0,7\ell$ $\quad$ $\ell_f = \ell$

P_{crit} depende do menor momento de inércia da seção transversal (I_{min})

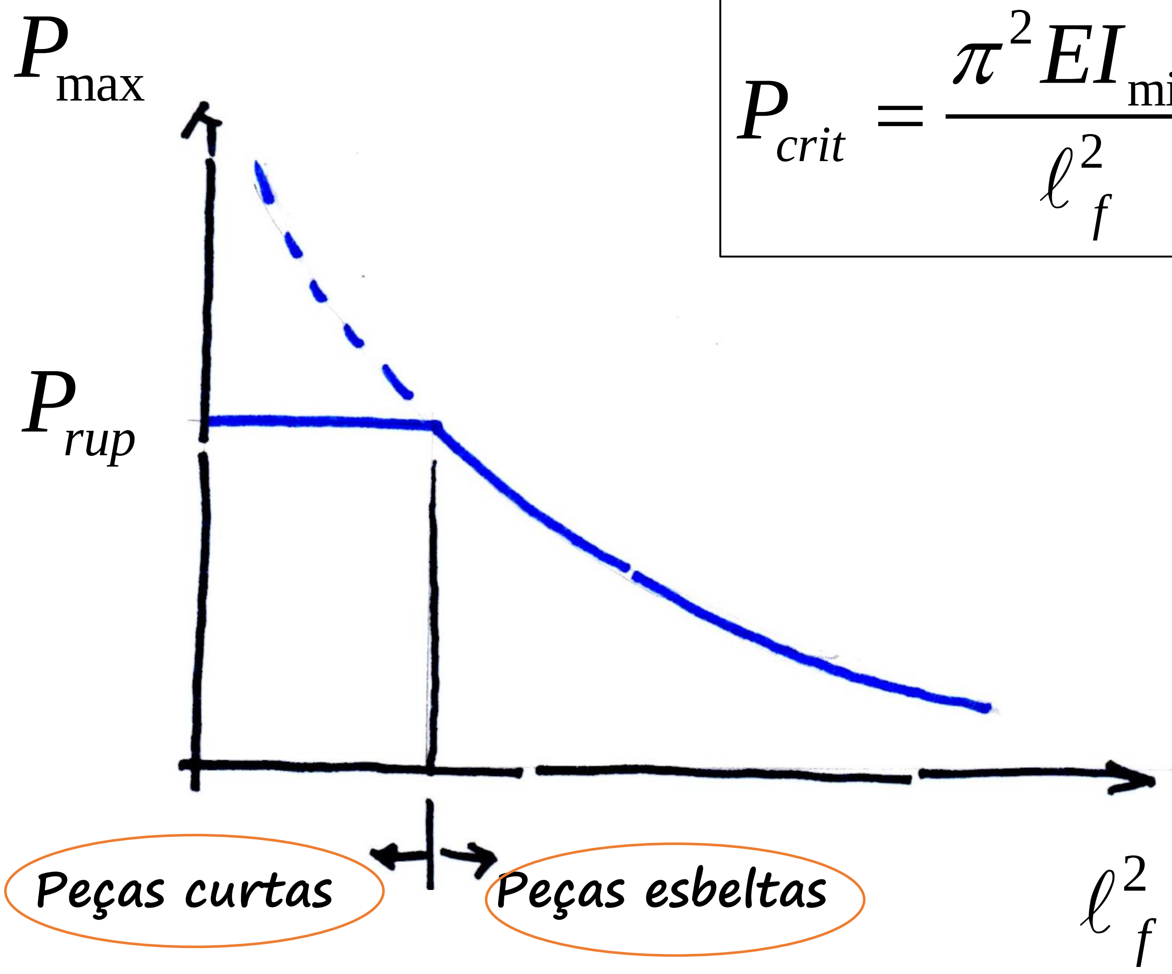




$$I_{max} = I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\ell_f^2}$$



Verificação da segurança de barras comprimidas

Duas situações devem ser verificadas:

(1) Ruptura à compressão ("esmagamento"):

$$\sigma_{\max} < \bar{\sigma} \qquad \therefore \qquad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{\lim}^{c}}{s}$$

(2) Instabilidade ("flambagem"):

$$P \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 E I_{\min}}{\ell_f^2}$$

Tensão de Flambagem (ou de Euler):

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{A \ell_f^2}$$

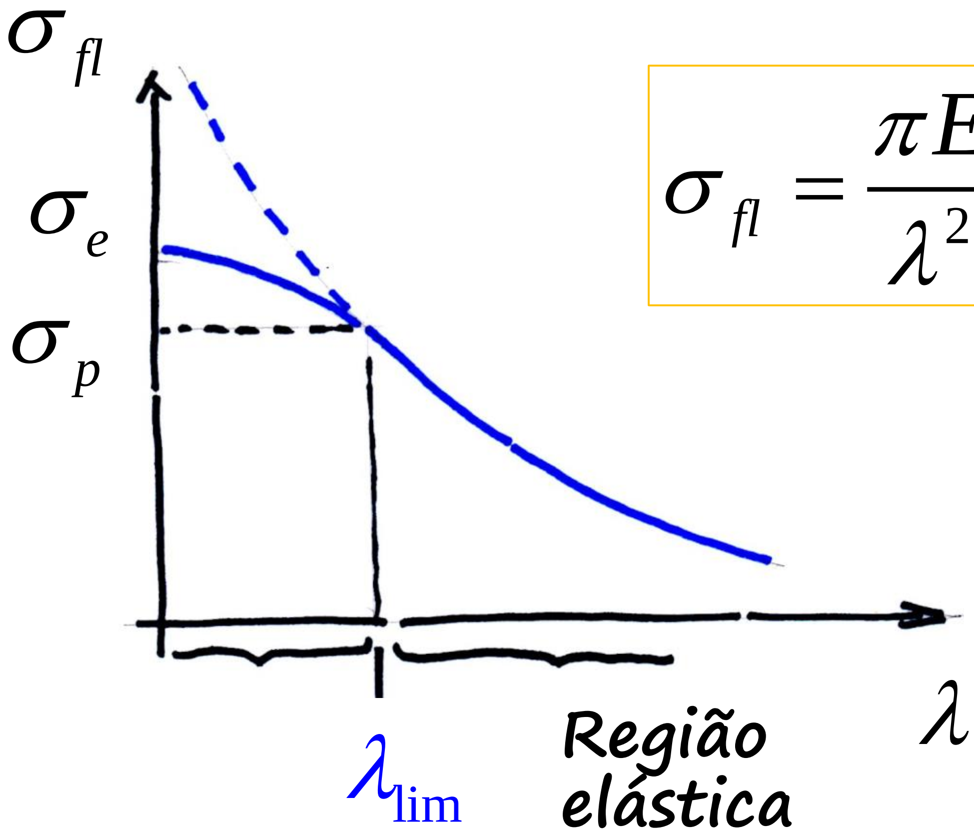
Raio de giração

$$\boxed{i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}}$$

Índice de esbeltez da barra

$$\boxed{\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}}}$$

$$\boxed{\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}}$$



$$\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}$$

$\lambda_{\lim}$ separa a região em que a flambagem se dá no regime elastico da região onde a flambagem ocorre no regime elastoplástico

$$\lambda_{\lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Por exemplo, para um aço com :

$$\sigma_e = 240MPa\,; \quad E = 210GPa$$

$$\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{210\times10^9}{240\times10^6}} = 92,93$$

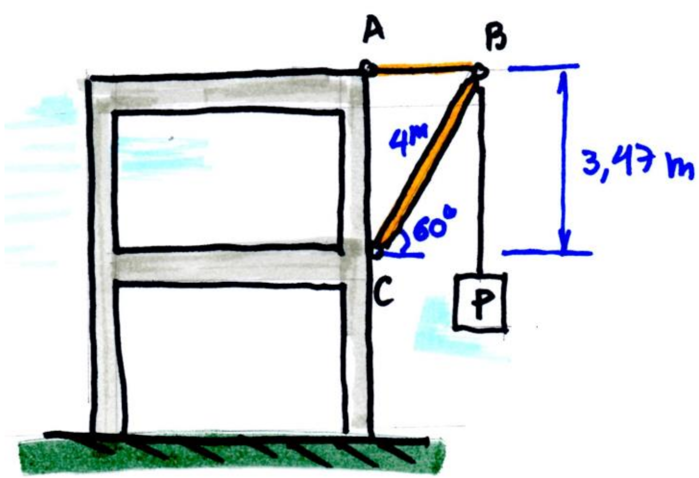
É importante garantir que a esbeltez das peças não seja excessiva, de modo que seja possível aproveitar toda a capacidade resistente dos materiais

Por esta razão, as normas de projeto estabelecem valores máximos de esbeltez.

Por exemplo, para as estruturas metálicas (NBR8800)

$$\lambda \leq 200$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



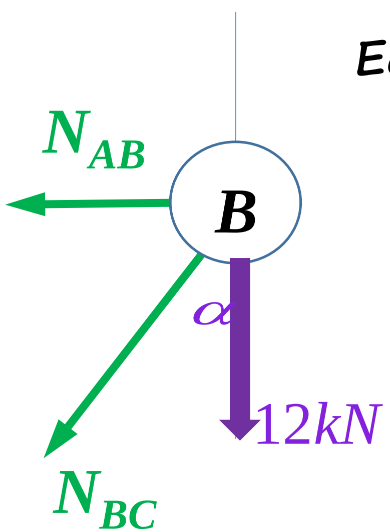
Cabo AB de Seção circular, diâmetro ϕ

Barra BC seção quadrada de lado "a"

Material: $\sigma_R^t = 40MPa\,; \quad \sigma_R^c = 40MPa$

$$E = 20GPa$$

Coeficiente de segurança: s=2



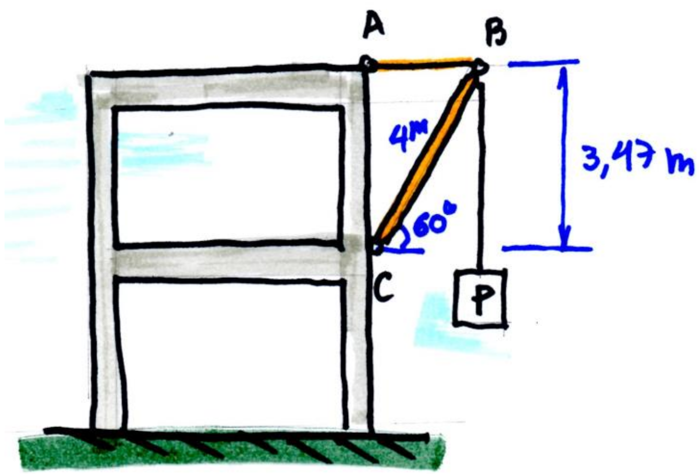
Equilíbrio do nó B: $\sum_i F_X^i = -N_{AB} - N_{BC} \sin 30^o = 0$

$$\sum_i F_Y^i = -N_{BC} \cos 30^o - 12 = 0$$

$$\boxed{N_{BC} = -\frac{12}{0,866} = -13,8kN \text{ (compressão!)}}$$

$$\boxed{N_{AB} = -(-13,8 \times 0,5) = +6,9kN \text{ (tração!)}}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



Dimensionamento:

(1) Cabo AB

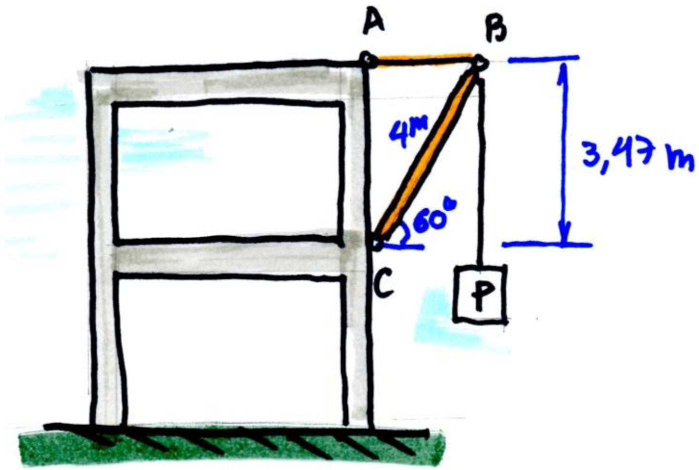
$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{cabo}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

$$\frac{N_{AB}}{\left(\dfrac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{AB}}{\pi\sigma_R^t}} = \sqrt{\frac{4\times 2\times 6,9\times 10^3}{\pi\times 40\times 10^6}} = 0,021m$$

$$\boxed{\phi \geq 2,1cm}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo P=12kN.



Dimensionamento:

(2) Barra BC $\quad A = a^2 \quad ; \quad I = \dfrac{a^4}{12}$

(2.1) Esmagamento

$$\sigma = \frac{|N_{BC}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R^c}{s}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{s|N_{BC}|}{\sigma_R^c}} = \sqrt{\frac{2 \times 13,8 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,026m$$

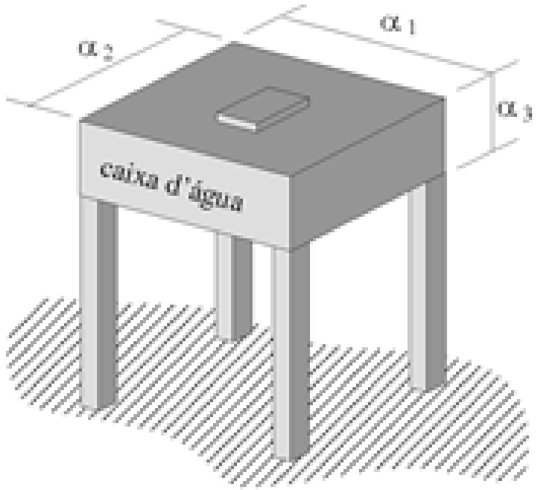
(2.2) Flambagem

$$|N_{BC}| \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} = \frac{1}{s}\frac{\pi^2 E}{\ell^2}\frac{a^4}{12}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12 s \ell^2 |N_{BC}|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \times 2 \times 4^2 \times 13,8 \times 10^3}{\pi^2 \times 20 \times 10^9}} = 0,071m \quad \boxed{a \geq 7,1cm}$$

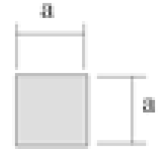
Exercicio: A estrutura da figura abaixo consiste de uma caixa d'água sustentada por quatro pilares de 12m, cujo material possui módulo de elasticidade E = 21 GPa e tensão de ruptura σ_R = 40 MPa. Para obter o valor da carga sobre os pilares, considere que o peso próprio da caixa d'água corresponde a 30% do peso do líquido ($\gamma_{líquido}$ = 10 kN/m³) contido na mesma, ou seja, $P_{projeto} = 1{,}3xP_{líquido}$.

Três tipos distintos de condições das extremidades dos pilares devem ser analisadas (esquemas I, II e III na figura). Determinar a dimensão a da seção transversal dos pilares para cada uma das três situações (a_1, a_2 e a_3), adotando um coeficiente de segurança s = 3.



Resp.	a_1	a_2	a_3
(cm)			

Seção tranversal dos pilares



material

E = 21 GPa

σ_R = 40 MPa

Coef. seg.

s = 3

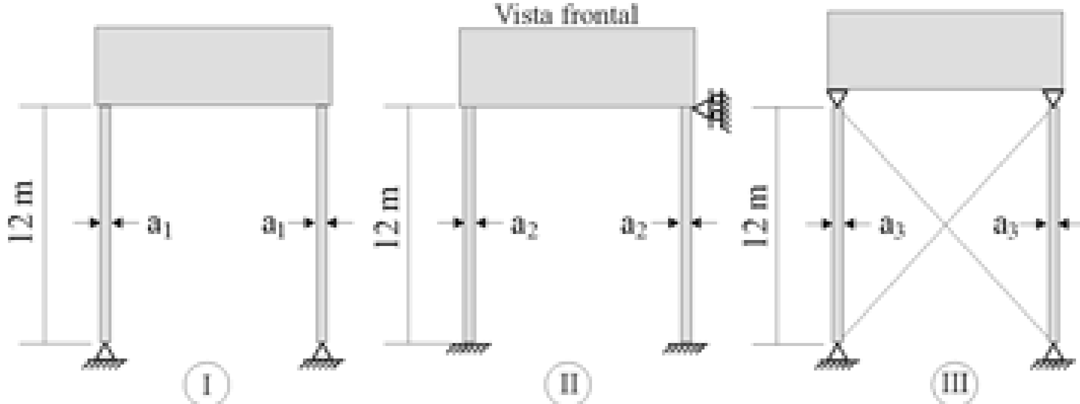
Adotar:

$$\alpha_1 = 5m$$

$$\alpha_2 = 6m$$

$$\alpha_3 = 4m$$

Vista frontal



Resolução:

(a) Levantamento das cargas atuantes:

$$P_{líquido} = V_{caixa} \times \gamma_{líquido} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \times \gamma_{líquido} = 5m \times 6m \times 4m \times 10 \frac{kN}{m^3} = 1200kN$$

A carga total de projeto é dada por:

$$P_{projeto} = 1,3 \cdot P_{líquido} = 1,3 \times 1200 = 1560kN$$

A carga em cada um dos pilares é dada por:

$$P_{pilar} = \frac{P_{projeto}}{4} = \frac{1560}{4} = 390kN$$

(b) Dimensionamento do pilar:

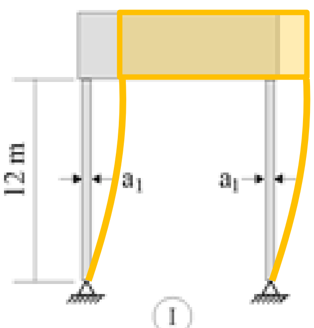
(b.1) 1º critério – força normal: $\sigma = \frac{|P_{pilar}|}{A} \leq \frac{\sigma_R}{s} \Rightarrow \frac{|P_{pilar}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R}{s}$

$$a \geq \sqrt{\frac{s \cdot P_{pilar}}{\sigma_R}} = \sqrt{\frac{3 \times 390 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,17m = 17cm$$

(b.2) 2º critério – flambagem: $$P_{pilar} \leq \frac{1}{s} P_{crit} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E\,I}{l_f^{\,2}}$$

$$I = \frac{a^4}{12} \geq \frac{s \cdot P_{pilar} \cdot l_f^{\,2}}{\pi^2 E} \quad \Longrightarrow \quad a \geq \sqrt[4]{\frac{12 \cdot s \cdot P_{pilar} \cdot l_f^{\,2}}{\pi^2 E}}$$

(b.2.1) situação 1:



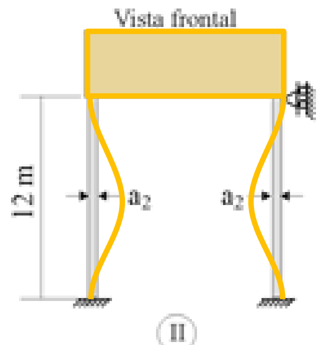
$$l_f = 2l = 2 \times 12 = 24m$$

$$a_1 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 24^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

$$a_1 \geq 0,44m$$

$$\boxed{a_1 = 44cm}$$

(b.2.2) situação 2:



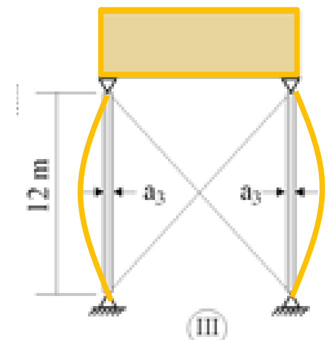
$$l_f = 0,5l = 0,5 \times 12 = 6m$$

$$a_2 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 6^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

$$a_2 \geq 0,22m$$

$$\boxed{a_3 = 22cm}$$

(b.2.3) situação 3:



$$l_f = l = 12m$$

$$a_3 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 12^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

$$a_3 \geq 0,31m$$

$$\boxed{a_3 = 31cm}$$