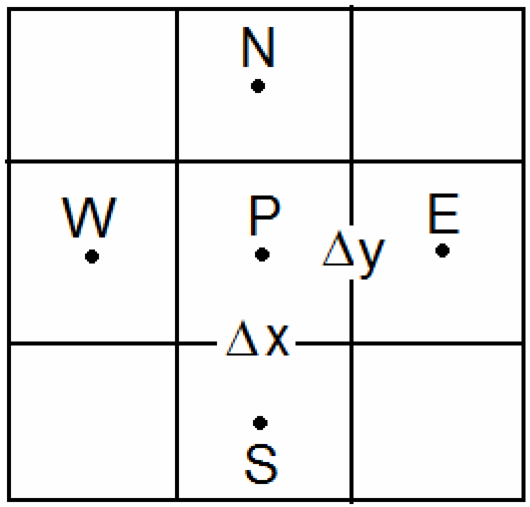
PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 3 – Difusão em Regime Permanente

3.1 Difusão em Regime Permanente

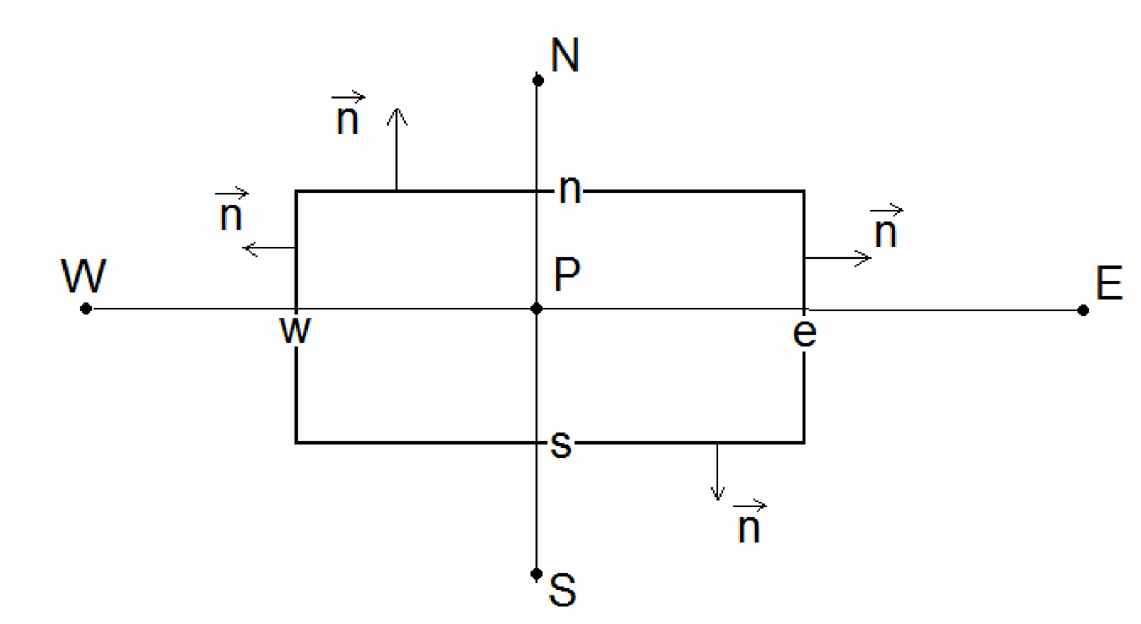
$$\int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j \, dA + \int_\forall S_\phi \, d\forall = 0$$



3.1 Difusão em Regime Permanente

$$\int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j \, dA + \underbrace{\int_{\forall} S_\phi \, d\forall}_{b} = 0$$

$$\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{\underbrace{x_E - x_P}_{\Delta x_e}} \Delta y - \Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{\underbrace{x_P - x_W}_{\Delta x_w}} \Delta y + \Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{\underbrace{y_N - y_P}_{\Delta y_n}} \Delta x - \Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{\underbrace{y_P - y_S}_{\Delta y_s}} \Delta x + b = 0$$



3.1 Difusão em Regime Permanente

$$\underbrace{\Gamma\frac{\Delta y}{\Delta x_e}}_{a_E}(\phi_E-\phi_P)+\underbrace{\Gamma\frac{\Delta y}{\Delta x_w}}_{a_W}(\phi_W-\phi_P)+\underbrace{\Gamma\frac{\Delta x}{\Delta y_n}}_{a_N}(\phi_N-\phi_P)+\underbrace{\Gamma\frac{\Delta x}{\Delta y_s}}_{a_S}(\phi_S-\phi_P)+b=0$$

$$\sum_{vizinhos} a_i\left(\phi_i-\phi_P\right)+b=0$$

$$a_P\,\phi_P=\sum_{vizinhos} a_i\,\phi_i+b \qquad onde \qquad a_P=\sum_{vizinhos} a_i$$

3.2 Critério de Scarborough

A condição suficiente para a convergência de um método iterativo de Gauss-Seidel é que:

$$\frac{\sum |a_i|}{|a_p|} \begin{cases} \leq 1 \quad para \quad todas\, as\, células \\ < 1 em\ pelo\, menos\, uma\, célula \end{cases}$$

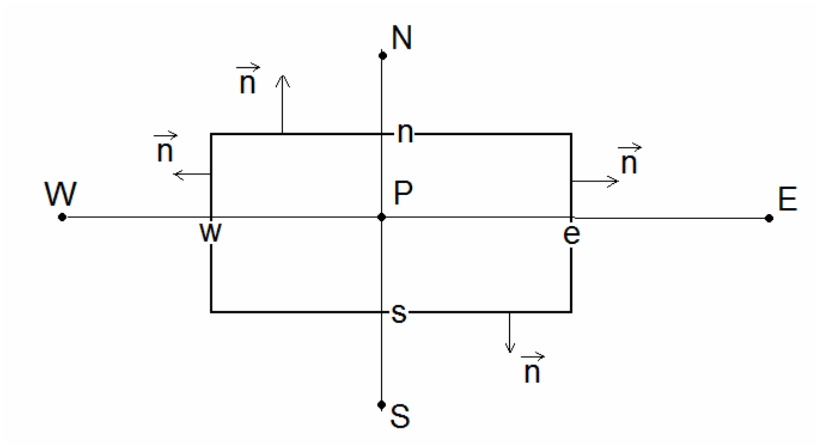
Num problema de difusão permanente, o critério é satisfeito, pois:

$$\frac{\sum |a_i|}{|a_p|} = 1 em\, todas\, as\, células$$

3.3 Métodos de Solução do Sistema Linear

- Jacobi, SOR (muito ineficientes)
- Gauss-Seidel (ineficiente)
- Gradiente Conjugado e similares
- Multigrid (ideal para problemas muito grandes)

3.4 detalhes da Implementação Numérica



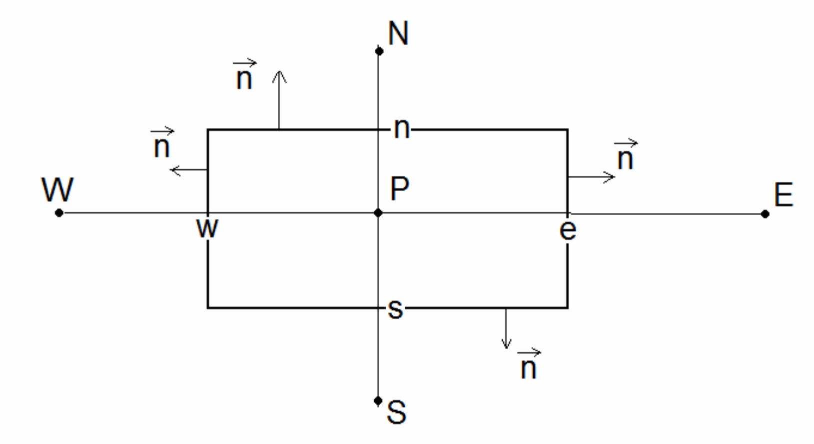
$$\phi_P = \phi_e + \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2}\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2}\right)^3 + o\left(\Delta x_e^4\right)$$

$$\phi_E = \phi_e + \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e \left(+\frac{\Delta x_e}{2}\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_e \left(+\frac{\Delta x_e}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right|_e \left(+\frac{\Delta x_e}{2}\right)^3 + o\left(\Delta x_e^4\right)$$

Resulta:

$$\phi_E - \phi_P = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e \Delta x_e + o\left(\Delta x_e^3\right)$$

3.4 Detalhes da Implementação Numérica



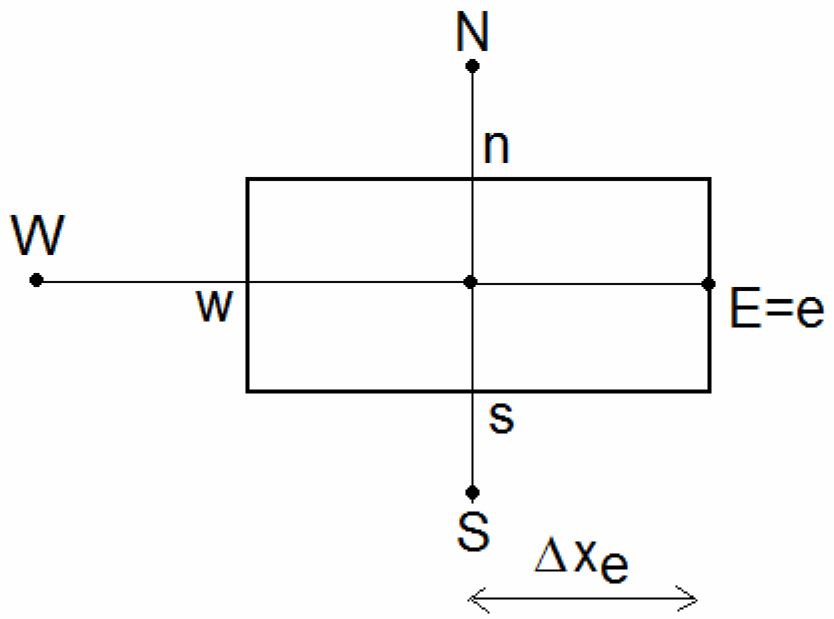
Aproximação espacial chamada de Método de Diferenças Centradas: erro de 2ª ordem

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} + o\left(\Delta x_e^2\right)$$

3.5 Condições de Contorno

- Condição de Dirichlet - ϕ especificado
- Condição de Neumann - Derivada primeira especificada

3.6 Condições de Dirichlet – exemplo



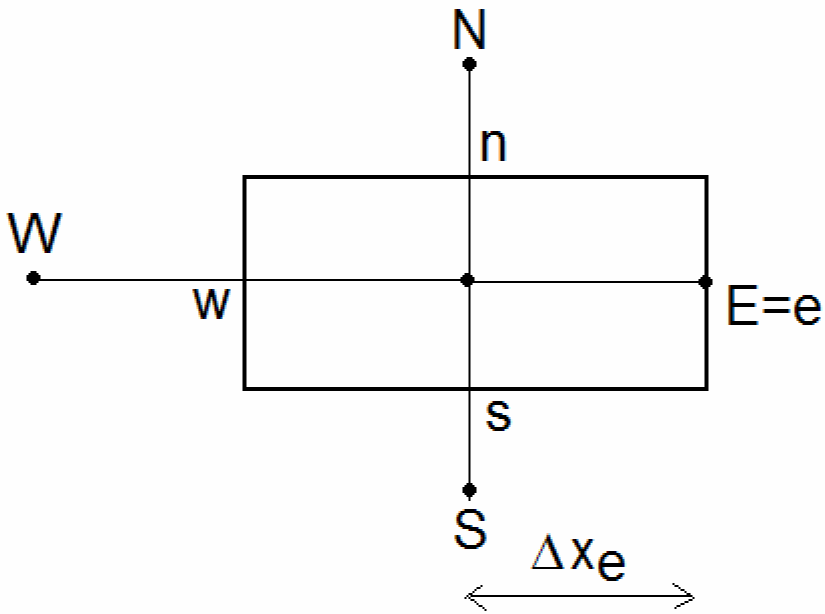
$$\phi_E = \phi_e = \phi_{dado}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e = \frac{\phi_{dado} - \phi_P}{\Delta x_e}$$

$$\underbrace{\Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x_e}}_{a_E}(\phi_{dado} - \phi_P) + \underbrace{\Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x_w}}_{a_W}(\phi_W - \phi_P) + \underbrace{\Gamma \frac{\Delta x}{\Delta y_n}}_{a_N}(\phi_N - \phi_P) + \underbrace{\Gamma \frac{\Delta x}{\Delta y_s}}_{a_S}(\phi_S - \phi_P) + S_\phi \forall = 0$$

$$\left(\underbrace{a_E + a_S + a_N + a_S}_{a_P}\right)\phi_P = \underbrace{a_W\,\phi_W + a_N\,\phi_N + a_S\,\phi_S}_{\sum a_i \phi_i} + \left(\underbrace{S_\phi \forall + a_E\,\phi_{dado}}_{b}\right)$$

3.6 Condições de Neumann – exemplo



$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e = K$$

$$\underbrace{\Gamma\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e}_{K} \Delta y + \Gamma \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x_w}}_{a_W}(\phi_W - \phi_P) + \Gamma \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta y_n}}_{a_N}(\phi_N - \phi_P) + \Gamma \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta y_s}}_{a_S}(\phi_S - \phi_P) + S_\phi \forall = 0$$

$$\left(\underbrace{a_S + a_N + a_S}_{a_P}\right)\phi_P = \underbrace{a_W\,\phi_W + a_N\,\phi_N + a_S\,\phi_S}_{\sum a_i\,\phi_i} + \left(\underbrace{S_\phi \forall + \Gamma K \,\Delta y}_{b}\right)$$

3.7 Linearização do Termo Fonte

Em alguns casos, o termo fonte pode ser escrito como:

$$S_{\phi} = S_c + S_p \, \phi$$

Isso pode ser vantajoso, mas apenas se $S_p<0$. Por que?

3.7 Linearização do Termo Fonte

Linearizando o termo fonte:

$$a_E(\phi_E-\phi_P)+a_W(\phi_W-\phi_P)+a_N(\phi_N-\phi_P)+a_S(\phi_S-\phi_P)+\underbrace{S_c\forall}_{b}+S_p\forall\phi_P=0$$

Resulta:

$$a_P\,\phi_P=\sum_{vizinhos}a_i\,\phi_i+b \qquad onde \qquad a_P=\sum_{vizinhos}a_i-S_p\forall$$

Se $S_p<0$, o critério de Scarborough é favorecido:

$$\frac{\sum|a_i|}{|a_p|}\begin{cases}\le 1 & para\ \ todas\ as\ células\\ <1 & em\ pelo\ menos\ uma\ célula\end{cases}$$

3.8 Características Desejáveis na Discretização

1) Consistência (*consistency*): as equações discretizadas tem que ser equivalentes às equações do contínuo quando o espaçamento da malha tende a zero.

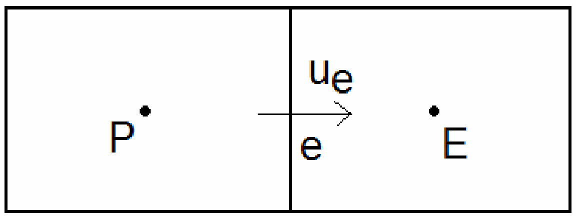
$$ex: \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \text{ é equivalente à } \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ quando } \Delta x \to 0$$

3.8 Características Desejáveis na Discretização

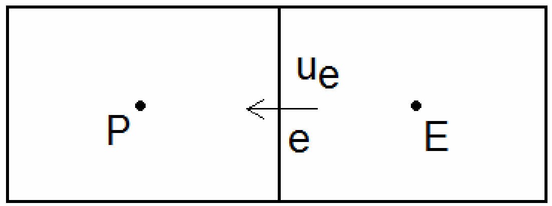
2) Conservação (*conservativeness*):fluxos (difusivos ou convectivos) são calculados sempre sobre as faces. Se uma face pertence a duas células adjacentes, isso garante que o fluxo que sai de uma célula através dessa face é exatamente igual ao fluxo que entra na célula vizinha.

3.8 Características Desejáveis na Discretização

3) Transporte (*transportiveness*): na discretização do fluxo convectivo (às vezes chamado de advectivo) sobre uma face, um maior peso é dado para o valor da variável discretizada na célula que está à montante (*upstream*) da face.



ϕ_e tem que ter um valor mais próximo de ϕ_P do que de ϕ_E



ϕ_e tem que ter um valor mais próximo de ϕ_E do que de ϕ_P

3.8 Características Desejáveis na Discretização

4) Soluções Limitadas (*boundedness*):
Num problema advectivo-difusivo, quando não há fontes, o valor da solução em uma célula deve estar entre o máximo e o mínimo dos valores na vizinhança.

3.8 Características Desejáveis na Discretização

5) Estabilidade (*stability*): pequenos erros numéricos, como por exemplo erros de arredondamento, não são amplificados durante a solução iterativa. Deve ser possível obter uma solução.

3.8 Características Desejáveis na Discretização

6)Ordem da precisão (*order accuracy*): representa quão rapidamente o erro de truncamento da discretização diminui quando o espaçamento da malha é reduzido. Se o erro de truncamento é de ordem Δ^n, o esquema de discretização é dito de ordem "n".

Ex: O esquema de diferenças centradas usado na discretização dos fluxos difusivos é um esquema de 2ª ordem.

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} + o\left(\Delta x_e^2\right)$$

Bibliografia

Versteeg, H,K; Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method”, 2nd Edition, Pearson Education Limited, 2007.

Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC editora, 1995.

Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.