SISTEMAS NA FORMA SS EM TEMPO DISCRETO

1. Motivação

- Controlador por realimentação dos estados projetado em tempo contínuo nem sempre pode ser discretizado para ser implementado em computador digital.
- Necessário fazer projeto do controlador diretamente em tempo discreto.
- Discretização de um sistema na forma do espaço dos estados é relativamente simples.
- Todos os conceitos vistos para sistemas em tempo contínuo tem o seu equivalente em tempo discreto.

2. Discretização temporal

- Dado um sistema LIT de ordem n representado na forma SS,

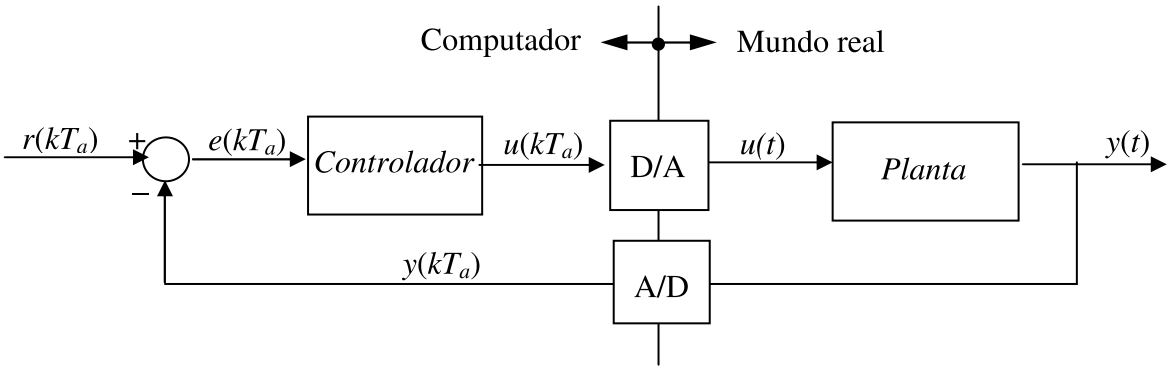
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathbf{x}(k) \in R^n$, $\mathbf{u}(k) \in R^m$ e $\mathbf{y}(k) \in R^p$.

- Resposta temporal desse sistema é dada por:

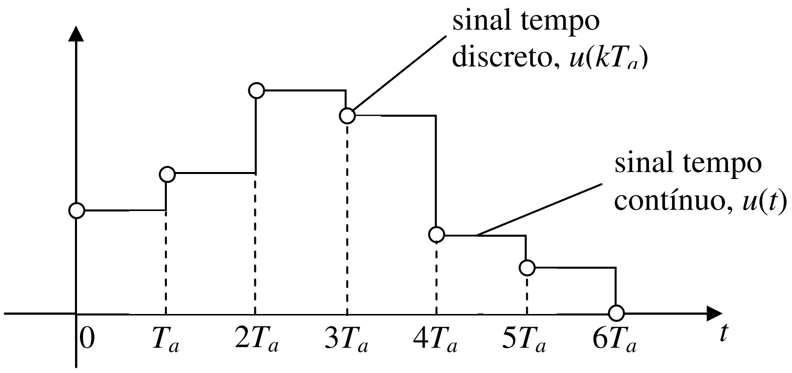
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2}$$

- **Malha de controle implementada por computador:**



- **Conversor D/A** entre o computador e o sistema ⇒ Durante um período de amostragem (T_a) as entradas do sistema permanecem constante como mostra a figura e a equação abaixo.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT_a), \text{ para } kT_a \le t < (k+1)T_a \tag{3}$$



➢ Integrando eq. (2) em um período de amostragem ($kT_a \le t < (k+1)T_a$) e usando a restrição imposta pela eq. (3):

$$\mathbf{x}[(k+1)T_a] = e^{\mathbf{A}[(k+1)T_a - kT_a]}\mathbf{x}(kT_a) + \left(\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,d\tau \right)\mathbf{u}(kT_a) \tag{4}$$

➢ Simplificando notação (omitindo período de amostragem na escala de tempo) e realizando mudança de variável de t para $t' = t - kT_a$ para simplificar o segundo termo do lado direito.

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T_a}\mathbf{x}(k) + \left(\int_0^{T_a} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma \right)\mathbf{u}(k)} \tag{5}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k)} \tag{6}$$

onde

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= e^{\mathbf{A}T_a} \\ \mathbf{\Gamma} &= \int_0^{T_a} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma \end{aligned}} \tag{7}$$

➢ Na medida em que a equação da saída é uma equação algébrica a sua versão em tempo discreto é simplesmente dada por:

$$\boxed{\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)} \tag{8}$$

<u>Exemplo</u>: Obter o equivalente em tempo discreto do sistema duplo integrador.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Usando o método da Transformada de Laplace para calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Calculando a Transformada Inversa de Laplace,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo t por T_a:

$$\mathbf{\Phi} = \left[e^{\mathbf{A}t} \right]_{t=T_a} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz das entradas:

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^{T_a} e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma = \int_0^{T_a} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^{T_a} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} \\ \sigma \end{bmatrix}_0^{T_a}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix}$$

- Sistema em tempo discreto na forma SS:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \dfrac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

- Pólos do sistema:

$$\begin{cases} \text{Tempo contínuo} \Rightarrow \ p_{1,2} = 0 \ \text{(duplo integrador tem dois pólos na origem)} \\ \text{Tempo discreto} \Rightarrow \ p_{1,2} = 1 \ \text{(duplo integrador em tempo discreto tem dois pólos em} \\ z = 1) \end{cases}$$

3. Pólos de sistemas em tempo discreto na forma SS

- Os pólos de um sistema em tempo discreto, da mesma forma que para em tempo contínuo, são os autovalores da matriz dos estados em tempo discreto.

- O problema de autovalor e autovetor aplicado à matriz $\mathbf{\Phi}$ de dimensão *nxn* fornece:

$$\boxed{[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}]\mathbf{v}_i = 0 \text{, para } i = 1, \ldots, n} \qquad (24)$$

  onde λ_i são os autovalores da matriz $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{v}_i$ são os seus autovetores.

- Os autovalores são obtidos calculando-se as raízes da equação caracterítica do sistema, ou seja:

$$\boxed{\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}] = 0} \qquad (25)$$

- Após o cálculo dos autovaloes $\Rightarrow$ para cada autovalor obtém-se o seu autovetor correspondente por meio da equação (9).

- Pólos de um sistema em tempo contínuo e em tempo discreto estão relacionados por meio da equação que define o mapeamento entre os planos s e z.

$$\boxed{z = e^{sT_a} \text{, ou } z = \frac{1}{T_a}\ln(z)} \qquad (26)$$

  Pela eq. (26), tendo os pólos do sistema em tempo contínuo pode-se calcular os pólos do sistema em tempo discreto, ou vice versa.

- **Usando a eq. (26) para comparar o comportamento temporal de um sistema em tempo contínuo e o seu equivalente em tempo discreto chega-se às seguintes conclusões:**

- A estabilidade de um sistema no domínio de tempo contínuo *s* está associada a posição dos seus pólos no lado esquerdo do plano complexo *s*, enquanto que a estabilidade de um sistema no domínio de tempo discreto está associada à localização dos seus pólos no plano *z* dentro do círculo unitário.

- Existem sistemas em tempo discreto que não tem equivalente em tempo contínuo ⇒ sistemas em tempo discreto com pólos no eixo real negativo não possuem correspondente em tempo contínuo ⇒ isto é fácil de ser observado por meio da eq. (26), que para um número real menor do que zero a função ln não é definida.

- Um sistema em tempo discreto com pólo na origem (z = 0) equivale, segundo a eq. (26), a um sistema em tempo contínuo com pólo em –∞, ou seja, um sistema que responde instantaneamente à mudanças na entrada ou à uma condição inicial diferente de zero, o que na realidade não existe.

4. Transformação SS para TF em tempo discreto

- A função de transferência de um sistema em tempo discreto pode ser obtida da sua representação no espaço dos estados da mesma forma que foi feita para tempo contínuo ⇒ porém utlizando a Transformada Z no lugar da Transformada de Laplace.

- Aplicando Transformada Z na equação da dinâmica dos estados (eq. 6)

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k+1)\} = \mathcal{Z}\{\mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma u}(k)\} \tag{12}$$

Assumindo condições iniciais iguais a zero,

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{\Phi X}(z) + \mathbf{\Gamma U}(z) \tag{13}$$

Rearranjando e isolando $\mathbf{X}(z)$,

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma U}(z) \tag{14}$$

- Aplicando Transformada Z na equação das saídas do sistema (eq. 8) e substituindo X(z) da eq. (14).

$$\mathbf{Y}(z) = \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(z) \tag{15}$$

A matriz de FT, com dimensão *p*x*m*, é dada por:

$$\boxed{\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D}} \tag{16}$$

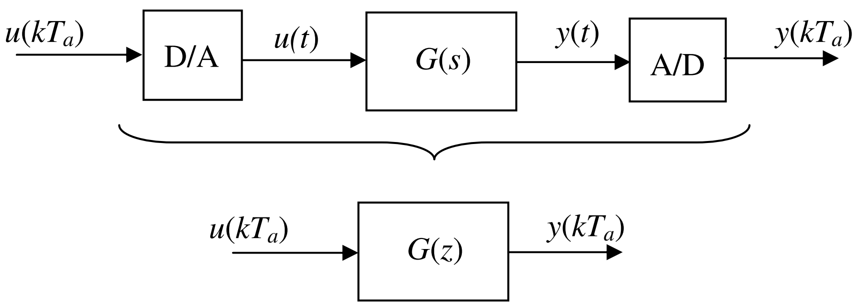
- Cada FT da matriz de funções de transferências pode também ser calculada usando somente determinante de matrizes como no caso em tempo contínuo:

$$\boxed{G_{ij}(z) = \frac{\det\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} & -\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{j}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{i}} & \mathbf{D}_{\mathbf{ij}} \end{bmatrix}}{\det\left[z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}\right]}} \tag{17}$$

onde $\mathbf{C_i}$ é a *i*-ésima linha da matriz $\mathbf{C}$ e $\mathbf{\Gamma_j}$ é a *j*-ésima coluna da matriz $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{D_{ij}}$ é o elemento *i,j* da matriz $\mathbf{D}$.

- **Cada FT da matriz de funções de transferências em tempo discreto pode também ser obtida diretamente da FT em tempo contínuo.**

- A FT em tempo discreto relaciona a entrada do sistema em tempo discreto com a saída do sistema em tempo contínuo, como mostra a figura abaixo:



- De acordo com a figura acima, a função de transferência do processo em tempo discreto pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[G_{DA}(s)G(s)\right]\right\} \tag{18}$$

Dinâmica do conversor D/A pode ser desprezada e a dinâmica do conversor D/A é dada por:

$$G_{DA}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s} \tag{19}$$

Substituindo a eq. (19) na eq. (18) tem-se:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(1 - e^{-sT_a})}{s}G(s)\right]\right\} \tag{20}$$

Como e^{-sT_a} representa um atraso (z^{-1}) a eq. (20) pode ser reescrita como:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\} \tag{21}$$

ou

$$\boxed{G(z) = \frac{(z-1)}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\}} \tag{22}$$

- Observe que a função de transferência de um sistema em tempo discreto, $G(z)$, não é igual à Transformada Z da resposta a impulso da função de transferência em tempo contínuo, $G(s)$, ou seja,

$$G(z) \neq \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}[G(s)]\right\}. \tag{23}$$

<u>Exemplo</u>: Obter a FT do sistema duplo integrador em tempo discreto e comparar com a FT do sistema em tempo contínuo.

- **Tempo contínuo:**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

- **Tempo discreto:**

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix}u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

FT em tempo discreto é dada por:

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}+\mathbf{D}$$

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1} = \begin{bmatrix} z-1 & -T_a \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\begin{bmatrix} z-1 & T_a \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{z-1}{(z-1)^2} & \dfrac{T_a}{(z-1)^2} \\ 0 & \dfrac{z-1}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z-1}{(z-1)^2} & \dfrac{T_a}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{\dfrac{T_a^2(z-1)}{2} + T_a^2}{(z-1)^2} = \frac{T_a^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

- **Comparando as duas FT:**
  - Polós da FT em tempo discreto ($z = 1$) e em tempo contínuo são mapeados pela eq. (26) que representa o mapeamento entre os planos s e z.
  - FT em tempo discreto tem um zero em $z = -1 \Rightarrow$ esse zero finito não existe no sistema em tempo contínuo.
- **Na discretização temporal de uma FT surgem $n - m - 1$ zeros finitos a mais, que não existiam na FT em tempo contínuo (n = ordem do sistem e m = número de zeros finitos da FT em tempo contínuo).**

5. Resposta temporal em tempo discreto

- Equação dos estados em tempo dicreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k)$$

- Equação de recorrência $\Rightarrow$ todos os termos do lado direito estão no temp kT_a e se forem conhecidos pode-se calcular os estados no novo instante de tempo $(k+1)T_a$.
- A solução temporal de um sistema em tempo discreto é obtida recorrendo-se a equação dos estados iniciando do tempo $t = 0$ até um tempo genérico $t = kT_a$.
- Assumindo a condição inicial para o vetor de estados, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$, e conhecendo-se o vetor de entradas, $\mathbf{u}(kT_a)$, para todo kT_a, pode-se calcular $\mathbf{x}(kT_a)$ para todo instante de tempo, como segue:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(T_a) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x_0} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(0) \\
&\mathbf{x}(2T_a) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(T_a) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(T_a) = \mathbf{\Phi}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(T_a) \\
&\mathbf{x}(3T_a) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(2T_a) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(2T_a) = \mathbf{\Phi}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}^2\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(0) + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(T_a) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(2T_a) \\
&\vdots \\
&\boxed{\mathbf{x}(kT_a) = \mathbf{\Phi}^k\mathbf{x_0} + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-j-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(jT_a)}
\end{aligned} \tag{27}$$

onde o primeiro termo do lado direito é a solução homogênea e o segundo termo do lado direito é a solução forçada.

- Para obter a saída do sistema basta substituir a eq. (27) na equação das saídas (eq. 8)

$$\mathbf{y}(kT_a) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^k\mathbf{x_0} + \mathbf{C}\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}^{k-j-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}(jT_a) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT_a) \tag{28}$$

- Observe que o comportamento temporal do sistema em tempo discreto é função de $\boldsymbol{\Phi}^k$, ou seja, depende dos autovalores da matriz $\boldsymbol{\Phi}$, ou dos pólos do sistema.

6. Controlabilidade e observabilidade em tempo discreto

- Os testes de controlabilidade e observabilidade em tempo discreto são praticamente iguais aos em tempo contínuo.

- Para o caso do sistema em tempo discreto a matriz de controlabilidade é similar ao caso de sistemas em tempo contínuo.

$$\boxed{\mathbf{M_C} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Phi\Gamma} & \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\Gamma} & \cdots & \boldsymbol{\Phi}^{n-1}\boldsymbol{\Gamma}\end{bmatrix}} \tag{29}$$

- A mesma condição utilizada para verificar a controlabilidade de um sistema em tempo contínuo vale para um sistema em tempo discreto de ordem n:

Posto($\mathbf{M_C}$) = $n \Rightarrow$ então sistema definido pelas matrizes ($\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Gamma}$) é controlável.

- Da mesma forma que para a controlabilidade, a matriz de observabilidade para sistemas em tempo discreto é similar ao caso de sistemas em tempo contínuo.

$$\boxed{\mathbf{M_O} = \begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}} \tag{30}$$

- A mesma condição utilizada para verificar a observabilidade de um sistema em tempo contínuo vale para um sistema em tempo discreto de ordem n:

Posto($\mathbf{M_O}$) = $n \Rightarrow$ então sistema definido pelas matrizes ($\boldsymbol{\Phi}$, $\mathbf{C}$) é observável.

7. Representação de atraso na forma SS em tempo discreto

- A representação de um atraso em tempo discreto é relativamente fácil em comparação com tempo contínuo.

- **Representação de um atraso de um intervalo de tempo t_0 em tempo contínuo:**

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)e^{-st_0}$$

- **Adotando um período de amostragem de forma que o atraso seja um múltiplo inteiro do período de amostragem**

$$t_0 = mT_a \tag{31}$$

Atraso de mT_a em tempo discreto é representado por:

$$f(kT_a - mT_a) \xrightarrow{\mathscr{Z}} F(z)z^{-m}$$

- **A equação de estados de um sistema com um atraso de mT_a na entrada é dada por:**

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma u}(k-m) \tag{32}$$

- Como a representação de um sistema considera a entrada no mesmo instante que os estados presentes no lado direito da equação (tempo kT_a) então a eq. (32) deve ser modificada.

Para modificar a eq. (32) o atraso de mT_a na entrada é representado por variáveis de memórias para guardar a variável $\mathbf{u}(kT_a)$ anteriores , ou seja, nos instantes de amostragem $(k-1)T_a$ até $(k-m)T_a$

- **Memórias são representadas por estados $\Rightarrow$ no caso de um sistema SISO a inclusão de m memórias significa incluir m novos estados na dinâmica do sistema.**

Novo vetor de estados, $\mathbf{x_m}(k)$, com a inclusão de m memórias para salvar os valores atrasados da entrada num sistema SISO:

$$\mathbf{x_m}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-m) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} \tag{33}$$

Dinâmica dos estados do sistema com o novo vetor de estados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k-m+1) \\ \mathbf{u}(k-m+2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_m}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{nxn} & \mathbf{\Gamma}_{nx1} & \mathbf{0}_{nx1} & \cdots & \mathbf{0}_{nx1} \\ \mathbf{0}_{1xn} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0}_{1xn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{1xn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi_m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-m) \\ \mathbf{u}(k-m+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_m}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nx1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma_m}} \mathbf{u}(k) \qquad (34)$$

- A inclusão de m novos estados para representar memórias representa m novos pólos no sistema localizados em $z = 0$.

- Um atraso que não seja múltiplo inteiro do período de amostragem pode ser também representado, mas a integral de convolução da eq. (4) tem que ser repartida em parcelas de forma a considerar a(s) mudança(s) na entrada durante o período de amostragem.

<u>Exemplo</u>: Obter o equivalente em tempo discreto do sistema abaixo, calcular os seus pólos, obter a sua FT e comprarar com os equivalentes em tempo contínuo.

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = -2\omega(t) + 2u(t-0{,}2) \\ y(t) = \omega(t) \end{cases}$$

- Como o sistema é de 1ª ordem a equação do estado do sistema em tempo discreto é obtida simplesmente fazendo-se:

$$\omega(k+1) = e^{-2T_a}\omega(k) + \left(\int_0^{T_a} e^{-2\sigma} 2 d\sigma \right) u(k-0{,}2)$$

Adotando $T_a = 0{,}1$ segundos $\Rightarrow$ atraso representa $2T_a$, tem-se:

$$\omega(k+1) = e^{-2x0{,}1}\omega(k) + \left[-\frac{2}{2} e^{-2\sigma} \right]_0^{0{,}1} u(k-2)$$

$$\omega(k+1) = 0{,}8187\omega(k) + 0{,}1813u(k-2)$$

- Definido o novo vetor de estados com duas memórias para guardar as entradas atrasadas em (k–1)Ta e (k–2)Ta,

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \omega(k) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

- Sistema em tempo discreto com o atraso na entrada incoprorado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \omega(k+1) \\ u(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8187 & 0{,}1813 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(k) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(k) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Pólos do sistema:

$$\begin{cases} \text{Tempo contínuo} \Rightarrow \; p = -2 \\ \text{Tempo discreto} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}8187 \\ p_{2,3} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Função de transferência em tempo contínuo $\Rightarrow$ obtida aplicando-se Transfromada de Laplace com condições iniciais iguais a zero nas equações de estado e de saída:

$$\begin{cases} s\Omega(s) = -2\Omega(s) + 2U(s)e^{-0,2s} \\ Y(s) = \Omega(s) \end{cases}$$

Isolando $\Omega(s)$ da primeira equação e substituindo na segunda:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{2e^{-0,2s}}{s+2}$$

- Função de transferência em tempo discreto $\Rightarrow$ como o sistema é SISO o mais fácil é usar a eq. (17)

$$G(z) = \frac{\det \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi} & -\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}{\det[z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}]} = \frac{\det \begin{bmatrix} z-a & -b & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} z-a & -b & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}}$$

onde a = 0,8187 e b = 0,1813. Calculando os determinantes usando a regra dos cofatores no elemento (4,1) da a matriz do numerador, tem-se:

$$G(z) = \frac{(1)(-1)^5 \det \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \end{bmatrix}}{z^2(z-a)} = \frac{b}{z^2(z-a)} = \frac{0{,}1813}{z^2(z-0{,}8187)}$$

8. <u>Exercícios</u>

1) Dado um motor elétrico cuja dinâmica é representada pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \theta(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -2\omega(t) + 2u(t-0.2) \\ y(t) = \theta(t) \end{cases}$$

onde θ é a posição angular e u é a tensão elétrica aplicada no motor. Note que existe um atraso de 0,2 segundos entre a tensão elétrica aplicada e a tensão elétrica efetiva aplicada no motor. Pede-sel:

a) Obtenha o equivalente em tempo discreto do motor. Qual o período de amostragem mais conveniente para utilizar?
b) Calcule os pólos e zeros dos sistemas em tempo discreto e tempo contínuo.
c) Obtenha a função de transferência em tempo discreto.

2) Dado um forno elétrico cuja dinâmica é representada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) + 2u(t - 0{,}15)$$

onde θ é a temperatura do forno e u é a tensão elétrica aplicada no aquecedor do forno. Note que existe um atraso de 0,15 segundos entre a tensão elétrica aplicada e a potência efetiva do aquecedor. Pede-sel:

a) Obtenha o equivalente em tempo discreto da planta utilizando um período de amostragem igual a 0,1 segundos.
b) Calcule os pólos e zeros dos sistemas em tempo discreto e tempo contínuo.
c) Obtenha a função de transferência em tempo discreto.

3) Dado o avião F8 das aulas passadas, cuja dinâmica modifica é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0{,}0057 \\ -12 & 12 & -0{,}8 & -0{,}0344 \\ -0{,}8524 & 0{,}2904 & 0 & -0{,}0140 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}16 & 0{,}6 \\ -19 & -2{,}5 \\ -0{,}0115 & -0{,}0087 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Pede-se:

a) Discretize o sistema usando um período de amostragem de 0,5 segundo.
b) Calcule os pólos, autovetores e zeros do sistema em tempo discreto.

c) Compare os pólos, autovetores e zeros dos sistemas em tempo contínuo e tempo discreto.

d) Faça os controles iguais a zero e simule o transitório usando o sistema em tempo discreto para a condição inicial onde $\alpha(0) = 1^o$ e todos os outros estados iguais a zero.

e) Análise em regime permanente. Na medida em que existem duas variáveis de controle é possível controlar duas variáveis independentes. Calcule os ângulos do elevador e do flaperon de forma que em regime permanente $\theta = -1^o$ e $\gamma = 0^o$. Observe que nessa condição o avião está voando reto e com o nariz para baixo.

f) Aplique na forma de degrau os controles calculados no item (e) e simule o transitório como o sistema em tempo discreto.

- Principais comandos do Matlab a serem utilizados:
  - c2d;
  - eig;
  - initial;
  - dstep;
  - dlsim.