Notas de Mecânica Clássica

Airton Deppman

08/2018 - Distribuição limitada aos estudantes da disciplina
Versão não revisada e não corrigida.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

"Os antigos consideravam a mecânica sob dois aspectos: como racional – a qual procede rigorosamente por demonstrações – e prática. À mecânica prática pertencem todas as artes manuais, das quais a mecânica tomou seu nome. Mas como os artesãos não trabalham com rigor perfeito, diferenciam a mecânica da geometria, o que é perfeitamente preciso é chamado de geométrico, o que é menos rigoroso é chamado mecânico. No entanto, os erros não estão na arte, mas nos artesãos. Aquele que trabalha com menos rigor é um mecânico imperfeito; e se alguém pudesse trabalhar com rigor perfeito, seria o mais perfeito dos mecânicos, pois os desenhos da linhas retas e círculos, sobre os quais a geometria está fundada, pertence à mecânica." Trecho do prefácio de Newton à primeira edição do "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" em 8 de maio de 1686

Newton dispensa apresentações. Seu legado solidificou o que chamamos de Revolução Científica que começou na verdade com Galileo. No final do século XVII, Newton publicou sua obra prima "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural". A publicação foi um marco na história da revolução científica. Filosofia Natural era o estudo da natureza, diferente da Filosofia de hoje. Seu trabalho além de ter sido a estrutura da Física e da Matemática durante dois séculos foi também a base do que conhecemos hoje como Mecânica. Galileo introduziu a discussão de como um objeto se comporta sob a força da gravidade terrestre e depois Newton previu o que acontece com o movimento dos corpos, nas suas três leis da Mecânica.

Capítulo 2

Mecânica Newtoniana

Mecânica é o estudo do movimento de objetos no espaço e das causas desse movimento. A parte da Mecânica que estuda o movimento *per se* é a Cinemática; a parte que estuda as causas do movimento se chama Dinâmica. As grandezas fundamentais da Cinemática são: posição, velocidade e aceleração. As grandezas fundamentais da Dinâmica são: energia, trabalho e força.

Os fundamentos da Mecânica encontram-se nas três Leis de Newton:

1. *Lei da inércia:* Todo corpo tende a manter seu estado de movimento quando a força resultante sobre ele é nula.

2. *Lei da força:* A aceleração de um corpom $\mathbf{a}$, depende da força resultante sobre o corpo, $\mathbf{F}$, através da relação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde m é a massa, isto é, uma medida da inércia do corpo.

3. *Lei da ação e reação:* A toda ação sobre um corpo corresponde uma reação sobre o mesmo corpo que exerceu a ação, igual em módulo e direção mas em sentido oposto à ação.

A Segunda Lei de Newton apresenta a conexão entre a Cinemática e a Dinâmica. Observe que as grandezas fundamentais nessa conexão são a aceleração do lado das grandezas cinemáticas e a força do lado das grandezas dinâmicas. Daqui decorre o importante Princípio da Relatividade de Galileu, que define que toda a Física é invariante em relação a mudanças de referenciais inerciais, isto é, aqueles referenciais que se movem com velocidade constante em relação a um outro observador inercial. O fato de que uma lei física, a Equação da Onda Eletromagnética formulada por Maxwell, apresente uma velocidade como grandeza cinemática fundamental, e não a aceleração, gerou uma crise nos fundamentos da Física que foi resolvida por Einstein em sua Teoria da Relatividade Restrita.

A seguir faremos uma revisão da Mecânica Newtoniana. Nosso objetivo aqui é ir além dessa formulação básica, chegando a formalismos como os de Lagrange e de Hamilton, que permitem observar princípios gerais da Mecânica que são mais abstratos e mais amplos do que as três leis descritas acima.

2.1 Mecânica do ponto material

A partir das Leis de Newton, todo o movimento pode ser descrito a partir de suas causa, ou seja, conhecendo-se a posição e o estado de movimento de um corpo em um certo instante, bem como as forças que agem sobre esse corpo, toda informação sobre a posição, velocidade e aceleração em qualquer outro instante pode ser obtida.

2.1.1 Movimento linear

As relações abaixo são aquelas necessárias para descrever o movimento de qualquer objeto sujeito a forças externas.

Definindo-se o momento linear, $\mathbf{p}$, como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,,$$

onde o momento linear, $\mathbf{p}$ é definido por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,, \tag{2.1}$$

sendo $\mathbf{v}$ a velocidade, isto é

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,. \tag{2.2}$$

De fato, como a acelração é dada por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,,$$

segue que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\,, \tag{2.3}$$

como é dado pela Segunda Lei de Newton.

2.1.2 Movimento circular

No caso do movimento circular, no entanto, algumas grandezas auxiliares são definidas para descrever de forma mais sucinta o movimento.

Para o movimento circular as grandezas mais convenientes são o momento angular, **L**, dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}\,,$$

e o torque, τ definido por

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,.$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}\right)$$

e

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

segue que

$$\tau = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

de onde decorre que

$$\boxed{\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$

2.1.3 Trabalho, Energia Cinética e Energia Potencial

Definimos o trabalho exercido por uma força **F** num dado deslocamento entre os pontos 1 e 2 por

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}. \tag{2.4}$$

Entende-se que esta integral é realizada sobre um caminho C que corresponde à trajetória descrita pelo objeto sobre o qual age a força **F**.

Das definições de velocidade e posição dadas acima, podemos escrever

$$W_{12} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(v^2\right) dt \quad . \tag{2.5}$$

Integrando-se no tempo entre os instantes t_1 e t_2, que correspondem aos intantes de tempo em que o corpo se encontrava na posição inicial e na posição final, respectivamente, resulta

$$\boxed{W_{12} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = T_2 - T_1} \tag{2.6}$$

Este resultado é o Teorema Trabalho-Energia Cinética, e daqui segue a definição da energia cinética

$$T = \frac{mv^2}{2}\,. \tag{2.7}$$

Uma força tal que $\oint \mathbf{F} d\mathbf{s} = 0$ e chamada conservativa. Pelo teorema de Stokes

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Como $\nabla \times \nabla f = 0$ para qualquer função f, segue que $\mathbf{F} = -\nabla V$ onde V e a energia potencial. Para um deslocamento $d\mathbf{s}$ segue

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dV \quad ,$$

portanto podemos escrever

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial s}\,. \tag{2.8}$$

Portanto o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ resulta em

$$W_{12} = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial s} ds = V_1 - V_2\,,$$

de onde segue que

$$\boxed{W_{12} = V_1 - V_2}\,,$$

e portanto

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

e finalmente obtemos

$$E_1 = E_2 \quad .$$

A igualdade acima mostra que a energia mecânica dada por $E = T + V$ é uma grandeza conservada num sistema conservativo.

2.1.4 Conservação do Momento Linear

2.2 Mecânica de um sistema de partículas

O formalismo descrito acima pode ser estendido para sistemas de múltiplas partículas, como veremos a seguir. Consideraremos inicialmente sistemas formados por um conjunto de partículas puntiforme, e posteriormente os corpos extensos.

Sendo $\mathbf{F_{ij}}$ a força que o corpo j exerce sobre o corpo i, e $\mathbf{F}_i^{(e)}$ a resultante das forças externas sobre o corpo i, temos

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i$$

$\mathbf{F}_i^{(e)} \equiv$ forças externas sobre a i-ésima partícula.
Somando sobre todas as partículas temos

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ij}\,.$$

Definindo

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{r}_i$$

temos que

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ij}}_{=0 \;\; \mathbf{F}_{ij}=-\mathbf{F}_{ji}}$$

Sendo o momento linear total

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

segue que

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Daqui vemos que se a soma das forças externas é nula o momento total é conservado.

Momento Angular e Torque

O momento angular do ponto material é

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

então para um sistema de partículas o momento angular total é

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Daqui segue que

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \left[\underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=0 \ \dot{\vec{r}}_i \| \vec{p}_i} + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \right]$$

portanto

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

mas

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$$

portanto, usando

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

Usando

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

temos

$$\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i<j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}$$

Mas como $\vec{F}_{ji} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ segue que este termo é nulo.
Sendo $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$ segue

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$$

O momento angular é conservado se o torque externo é nulo.

Momento Angular Total e do Centro de Massa

Sendo $\vec{R}$ a posição do CM, temos

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

sendo $\vec{r}_i'$ e $\vec{v}_i'$ a posição e a velocidade da partícula no referencial do CM e $\vec{V}$ a velocidade do CM no referencial inicial.

Portanto

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{V}\right) = \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{V} +$$
$$\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}$$

Note que

$$\sum_i \vec{r}_i\text{'} \times m_i \vec{V} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\text{'} \right) \times \vec{V}$$

onde $\sum_i m_i \vec{r}_i\text{'}$ é a posição do CM no referencial do CM, portanto

$$\sum_i m_i \vec{r}_i\text{'} = 0$$

Da mesma forma

$$\sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v}_i\text{'} = \vec{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i\text{'} = 0$$

já que $\sum_i m_i \vec{r}_i\text{'} = 0$. Portanto resulta que

$$\vec{L} = \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \right) \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i\text{'} \times \vec{p}_i\text{'}$$

então

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i\text{'} \times \vec{p}_i\text{'}$$

ou

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i\text{'} \times \vec{p}_i\text{'}$$

O primeiro termo corresponde ao momento angular do CM e o segundo ao momento angular do sistema no referencial CM.

Energia de um Sistema de Partículas

O trabalho realizado pelas forças que agem sobre um sistema de partículas é

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \left[\int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i \right]$$

$$W_{12} = \sum_i \left. \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right|_1^2 = T_2 - T_1$$

Em função da velocidade do centro de massa temos

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i\text{'}$$

então

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{V} + \vec{v}_i{'}\right)\left(\vec{V} + \vec{v}_i{'}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \vec{V}\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i{'}\right)$$

e como $\sum_i \vec{r}_i{'} = 0$ o último termo é nulo. Assim

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$$

A passagem de sistemas de partículas puntiformes é feita considerando-se que o corpo tem uma densidade de massa, $\rho(\mathbf{r})$, e discretizando-se o volume do corpo. Assim temos a sustituição

$$\Sigma_i \to \int d^3r\rho(\mathbf{r})\,.$$

Com isso resulta, para o movmento linear, que a posição do centro de massa fica determinada por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\,,$$

e o momento linear total resulta em

$$\mathbf{P} = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}\,.$$

2.2.1 Exercícios

1. Uma caixa de massa m_A é colocada dentro de um elevador, e sobre ela é colocada uma caixa de massa m_B. Determine as forças que agem sobre cada caixa quando o elevador sobre com uma aceleração a e quando desce com aceleração a, como observadas por um observador inercial.

2. Um foguete de massa inicial M_o começa a ejetar gases com velocidade de escape v_e, ganhando velocidade na direção oposta. Determine a variação de velocidade do foguete após queimar uma quantidade de combustível tal que sua massa se reduza a M. **R:** $v - v_o = v_e \ln(M_o/M)$

3. Num porto uma carga de grãos finos é transportada para o navio através de uma esteira onde a carga de um trem é despejada. A esteira é movida por um motor que mantém sua velocidade constante e igual a V.

a) Determine a potência fornecida pelo motor. **R:** $P = d/dt[(m + M)V^2]$

b) Determine a variação de energia cinética da carga depositada por unidade de tempo.$dE/dt == d/dt[(m + M)V^2/2]$

c) Por que a potência fornecida é diferente da taxa de variação de energia cinética? Justifique.

4. Uma corrente de anéis bem pequenos comparados ao comprimento da corrente, l, tem massa m e é colocada dentro de um tubo horizontal liso que se encontra a uma altura h sobre a mesa. A corrente é posicionada de modo que uma parte damesma fique pendurada para fora do tubo. Esta parte tem inicialmente comprimento h, de forma que a sua extremidade inferior toca levemente a superfície da mesa. No intante inicial a outra extremidade, dentro do tubo, é liberada. determine a velocidade desta extremidade ao sair do tubo. **R:** $v^2 = 2Hg\ln(l/h)$

5. A partir do resultado obtido no problema anterior, mostre que a solução é equivalente considerar a massa invariante. Explique esse resultado.

6. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k. Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.

7. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k e que se move sob a ação de uma força viscosa $\mathbf{F_v} = -bv$, onde v é a velocidade do corpo e b uma constante. Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.

8. Considere um corpo de massa m acoplado a uma mola ideal de constante elástica k e que se move sob a ação de uma força viscosa $\mathbf{F_v} = -bv$, onde v é a velocidade do corpo e b uma constante, e de uma força externa periódica, $\mathbf{F_p}$. Obtenha a equação do movimento e a solução geral dessa equação.

9. Um corpo de mass m se encontra suspenso por uma corda elástica de constante k_A. Presa à parte inferior desse corpo encontra-se uma outra corda elástica de constante k_B. Considere que as duas cordas têm a mesma resitência a ruptura e que suas massas são desprezíveis. No instante t_o a corda B começa a ser puxada com velocidade constante, V_o.

   - Determine a equação de movimento enquanto nenhuma das cordas se rompe.

- Determine a solução geral dessa equação.
- Qual a frequência de oscilação, ω do corpo de massa m?
- Mostre que se a velocidade V_o é menor do que uma velocidade crítica $V_c = mg\omega/k_B$, então a corda que se romperá é a corda A.

Capítulo 3

Princípio de D'Alembert e Equação de Lagrange

3.1 Princípio de D'Alembert

O Princípio de D'Alembert representa uma forma de encarar problemas dinâmicos, em que a força resultante não é nula, como um problema de equilíbrio de forças. Para isso, interpreta a derivada temporal do momento linear como uma espécie de força, que somada à força resultante sobre o sistema resulta numa nova resultante nula.

A grande novidade com relação a esse princípio é o de separar forças de vínculos de forças externas, o que pode reduzir o número de variáveis do sistema, já que novas coordenadas, chamadas coordenadas generalizadas, permitem eliminar aquelas limitadas pelos vículos. Assim o npmero de coordenadas passa a ser igual ao número de graus de liberdade, tornando o problema mais tratável. A transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas leva à Equação de Lagrange, esta sim de grande aplicação na prática para resolver problemas mais complexos.

O vetor posição do corpo i é dado por $\vec{r}_i = \{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, e a 2ª lei de Newton leva à equação

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

onde $\mathbf{F_i}$ é a resultante das forças que agem sobre o corpo i e $\mathbf{p}_i$ o seu momento linear.

Da equação acima segue que para qualquer deslocamento $\delta\mathbf{r}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i\right) .\delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{3.1}$$

A equação acima mostra que, se $\dot{\mathbf{p}}_i$ for considerado uma força, qualquer problema dinâmico, isto é, em que haja aceleração do sistema, pode ser interpretado como um problema de estática, ou seja, de equilíbrio de forças. Este resultado é conhecido como Princípio de D'Alembert.

A seguir vamos usar o princípio discutido acima para obter as Equações de Lagrange, que representam um formalismo consideravelmente diferente das Três Leis de Newton para resolver problemas que usualmente encontramos na Física, em especial na Mecânica, porém retratam exatamente os mesmos princípios estabelecidos por Isaac Newton. Em muitos casos o formalismo de Lagrange apresenta vantagens práticas, e em grande medida isso decorre do fato de que coordenadas espúrias, que são aquelas que podem ser eliminadas quando se consideram os vínculos do sistema, podem ser eliminadas do problema desde o início, facilitando a solução dos problemas. Essas coordenadas desaparecem por causa de vínculos que restringem o movimento do sistema físico estudado. Exemplos de sistemas com vínculos são, uma conta que se move presa a um fio, que pode ter qualquer formato, como circular, espiral, etc., ou um bloco que se move sobre uma superfície rígida.

Chamamos de holonômicos os vínculos que podem ser descritos por meio equações na forma $f_i(x_j) = 0$, sendo x_j as coordenadas da posição do corpo i. Os vículos não-holonômicos são todos aqueles cuja restrição de movimento não pode ser escrito nesta forma. No que se segue nos restringimos aos vínculos holonômicos.

Dados os vínculos que agem sobre as M partículas, o número de graus de liberdade pode ser reduzido de $3D$ para um número N, onde D é a dimensão do espaço onde os corpos se movem (normalmente $D = 3$). Podemos então introduzir N coordenadas, chamadas coordenadas generalizadas, que correspondem aos graus de liberdade das M partículas.

3.2 Equações de Lagrange

As equações de movimento das M partículas pode então ser escritas em função das N coordenadas generalizadas, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2 ..., q_N, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(q_1, q_2 ..., q_N, t) \end{cases}$$

e daqui segue que

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\,.$$

Assim, a variação $\delta\dot{\mathbf{r}}_i$ devido à variação das coordenadas generalizadas, após um intervalo de tempo δt, é dada por

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \delta\dot{q}_j \,, \tag{3.2}$$

onde $\delta\dot{q}_j = \dot{q}_j \delta t$.

Por outro lado, como $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$, temos

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad \delta\dot{q}_j \,, \tag{3.3}$$

e comparando as duas equações para $\delta\dot{\mathbf{r}}_i$ obtemos que

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}} \,. \tag{3.4}$$

O primeiro termo da equação (3.1), que representa o Princípio de D' Alembert, também pode ser reescrito em função das coordenadas generalizadas como

$$\sum_i \mathbf{F}_i . \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i . \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \,. \tag{3.5}$$

Definindo as *componentes das forças generalizadas*

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i . \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \,, \tag{3.6}$$

segue que

$$\sum_i \mathbf{F}_i . \delta\mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j \,. \tag{3.7}$$

Assim, o trabalho realizado pelas forças $\mathbf{F}_i$ pode ser calculado através das forças generalizadas. Daqui se pode concluir que

$$V = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_j} \,, \tag{3.8}$$

onde V é a energia potencial do sistema.

Agora, para tratarmos do segundo termo da equação (3.1), note que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i . \delta\mathbf{r}_i = m\ddot{\mathbf{r}}_i \delta\mathbf{r}_i \,,$$

e que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \delta\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_i \delta\mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i . \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}_i$$

Mas

$$\dot{\mathbf{r}}_i\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j = \sum_j \dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\ \delta q_j,$$

onde foi usada a equação (3.4). Portanto podemos escrever

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i\ \delta\mathbf{r}_i = \sum_j \tfrac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\tfrac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2})\ \delta q_j\ .} \tag{3.9}$$

Também temos

$$\dot{\mathbf{r}}_i\ \frac{d}{dt}\ \delta\mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i\ \delta\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \mathbf{r}_i\ \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j,$$

e então

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i\ \tfrac{d}{dt}\ \delta\mathbf{r}_i = \sum_j \tfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\tfrac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}\right)\ \delta q_j\ .} \tag{3.10}$$

Assim, o primeiro termo da equação (3.1) fica

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}_i\ \delta\mathbf{r}_i = \sum_j \left[\tfrac{d}{dt}\ \tfrac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\tfrac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}\right) - \tfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\tfrac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}\right)\right]\ \delta q_j} \tag{3.11}$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação (3.1) também pode ser reescrito como

$$F_i.\delta\mathbf{r}_i = \sum_j\ F_i.\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j = \sum_j\ Q_i\ \delta q_j,$$

onde $Q_j = F_i.\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ é chamada força generalizada. Agora a equação (3.1) fica

$$\sum_i\ \sum_j \left[\frac{d}{dt}\ \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}\right) - Q_j\right]\ \delta q_j = 0, \tag{3.12}$$

sendo as somatórias em i e j independentes e portanto podemos trocar a ordem da soma. Com isso podemos escrever

$$\sum_i\ \frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = T$$

e

$$\sum_i\ Q_j\ \delta q_j = \sum_i\ F_i\ \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j = -\sum_i\ \frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}_i}\ \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}\ \delta q_j,$$

e a somatória em i na equação (3.12) pode ser eliminada em

$$\boxed{\sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-U)\right]\ \delta q_j = 0} \tag{3.13}$$

Se nos restringirmos a potenciais $U = U(q_1, q_2, ..., q_n)$, isto é, potenciais que não dependem da velocidade, podemos definir a função lagrangeana $L = T - U$ e escrever

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \tag{3.14}$$

já que os δq_j são arbitrários e a igualdade (3.13) deve ser sempre válida, quaisquer que sejam os δq_j.

A equação (3.14) é chamada equação de Lagrange, e é equivalente às Leis de Newton,como demonstramos aqui. Dessas equações resultam as equações de movimento, como veremos a seguir.

3.3 Exercícios

1. *Pêndulo Símples:* Determine a Lagrangeana e a Equação de Lagrange para um sistema unidimensional de massa m sujeito a um potencial $V = -kx^2/2$.

   Solução: No problema do pêndulo simples definimos as coordenadasdo objeto

$$\begin{cases} x_1 = x = l\ sen\theta \\ x_2 = y = -l\ cos\theta \\ g1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \dot{x_1} = -l\ cos\theta\ \dot{\theta} \\ \dot{x_2} = -l\ sen\theta\ \dot{\theta} \end{array}$$

   e portanto

$$\begin{cases} T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{m}{2}\ l^2\ \dot{\theta}^2 \\ U = mgy = -mgl\ cos\theta \end{cases} \Rightarrow\ L = \frac{m\ l^2\ \dot{\theta}^2}{2} + m\ g\ l\ cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(ml^2\ \dot{\theta}) + m\ g\ l\ sen\theta = 0$$

   então

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\ sen\theta}$$

2. *Pêndulo Simples acoplado a uma mola:* Considere um sistema formado por um pêndulo de comprimeto l e massa m que se encontra acoplado a

uma mola horizontal de constante elástica k. Determine a Lagrangeana e a equação de Lagrange do sistema.

Solução:

As coodernadas da massa são

$$\begin{cases} x_1 = x + l\ sen\theta \\ x_2 = -l\ cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} + l\ cos\theta\ \dot{\theta} \\ \dot{x_2} = l\ sen\theta\ \dot{\theta} \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\ l\ cos\theta\ \dot{x}\dot{\theta} + l^2 cos^2\theta\ \dot{\theta}^2 + l^2\ sen^2\theta\ \dot{\theta}^2)$$

$$\boxed{T = \tfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\ l\ cos\theta\ \dot{x}\dot{\theta})}$$

$$\boxed{U = \tfrac{Kx^2}{2} - m\ g\ l\ cos\theta}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\ l\ cos\theta\ \dot{x}\dot{\theta}\right) - \frac{Kx^2}{2} + m\ g\ l\ cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\ l\ cos\theta\ \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml(cos\theta\ \ddot{\theta} - sen\theta\ \dot{\theta}^2)}$$

$$\boxed{\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -Kx}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,l^2\,\dot{\theta} + m\,l\,cos\theta\,\dot{x} \Rightarrow \boxed{\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ l\ \ddot{\theta} + ml(-sen\theta\ \dot{\theta}\ \dot{x} + cos\theta\ \ddot{x}}$$

Subsitituindo esses resultados na equação de Lagrange obtemos

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = m\ l(\dot{\theta}^2 sen\theta - \ddot{\theta}\ cos\theta)}$$

e

$$\boxed{\ddot{\theta} - \left(\tfrac{g}{l}\right) sen\theta = -\left(\tfrac{\ddot{x}}{l}\right)\ cos\theta}$$

Observe que se o pêndulo é fixo, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, obtemos $m\ddot{x} + Kx = 0$ que é a equação do oscilador harmônico simples. Se, por outro lado, o oscilador é fixo, $x = o$, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, temos

$\ddot{\theta} - \left(\frac{g}{l}\right) sen\theta = 0$, que é a equação do oscilador.

3. Considere uma partícula de massa m que se move sem vínculos no espaço numa região onde sua energia potencial é dada por $V(\mathbf{r})$.

   - Escreva a Lagrangeana do sistema.
   - Mostre que as esquações de Lagrange são idênticas às equações obtidas através da aplicação das Leis de Newton.

4. Dois corpos de pesos P_1 e P_2 estão conectados por um fio inextensível de massa desprezível e comprimento L. Os pesos são colocados sobre uma superfície cilíndrica lisa de raio R, cujo eixo está na horizontal. Encontre a posição de equilíbrio usando o Princípio de D'Alembert.

5. Dois corpos de massas m_1 e m_2 ligados por um fio inextensível de massa desprezível são colocados sobre uma cunha que tem uma superfície horizontal apoioda sobre a mesa e uma surfície inclinada de um ângulo θ com a horizontal, de modo que o corpo de massa m_1 pende preso ao fio vertical, que após passar por uma roldana no ponto mais alto da cunha, se fixa ao corpo de mass m_2 que se encontra apoiado sobre a superfície inclinada da cunha. Encontre a posição de equilíbrio usando o Princípio de D'Alembert.**R:**$sen\theta = m_2/m_1$

6. Dois corpos de massas m_1 e m_2 ligados por um fio inextensível de massa desprezível são colocados sobre uma cunha que tem uma superfície horizontal apoioda sobre a mesa e uma surfície inclinada de um ângulo φ com a horizontal.

   a) Determine a aceleração do sistema em função de φ, m_1 e m_2.

   b) Determine a condição de equilíbrio.

   c) O que acontece se $sen\varphi < m_2/m_1$?

7. Usando as Eqs. de Lagrange, obtenha a segunda Lei de Newton em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.**R:**$md^2q_i/dt^2 = F_i$**,** $F_r = m\ddot{r} -, r\dot{\theta}$ **e** $rF_\theta = d/dt(mr^2\dot{\theta}$

8. Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre uma cunha de ângulo θ em relação à horizontal. A cunha de massa M se encontra sobre uma superfície horizontal sem atrito. Determine a Lagrangeana do sistema e as eqs. de movimento.

9. Uma partícula se move num plano sob a ação de um campo de força dado por
$$\mathbf{F} = -kr\,cos\theta\,\mathbf{r}\,, \tag{3.15}$$
onde k é uma constante e $\mathbf{r}$ é o versor radial.

   a) O momento angular é conservado? Justifique.

   b) Obtenha a equação de movimento da órbita da partícula. $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -krcos\theta$

10. Uma barra de comprimento r tem sua extremidade ligada a uma haste vertical de modo que se move livremente na vertical com movimento dado pela função $z = asen(\omega t)$. Na extremidade superior está preso um corpo de massa m. O ângulo que a barra faz com a vertical pode variar livremente. Determine a Langrangeana do sistema e as equações de movimento. $r\ddot{\theta} = (g - a\omega^2 sen(\omega t))sen\theta$

11. Uma barra inclinada de um ângulo θ em relação à vertical gira em torno do eixo vertical com frequência angular ω. Na barra inclinada está uma conta que pode deslizar sem atrito. Determine a Lagrangeana do sistema e a equação do movimento. Obtenha a solução geral e discuta o movimento. Se a velocidade inicial da conta é v_o e sua posiç ao inicial é r_o, determine a função do movimento da conta. $\ddot{r} = r\omega^2 sen^2\theta - gcos\theta$

12. Uma escada encontra-se apoiada sobre uma parede vertical de modo a formar um ângulo θ com o piso horizontal. Despreze o atrito entre as superfícies e a escada. Sendo l o comprimento da escada, determine a Lagrangeana e a equação de movimento. $(ml^2 + 4I)\ddot{\theta} = 2mglcos\theta$

Capítulo 4

ED-Oscilações

Estudo Dirigido 1: Oscilações Harmônicas

1. Sendo $T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}$ e sendo $\{q\} = q_1, q_2, ..., q_N$ as coordenadas generalizadas. Mostre que se $\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial t} = 0$ então

   $$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

   onde

   $$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_k}$$

2. Seja $V(q_1, ..., q_N)$ um potencial generalizado que tenha um mínimo local em $\{q^0\}$. Mostre que a expansão em série de Taylor resulta em:

   $$\begin{aligned} V(q_1, ..., q_N) =& V(q_1^0, ..., q_N^0) + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^0}\left(q_i - q_i^0\right) + \\ & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{q^0}\left(q_i - q_i^0\right)\left(q_j - q_j^0\right) + ... \end{aligned}$$

   Quanto vale $\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^0}$?

3. Definindo novas coordenadas $u_i = q_i - q_i^0$, mostre que até segunda ordem na expansão o potencial pode ser escrito como

   $$V(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}u_iu_j$$

onde

$$V_{ij} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}\right]_0$$

4. Mostre que a Lagrangeana, na aproximação dada, fica

$$L = \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k} m_{jk}\dot{u}_j\dot{u}_k - \sum_{j,k} V_{jk}u_j u_k\right]$$

5. Mostre que m_{jk} pode ser expandido na forma

$$m_{jk}(q_1, ..., q_N) = m_{jk}(q_1^0, ..., q_N^0) + \sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial m_{ik}}{\partial u_l}\right]_0 u_l + ...$$

mostre também que, na aproximação até segunda ordem para T, apenas o primeiro termo da expansão é relevante.

6. Com os resultados anteriores, mostre que a Lagrangeana se reduz a

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left[T_{jk}\dot{u}_j\dot{u}_k - V_{jk}u_j u_k\right]$$

e obtenha as equações de Lagrange.

7. Assumindo que $u_j = Re(\eta_j)$ com $\eta_j = a_j e^{i\omega t}$, mostre que as equações de Lagrange se reduzem à equação matricial

$$\left(\boldsymbol{V} - \omega^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{a} = 0$$

Como as coordenadas u_i são independentes, a solução da equação deve se dar na condição de que o determinante

$$\left|\boldsymbol{V} - \omega^2\boldsymbol{T}\right| = 0$$

Observe que essas condições leva a uma equação algébrica de grau N, e portanto teremos N soluções ω_i^2, $i = 1, ..., N$.

8. Podemos transformar as soluções

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_N \end{pmatrix}$$

em soluções

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ . \\ Q_N \end{pmatrix}$$

através de uma transformação $\boldsymbol{A}$ tal que

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

Mostre que das equações de Lagrange obtemos

$$\frac{1}{2}\left[\tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} - \dot{\tilde{\boldsymbol{Q}}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Q}}\right] = 0$$

e que o segundo termo do lado esquerdo é uma matriz diagonal.

9. As novas soluções $\boldsymbol{Q}$ podem ser definidas de modo que

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade. Mostre que nesse caso também $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}$ é uma matriz diagonal.

10. Mostre que a equação de Lagrange se reduz a

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A} = \omega^2\boldsymbol{I}$$

e que para cada solução ω temos

$$V_i' Q_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 = 0$$

onde $V_i' = \left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\right]_{ii}$ As soluções Q_i representam os modos normais de vibração.

Considere um potencial dependente apenas das coordenadas do sistema e que presente um ponto de equilíbrio em $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, ..., q_N^{(0)})$. Podemos escrever esse potencial como uma série de Taylor a partir do ponto de equilíbrio, resultando

$$\begin{aligned} V(q_1, ..., q_N) =& V(q_1^{(0)}, ..., q_N^{(0)}) + \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^{(0)}} \left(q_i - q_i^{(0)}\right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{q^{(0)}} \left(q_i - q_i^{(0)}\right) \left(q_j - q_j^{(0)}\right) + ... \end{aligned}$$

Como $q^{(0)}$ é um ponto de equilíbrio, segue que

$$\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^{(0)}} = 0$$

Também podemos sempre escolher $V(q_1^{(0)}, ..., q_N^{(0)})$. Então, em aproximações até segunda ordem temos

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} u_i u_j$$

onde $u_i = q_i - q_i^{(0)}$ e

$$V_{ij} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}\right]_{q^{(0)}} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}\right]_0 = \textit{constante}$$

Por outro lado, note que $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}$ e

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t}$$

portanto

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} + 2 \sum_j \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t}\right)$$

Com isso temos

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t}\right) + \sum_j \left[\sum_i m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right] \dot{q}_j + \sum_{j,k} \left[\sum_i \frac{m_i}{2} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k}\right] \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Se a transformação entre os sistemas de coordenadas $\dot{\boldsymbol{r}}_i \longrightarrow q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ for independente do tempo, $\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} = 0$ portanto

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

onde

$$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_k}$$

Ainda, em termos das coordenadas u_j, segue

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{u}_j \dot{u}_k$$

onde

$$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial u_j} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial u_k} \tag{4.1}$$

Então a Lagrangeana do sistema, na aproximação até segunda ordem, fica

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left[\sum_{j,k} m_{jk} \dot{u}_j \dot{u}_k - \sum_{j,k} V_{jk} u_j u_k \right]$$

Note que V_{jk} são constantes, mas m_{jk} depende das coordenadas com indicado na equação 4.1. Porém podemos fazer a expansão de Taylor

$$m_{jk}(q_1, ..., q_N) = m_{jk}(q_1^{(0)}, ..., q_N^{(0)}) + \sum_{l=1}^{N} \left[\frac{\partial m_{ik}}{\partial u_l} \right]_0 u_l + ...$$

Como os m_{jk} são já quadráticos nas velocidades, para mantermos a aproximação até segunda ordem temos de manter apenas o primeiro termo da expansão acima. Então podemos escrever

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} [T_{jk} \dot{u}_j \dot{u}_k - V_{jk} u_j u_k]$$

com

$$V_{ij} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right]_0 = \; constante$$

e

$$T_{jk} = m_{jk}(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, ..., q_N^{(0)}) = \sum_i m_i \left[\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial u_j} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial u_k} \right]_0 = \; constante$$

Observe que $T_{jk} = T_{kj}$, e como V é um potencial conservativo, $V_{jk} = V_{kj}$. Vamos então obter a equação de Lagrange para a coordenada u_l. Temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_l} = 0$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_l} = \frac{1}{2}\sum_j T_{jl}\dot{u}_j + \frac{1}{2}\sum_k T_{lk}\dot{u}_k$$

e T_{jk} é simétrica

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_l} = \sum_j T_{jl}\dot{u}_j$$

portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_l}\right) = \sum_j T_{jl}\ddot{u}_j$$

Também temos

$$\frac{\partial L}{\partial u_l} = \frac{1}{2}\sum_j V_{jl}u_j + \frac{1}{2}\sum_k V_{lk}u_k = \sum_j V_{jl}u_j$$

Portanto a equação do movimento fica

$$\sum_j = [T_{jl}\ddot{u}_j - V_{jl}u_j] = 0$$

Considere uma solução do tipo $u_j = Re(\eta_j)$, com $\eta_j = a_j e^{i\omega t}$ Esta equação pode ser escrita de forma matricial como

$$\left(\boldsymbol{V} - \omega^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{a} = 0$$

Aqui

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & . & . & . & V_{1N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ V_{N1} & . & . & . & V_{NN} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & . & . & . & T_{1N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ T_{N1} & . & . & . & T_{NN} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{pmatrix}$$

O determinante acima resulta em uma equação algébrica de grau N em ω^2. Teremos então N valores de ω^2 e $2N$ valores de ω (pares com sinais + e −). A solução geral será

$$\eta_l = \sum_{m=1}^{N} a_{lm}\left(C_m^- e^{-i\omega_m t} + C_m^+ e^{i\omega_m t}\right)$$

onde C_m^+ e C_m^- são constantes complexas. η_l é uma função complexa, e a função que procuramos é a parte real desta função, isto é, $u_l = Re(\eta_l)$. Note que u_l ainda pode ser escrito na forma $u_l = B_m a_{lm} cos(\omega_m t + \varphi_{lm})$ As amplitudes determinam a contribuição de cada modo de vibração, m, para o movimento da coordenada l. Os coeficientes m_{lm} determinam, então, o estado de movimento do sistema. Podemos expressar esse resultado como uma composição de coordenadas que têm apenas uma frequência de vibração, que são chamados modos normais de vibração. Seja $\boldsymbol{Q}$ o vetor que representa os modos normais. Então

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

onde $\boldsymbol{A}$ é a matriz formada pelos elementos a_{lm}

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1N} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{N1} & . & . & . & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Note que agora $\boldsymbol{\eta}$ não é um vetor de parâmetros, como era o vetor $\boldsymbol{a}$, mas um vetor de funções do tipo

$$\eta_l = \sum_{j=1}^{N} a_{jl} \left(C_l^- e^{-i\omega_j t} + C_j^+ e^{i\omega_j t} \right)$$

já o vetor $\boldsymbol{Q}$ tem componentes do tipo

$$Q_j = C_j^- e^{-i\omega_j t} + C_j^+ e^{i\omega_j t}$$

Com isso podemos definir também as derivadas $\dot{\boldsymbol{\eta}}_l$ e $\dot{\boldsymbol{Q}}_l$. Assim

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{u}_i T_{ij} \dot{u}_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \tilde{\dot{\boldsymbol{Q}}} \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{Q}}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j u_i V_{ij} u_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}\boldsymbol{V}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{V} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}$$

As equações de Lagrange ficam, na forma matricial

$$\frac{1}{2} \left[\tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{V} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} - \tilde{\dot{\boldsymbol{Q}}} \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{Q}} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\quad [\underbrace{\tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}}_{\substack{\downarrow\\ \text{também é}\\ \text{uma matriz}\\ \text{diagonal para}\\ \text{asegurar a igualdade}}} \quad \overset{-}{\underset{\longleftarrow}{}} \quad \underbrace{\tilde{\dot{\boldsymbol{Q}}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Q}}}_{\substack{\downarrow\\ \text{matriz diagonal}\\ \text{pois os } \boldsymbol{Q} \text{ e } \dot{\boldsymbol{Q}}\\ \text{têm frequência definida}}}] \quad = 0$$

portanto

$$\left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\right]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ \lambda_i \left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\right]_{ij} & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

onde λ_i é uma constante de proporcionalidade e está relacionada às constantes $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q^{(0)}}$ e $\left. m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k}\right|_{q=q^{(0)}}$

Observe que o fator $\left. m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k}\right|_{q=q^{(0)}}$ pode ser incorporado nas novas coordenadas $\boldsymbol{Q}_{ij}$, então podemos dizer que

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade, de forma que a equações de Lagrange ficam

$$\left[\tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} - \tilde{\dot{\boldsymbol{Q}}}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{Q}}\right] = 0$$

e como $\dot{\boldsymbol{Q}} = -\omega Q$, temos

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}\left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\omega^2}\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{Q} = 0 \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega^2}\boldsymbol{I}$$

onde

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & \omega_N^2 \end{pmatrix}$$

A equação para cada coordenada fica

$$V_i' Q_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 = 0$$

onde

$$V_i' = \left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\right]_{ii}$$

os $\boldsymbol{Q}_i$ definem os modos normais de oscilação.

4.1 Exemplo: O problema da braquistocrona

Capítulo 5

Princípio de mínima ação de Hamilton

Vimos no Capítulo anterior que as equações de Lagrange representam um grande avanço formal na aplicação das Leis de Newton para resolver problemas de sistemas mecânicos que apresentam vínculos. Do ponto de vista conceitual, no entando, os avanços não são tão grandes, já que essas equações foram obtidas através de uma transformação de variáveis, com redução do número de coordenadas para se adequar ao número de graus de liberdade do sistema, porém partiram do Princípio de D'Alembert, que por sua vez segue diretamente das Leis de Newton.

Veremos neste capítulo que o mesmo resultado, isto é, as Equações de Lagrange, pode ser obtido a partir de um princípio completamente novo, e aparentemente sem vínculo com as Leis de Newton. Esse é o chamado Princípio de Mínima Ação de Hamilton, que afirma que um sistema físico evolui de modo a minimizar uma nova grandeza física, a Ação, entre os instantes inicial e final.

Para entendermos como isso funciona temos que, antes de mais nada, conhecer o método variacional, que nos ajuda a determinar curvas que minimizam uma dada grandeza. Um exemplo de aplicação desse método é a determinação da curva chamada braquistocrona, que determina a trajetória que um corpo deve descrever entre um ponto A e outro ponto B, este numa altura inferiro ao primeiro, de modo que, apenas sob a ação da força peso, o tempo que o corpo gasta para fazer o percurso é mínimo.

5.1 Método variacional

O método variacional é uma técnica importante que permite encontrar uma função que minimiza uma grandeza integral. Tem aplicações em vários campos do conhecimento, principalmente na geometria não Euclideana, em Teoria da Relatividade Geral, e na Mecânica está relacionada a uma nova interpretação das Equações de Lagrange. Aqui chegaremos ao Princípio de Hamilton, que representa um salto conceitual importante com relação às Leis de Newton, ao contrário da formulação das Equaões de Lagrange via Princípio de D'Alembert, que vimos no capítulo anterior, e que decorre diiretamente daquelas leis. O Princípio de Hamilton leva à mesma Mecânica que se obtém pelas Leis de Newton, porém partindo de um conceito totalmente novo.

Considere a função $f(y,x)$, e a integral de linha ao longo de um caminho C,

$$I = \int_C f(y,x)ds$$

onde ds é um deslocamento infinitesimal ao longo do caminho C . Para diferentes caminhos o resultado da integral pode ser diferente . O método variacional permite obter o caminho para o qual esse resultado é um extremo , isto é , dados os pontos inicial (x_o, y_o) e final (x_f, y_f) , obtemos o caminho para o quel I é mínimo ou é maximo . Para isso , vamos supor que o caminho possa ser parametrizado na forma $y = y(x)$, e vamos estudar como é a variação de integral, δI , quando variamos a forma de $y(x)$. Vamos indicar por δy a variaçãodessa fução , mas é importante esclarecer que essa não é a variação infinitesimal de uma variável , como dx , mas corresponde a uma alteração da forma da função. Isto é , se inicialmente temos $y(x) = \eta(x)$, sendo η uma função definida no mesmo dominio temos y, e sendo $\xi(x)$ outra função no mesmo dominio de y, temos

$$\delta y(x) = \eta(x) + \epsilon\xi(x),$$

onde ϵ é uma constante real suficientemente pequena.

Quando mudamos a forma da função $y(x)$, mudamos também a sua derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$, de forma, de modo que agora a função f depende também de y', ou seja, $f = f(y, y', x)$.Então a integral de caminho fica

$$I = \int_{x_o}^{x_f} f(y, y', x)dx \tag{5.1}$$

onde a integração agora é apenas em dx já que o caminho está parametrizado na função $y = y(x)$. Uma variação δy produz uma variação δf dada por

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \tag{5.2}$$

definida em cada valor da variável x. Aqui

$$\delta y' = \eta'(x) + \epsilon\xi'(x) = \frac{d}{dx}(\delta y).$$

Quando f varia de δf, obtemos uma variação na integral I que é dada por

$$\delta I = \int_{x_o}^{x_f} \delta f(x) dx = \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right] dx \tag{5.3}$$

O segundo termo dessa integral pode integra por partes, como

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_o}^{x_f} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx - \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right] dx\,.$$

A primeira integral do lado direito da equação acima é nula, pois

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}(x)\right]_{x_o}^{x_f} = 0\,,$$

já que $\delta y(x_o) = \delta y(x_f) = 0$ por definição. Portanto obtemos

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = -\int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right] dx\,. \tag{5.4}$$

e substituíndo 4 em 3 chegamos em

$$\delta I = \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx\,. \tag{5.5}$$

A equação 5 nos dá a variação da integral de linha, I, quando variamos o caminho C ao longo do qual a integração é feita. Essa variação do caminho é representada pela variação $\delta y(x)$. Quando o caminho representa um extremo da integral (máximo, mínimo ou inflexão), devemos ter $\delta I = 0$, qualquer que seja a variação $\delta y(x)$ suficientemente pequena. Como δy é arbitrário, teremos $\delta I = 0$ somente se

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,. \tag{5.6}$$

Esta equação diferencial relaciona f, que é uma função conhecida, com $y(x)$, que é a função a ser determinada, permitindo obter o caminho associado ao extremo da integral I.

5.2 Princípio de mínima ação de Hamilton

Considere agora a mudança de variáveis $x \to t$ e $y \to q$, e com isso teremos também $y' \to \dot{q}$. Também chaemos f de L. Então segue que a equação da trajetória que minimiza a funçaõ S é

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0\,. \tag{5.7}$$

que é exatamente a Equação de Lagrange obtida no capítulo anterior através do Princípio de D'Alembert.

Daqui podemos concluir que a Equação de Lagrange pode ser obtida pelo método variacional, e portanto o sistema físico cuja dinâmica é descrita por essa equação evolui no tempo segundo uma trajetória que minimiza a grandeza

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt\,. \tag{5.8}$$

Esse resultado foi obtido primeiramente por Hamilton, por isso é conhecido como Princípio de Hamilton. A grandeza S aqui introduzida é chamada ação, e desempenha um papel fundamental na Mecânica Clássica bem como na Mecânica Quântica. Observe que a constante de Planck, h, tem a mesma unidade da ação. Este resultado também é conhecido como Princípio de Mínima Ação.

Note que este resultado não modifica as Equações de Lagrange, antes, mostram que elas podem ser obtidas através de um processo completamente diferente. Enquanto no capítulo 2 obtivemos essa equações a partir do Princípio de D'Alembert, que segue diretamente das Leis de Newton, aqui o mesmo resultado é obtido a partir do princípio de minimização da ação. Conceitualmente este é um grande salto em relação à Mecânica Newtoniana.

5.3 Exercícios

Capítulo 6

ED - Corpo Rígido

1. Rotações finitas e consecutivas em geral não comutam, isto é, alterar a ordem em que rotações sucessivas ao redor de diferentes eixos leva a configurações finais diferentes. Porém, as rotações infinitesimais comutam. Discuta as diferenças entre esses dois casos.

2. Considere um corpo rígido que gira com velocidade angular ω em torno de um ponto fixo O.

   1) Quantos graus de liberdade tem o sistema?

   2) Determine a velocidade $\mathbf{v}$ de um ponto do objeto na posição na posição $\mathbf{r}$ em relação ao ponto O.

   3) Se nessa posição do corpo tivéssemos apenas uma partícula de massa m_i, mostre que o momento angular seria $\boldsymbol{J}_i = m_i[\boldsymbol{r_i^2\omega} - \boldsymbol{(r_i\omega)r_i}]$

3. Usando este resultado, mostre que para o corpo rígido podemos escrever $\mathbf{J} = \mathbf{I}\tilde{\omega}$, onde $\mathbf{I}$ é o tensor de inércia, cujas componentes são $I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r^2}\delta_{\mathbf{ij}} - \mathbf{x_i x_j})dV$, onde dV é o elemento de volume na posição $\mathbf{r}$.

   Podemos encontrar um sistema de coordenadas em que o tensor de inércia tem todas as suas componentes fora da diagonal nulas. Neste caso o sistema é chamado "eixos principais".

4. Encontre a equação característica para a determinação dos eixos principais.

5. Determine a velocidade angular ω nesse sistema de coordenadas formado pelos eixos principais.

6. Determine a direção dos eixos principais a partir da velocidade angular.

7. Determine a energia cinética de um corpo rígido em rotação.

8. Mostre que $I = I_c + Md^2$ onde I é o momento de inércia de um corpo que gira em torno de um eixo arbitrário, I_c é o momento de inércia do mesmo corpo girando em torno de um eixo paralelo ao anterior mas passando pelo centro de massa do sistema, M é a massa total do corpo e d é a distância entre os dois eixos. (Teorema dos eixos paralelos)

9. Obtenha a Lagrangeana de um corpo em rotação livre de forças externas.

10. Considere agora que existe um potencial externo que não depende da velocidade do corpo. Determine cada componente do torque sobre o sistema.

11. Descreva o movimento de um pião simétrico livre de torque.

12. Descreva o movimento de um pião simétrico sujeito à força peso.

Solução do ED Corpo Rígido

Exercício 1

Enquanto muitas transformações podem ser obtidas a partir de uma sequência de trasnformações parciais, independentemente de sua orde, como por exemplo as trasnlações, rotações não podem, em geral, ser independentes da ordem em que as rotaçãoes parciais são realizadas. Por exemplo, considere rotações de 90^o em tornos dos eixos Z (matriz A) e do eixo X (matriz B). É fácil notar que $AB \neq BA$. De fato, temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) & 0 \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ 0 & -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pode-se observar que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

De forma geral, no espaço tridimensional, uma rotação infinitesimal pode ser representada assim:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 \\ x_2' &= x_2 + \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 \\ x_3' &= x_3 + \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 \end{aligned}$$

onde ε_{ij} são infinitésimos. O anterior pode-se escrever de forma matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Das relações anteriores temos

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{x}$$

onde I e a matriz unidade e $\mathbf{I} + \mathbf{E}$ é o operador de uma rotação infinitesimal.

Sejam agora dias rotações infinitesimais

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 \qquad \mathbf{B} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2$$

Temos que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$$

e

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$$

Se os infinitésimos de ordem superior não são considerados:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = 0\,.$$

Isto pode ser feito somente enquanto $\mathbf{E}_1 \sim 0$ e $\mathbf{E}_2 \sim 0$, ou seja, a sequência de rotações deve incluir uma rotação infititesimal em torno de um eixo seguida de outra rotação infitesimal em torno de outro eixo.

Então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

e

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

Exercício 2

(a)

Em geral, para designar a posição de um corpo estenso precisamos de seis grais de liberdade: três para indicar a posição do centro de massa e três para indicar a orientação do corpo, ou, de forma equivalente, a posição de um outro ponto fixo do corpo. Note que aqui já estamos usando os vínculos de um corpo rígido. Se fosse um gas monoatômico, por exemplo, o sistema teria $3N$ graus de liberdade, onde N é o número de partículas livres do gas. Para um sistema de alguns gramas, $N\ 10^{23}$, e o npumero de graus de liberdade do gas é muito grande. Portanto, para o corpo rígido, o fato de a posição relativa de duas partes quaisquer do corpo se manter fixa leva a uma enorme redução do número de graus de liberdade. No caso do gas, técnicas estatísticas são usadas para tratar de um sistema tão complexo.

Tem três graus de liberdade, as três direções espaciais de rotação.

(b)

Vamos supor uma combinação de três rotações infinitesimais ao redor dos eixos cartesianos, um ângulo $d\theta_x$ ao redor do eixo x, um ângulo $d\theta_y$ ao redor do eixo y e um ângulo $d\theta_z$ ao redor do eixo z, desta forma podemos considerar três velocidades angulares $\omega_x = \frac{d\theta_x}{dt}$, $\omega_y = \frac{d\theta_y}{dt}$ e $\omega_z = \frac{d\theta_z}{dt}$. A rotação ao redor do eixo x é:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

Para o caso infinitesimal $\theta_x \longrightarrow d\theta_x$ temos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_x \\ 0 & -d\theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

igualmente as outras rotações podem ser representadas assim:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z & 0 \\ -d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo as três rotações simultaneamente e desprezando os infinitésimos de ordenes superiores pode-se demonstrar que:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{ABC} = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 1 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando essa rotação ao vetor $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{Er}$$

a mudança diferencial do vetor é então:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 0 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}$$

Dividendo por dt:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & d\theta_z/dt & -d\theta_y/dt \\ -d\theta_z/dt & 1 & d\theta_x/dt \\ d\theta_y/dt & -d\theta_x/dt & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}$$

A equação matricial anterior é o mesmo que

$$\boldsymbol{v_x} = \omega_z r_y - \omega_y r_z$$

$$\boldsymbol{v_y} = -\omega_z r_x + \omega_x r_z$$

$$\boldsymbol{v_x} = \omega_y r_x - \omega_x r_y$$

Se formamos o vetor:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

então as relações obtidas anteriormente podem ser expressas:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

(c)

O momento angular é:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

A seguir usamos a identidade do triple produto vetorial:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

então

$$\boldsymbol{J} = m\left[\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]$$

Exercício 3

Temos

$$\boldsymbol{J} = m\left[\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]$$

Fazendo a descomposição nas direções x, y, z temos

$$\begin{aligned} J_x &= m\left[(r^2 - r_x^2)\omega_x - r_y r_x \omega_y - r_z r_x \omega_z\right] \\ J_y &= m\left[-r_x r_y \omega_x + (r^2 - r_y^2)\omega_y - r_z r_y \omega_z\right] \\ J_z &= m\left[-r_x r_z \omega_x - r_y r_z \omega_y + (r^2 - r_z^2)\omega_z\right] \end{aligned}$$

Matricialmente pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} r_2 - r_x^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_y r_x & r_2 - r_y^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_2 - r_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ou

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$$

os elementos matriciais de $\boldsymbol{I}$ são:

$$I_{ij} = m(\delta_{ij} r^2 - r_{ij})$$

O anterior foi feito para um ponto de massa m no sólido rígido, agora, se consideramos que temos um diferencial de volume dm então:

$$dI_{ij} = dm(\delta_{ij} r^2 - r_{ij}) = \rho(\boldsymbol{r})(\delta_{ij} r^2 - r_{ij})dV$$

Exercício 4

Há que encontrar um referencial onde $\boldsymbol{I}$ seja diagonal, ou seja:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} \tag{6.1}$$

a matriz $\boldsymbol{D}$ é diagonal e representa a $\boldsymbol{I}$ no referencial onde $\boldsymbol{I}$ é diagonal.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores de $\boldsymbol{D}$.

Demonstremos que os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 também são os autovalores de $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{1}\boldsymbol{x}$$

aqui $\mathbf{1}$ é a matriz identidade. Das relações anteriores temos:

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} - \lambda\mathbf{1}\boldsymbol{x}) = 0$$

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Multiplicando por $\boldsymbol{P}$ na esquerda:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} - \lambda\boldsymbol{P}\mathbf{1}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

ou

$$(\boldsymbol{I} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

portanto, as matrizes $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{I}$ têm os mesmos autovalores.

Agora temos que para passar do referencial original para o sistema eixos principais temos que fazer a seguinte transformação

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

No referencial dos eixos principais temos que

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}' = \lambda\boldsymbol{x}'$$

O problema da determinação dos eixos principais no referencial inicial consiste en encontrar as componentes de $\boldsymbol{x'}$ no referencial inicial.

Para passar ao referencial original aplicamos $\boldsymbol{P}$ à equação anterior:

$$\boldsymbol{PDx'} = \lambda \boldsymbol{Px'}$$

ou

$$\boldsymbol{PDP^{-1}Px'} = \lambda \boldsymbol{Px'}$$

e usando $\boldsymbol{PDP^{-1} = I}$ da equação 6.1 e $\boldsymbol{x = Px'}$ chega-se a:

$$\boldsymbol{Ix} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Portanto, para determinar o vetor $\boldsymbol{x}$ é preciso a determinação dos autovetores da matriz $\boldsymbol{I}$ e a equação característica seria então

$$\boldsymbol{(I - \lambda 1)x = 0}$$

A equação anterior só tem solução se

$$det(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{1}) = 0$$

Exercício 5

Neste problema é conhecida a matriz $\boldsymbol{I}$ no referencial inicial e seus autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 os quais podem ser calculados através da equação característica. É conhecido também o vetor $\boldsymbol{\omega}$ no referencial inicial. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}'$ no referencial dos eixos principais, é preciso o cálculo da transformação $\boldsymbol{P}$ que faz $\boldsymbol{\omega' = P\omega}$. Essa transformação faz a rotação de qualquer vetor do referencial inicial para o referencial dos eixos principais, e em particular, dos versores que representam os eixos principais no referencial inicial $\boldsymbol{x' = Px}$, que são os autovetores da matriz $\boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{Ix} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Aplicando $\boldsymbol{P}$ passamos ao referencial dos eixos principais, onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores dela:

$$\boldsymbol{Ix} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{PIx} = \lambda \boldsymbol{Px} = \lambda \boldsymbol{x'}$$

$$\boldsymbol{PIP^{-1}Px} = \boldsymbol{Dx'} = \lambda \boldsymbol{x'}$$

Do anterior temos que

$$\boldsymbol{PIP^{-1}} = \boldsymbol{D}$$

multiplicando o anterior por $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{PIP^{-1}P} = \boldsymbol{DP}$$

ou

$$\boldsymbol{PI} = \boldsymbol{DP}$$

A equação anterior é:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Definindo os seguintes vetores:

$$\boldsymbol{P_1} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P_2} = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P_3} = \begin{pmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{pmatrix}$$

a equação matricial fica:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{IP_1} & \boldsymbol{IP_2} & \boldsymbol{IP_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{P_1} & \lambda_2\boldsymbol{P_2} & \lambda_3\boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}$$

portanto temos que:

$$\boldsymbol{IP_1} = \lambda_1\boldsymbol{P_1}$$

$$\boldsymbol{IP_2} = \lambda_2\boldsymbol{P_2}$$

$$\boldsymbol{IP_3} = \lambda_3\boldsymbol{P_3}$$

Pode-se observar que os vetores $\boldsymbol{IP_1}$, $\boldsymbol{IP_2}$ e $\boldsymbol{IP_3}$ são os autovetores da matriz I $\boldsymbol{I}$, portanto, a matriz de transformação $\boldsymbol{P}$ está formada pelos autovetores de $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix}$$

Desta forma, calculando os autovetores de $\boldsymbol{I}$ e formando a matriz de transformação $\boldsymbol{P}$, pode-se calcular a velocidade angular no referencial dos eixos principais:

$$\boldsymbol{\omega'} = \boldsymbol{P\omega}$$

Exercício 6

No referencial dos eixos principais temos que os eixos principais são:

$$\boldsymbol{x_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x_2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x_3'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os eixos principais no referencia inicial temos que fazer:

$$\boldsymbol{x_{1,2,3} = Px'_{1,2,3}}$$

ou

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_1}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_2}$$

$$\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P_3}$$

Exercício 7

A energia cinética ade rotação o redor de um ponto é:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{m - iv_i(\omega \times r_i)}$$

Permutando os vetores do produto misto temos:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{v_i}) = \frac{\boldsymbol{\omega \cdot J}}{2} \tag{6.2}$$

Usando a valor de $\boldsymbol{J}$ do exercício 2:

$$\boldsymbol{J} = \sum_i m\left[\boldsymbol{r_i^2\omega - (r_i \cdot \omega)r_i}\right]$$

Chega-se a:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2}\sum_i m\left[\boldsymbol{r_i^2\omega - (r_i \cdot \omega)r_i}\right]$$

Fazendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{n}}$ temos

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m \left[\boldsymbol{r_i^2} - (\boldsymbol{r_i} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \right] \tag{6.3}$$

A relação 8.24 pode-se seguir desenvolvendo

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{\omega^2}{2}\, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{6.4}$$

O escalar $I = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ representa o momento de inercia respeito ao eixo de rotação. Comparando as equações 6.3 e 6.4 chega-se a:

$$I = \sum_i m \left[\boldsymbol{r_i^2} - (\boldsymbol{r_i} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \right]$$

Exercício 8

Do exercício anterior

$$I = \sum_i m \left[\boldsymbol{r_i^2} - (\boldsymbol{r_i} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \right]$$

Seja $\boldsymbol{R}$ o vetor que va desde a origem O do referencial ao centro de massas do corpo, e $\boldsymbol{r_i}$ e $\boldsymbol{r_i'}$ os vetores que vão desde a origem do referencial O e desde o CM até a partícula i-ésima, respectivamente. Esses vetores tem que cumprimentar:

$$\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r_i'}$$

Então o momento de inercia fica:

$$I = \sum_i m \left[(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r_i'})^2 - ((\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r_i'}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \right]$$

$$I = \sum_i m_i \boldsymbol{R^2} + \sum_i m_i \boldsymbol{r_i'}^{\,2} + 2 \sum_i m_i \boldsymbol{r'} \cdot \boldsymbol{R} - \sum_i m_i (\boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 - \sum_i m_i (\boldsymbol{r_i'} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 - 2 \sum_i m_i (\boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r_i'} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2$$

$$I = \boldsymbol{R^2} \sum_i m_i + \sum_i m_i \boldsymbol{r_i'}^{\,2} + 2\boldsymbol{R} \sum_i m_i \boldsymbol{r'} - (\boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 \sum_i m_i - \sum_i m_i (\boldsymbol{r_i'} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2 - 2 (\boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} (\sum_i m_i \cdot \boldsymbol{r_i'}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}})^2$$

Fazendo $\sum_i m_i = M$ e $\sum_i m_i \boldsymbol{r_i'} = 0$ já que esta última é a posição do CM no referencial CM, temos:

$$I = \boldsymbol{R^2} M + \sum_i m_i \boldsymbol{r_i'}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{(R \cdot \hat{n})^2} M - \sum_i m_i \boldsymbol{(r_i' \cdot \hat{n})^2}$$

Agrupando:

$$I = \sum_i m_i \boldsymbol{r_i'}^{\boldsymbol{2}} - \sum_i m_i \boldsymbol{(r_i' \cdot \hat{n})^2} + \boldsymbol{R^2} M - \boldsymbol{(R \cdot \hat{n})^2} M$$

$$I = \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r_i'}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{(r_i' \cdot \hat{n})^2}\right] + \boldsymbol{R^2} M - \boldsymbol{(R \cdot \hat{n})^2} M$$

O termo dentro da somatória é o momento de inercia no referencial do CM

$$I_c = \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r_i'}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{(r_i' \cdot \hat{n})^2}\right]$$

O vetor $\boldsymbol{R}$ pode ser expresso:

$$\boldsymbol{R} = R_n \boldsymbol{\hat{n}} + \boldsymbol{R_p}$$

onde $\boldsymbol{R_p}$ é a componente de $\boldsymbol{R}$ perpendicular a $\boldsymbol{\hat{n}}$. A distância entre o eixos paralelos de rotação inicial e do CM é $d = R_p$. Desta forma:

$$I = I_c + \boldsymbol{R^2} M - \boldsymbol{(R \cdot \hat{n})^2} M = I_c + (R_n^2 + R_p^2) M - R_n^2 M$$

$$I = I_c + R_p^2 M = I_c + d^2 M$$

Exercício 9

Para um corpo em rotação livre de forças externas temos:

$$L = T$$

Se usamos o sistema de eixos principais (x', y', z') pode-se usar como variáveis generalizadas os ângulos de Euler que expressam a rotação do referencial (x', y', z') respeito ao referencial (x, y, z). No referencial (x', y', z') temos

$$T = \frac{I_1 \omega_{x'}^2}{2} + \frac{I_2 \omega_{y'}^2}{2} + \frac{I_3 \omega_{z'}^2}{2}$$

Onde as componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ tem a seguinte relação com os ângulos de Euler:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Exercício 10

Agora a Lagrangiana é

$$L = \frac{I_1\omega_{x'}^2}{2} + \frac{I_2\omega_{y'}^2}{2} + \frac{I_3\omega_{z'}^2}{2} - V(\theta, \phi, \psi)$$

Como ψ é uma rotação ao redor do eixo z' temos que o torque relativo a essa coordenada é:

$$N_{z'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

Das relações 6.5:

$$\frac{\partial \omega_{z'}}{\partial \dot{\psi}} = 1 \qquad \frac{\partial \omega_{x'}}{\partial \psi} = \omega_{y'} \qquad \frac{\partial \omega_{x'}}{\partial \psi} = -\omega_{x'}$$

portanto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_{z'} \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = I_1\omega_{x'}\omega_{y'} - I_2\omega_{y'}\omega_{x'}$$

A equação de Lagrange é então:

$$N_{z'} = I_3\dot{\omega_{z'}} - \omega_{x'}\omega_{y'}(I_1 - I_2)$$

A identificação de um dos eixos principais como eixo z' é completamente arbitraria. Evidentemente, podem-se permutar os índices e escrever as equações para os outros eixos:

$$N_{x'} = I_1\dot{\omega_{x'}} - \omega_{y'}\omega_{z'}(I_2 - I_3)$$

$$N_{y'} = I_2\dot{\omega_{y'}} - \omega_{z'}\omega_{x'}(I_3 - I_1)$$

$$N_{z'} = I_3\dot{\omega_{z'}} - \omega_{x'}\omega_{y'}(I_1 - I_2)$$

As equações anteriores são conhecidas como Equações de Euler para o corpo rígido.

Exercício 11

Tomando o eixo z' como eixo de simetria, $I_1 = I_2$ e as equações de Euler ficam:

$$I_1\dot{\omega_{x'}} = \omega_{y'}\omega_{z'}(I_1 - I_3)$$

$$I_1\dot{\omega_{y'}} = -\omega_{z'}\omega_{x'}(I_1 - I_3)$$

$$I_3\dot{\omega_{z'}} = 0$$

Da última destas equações temos que $\omega_{y'}$ é constante. Das duas primeiras equações pode-se obter:

$$\ddot{\omega_{x'}} = -\left[\frac{(I_1 - I_3)\omega_{z'}}{I_1}\right]^2 \omega_{x'}$$

que tem a seguinte solução

$$\omega_{x'} = A\sin\Omega t$$

e

$$\omega_{y'} = A\cos\Omega t$$

onde

$$\Omega = \frac{(I_1 - I_3)\omega_{z'}}{I_1}$$

Pode-se observar que o vetor $\omega_{x'}\boldsymbol{i} + \omega_{y'}\boldsymbol{j}$ tem módulo constante y gira uniformemente ao redor do eixo z' do corpo com uma frequência angular Ω

Exercício 12

Para o pião simétrico:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2$$

e em função dos ângulos de Euler:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

A energia potencial é:

$$V = Mgl\cos\theta$$

onde l é a distância do CM à origem do referencial situado no ponto fixo do corpo.

Então a lagrangiana fica:

$$L = frac12(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mgl\cos\theta$$

Pode-se olhar que ϕ e ψ são coordenadas cíclicas, portanto p_ϕ e p_ψ são constantes do movimento:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_{z'} = I_1 a \tag{6.6}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = I_1 b \tag{6.7}$$

onde são usadas dos novas constantes a e b em função dos momentos generalizados constantes anteriores. Como o sistema é conservativo, a energia total E é também uma constante:

$$E = T + V = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2 + Mgl\cos\theta \tag{6.8}$$

De 8.25 temos

$$I_3\dot{\psi} = I_1 a - I_3\dot{\phi}\cos\theta \tag{6.9}$$

Substituindo em 8.26:

$$I_2\dot{\phi}\sin^2\theta + I_1 a\cos\theta = I_1 b$$

ou

$$\dot{\phi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{6.10}$$

Substituindo 6.10 em 6.9 temos:

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{6.11}$$

Da equação da energia pode-se definir uma nova constante

$$E' = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + Mgl\cos\theta \tag{6.12}$$

Substituindo 6.10 em 6.12 e reagrupando temos:

$$\sin^2\theta\dot{\theta}^2 = \sin^2\theta(\alpha - \beta\cos\theta) - (b - a\cos\theta)^2 \tag{6.13}$$

onde α e β são constantes:

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} \qquad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}$$

Fazendo $u = \cos\theta$ temos:

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

Capítulo 7

Simetrias de Leis de Conservação

Quando estudamos o movimento de uma partícula ou de um sistema fechado, isto é, livre de forças externas, consideramos que o espaço é homogêneo e isotrópico, e que o tempo é homogêneo. Mais precisamente, temos que

a) O espaço é homogêneo se as propriedades do sistema físico fechado não são afetadas por um delocamento arbitrário da origem do sistema de referência.

b) O espaço é isotrópico se as propriedades de um sistema físico fechado não variam quando o sistema de referência sofre uma rotação arbitrária em torno da origem.

c) O tempo é chamado homogêneo se as propriedades de um sistema físico fechado não variam ao se deslocar arbitariamente a origem do tempo.

Vamos verificar que essas simetrias estão relacionadas a leis de conservação de grandezas físicas.

7.1 Homegeneidade do espaço e conservação do momento linear.

Ao se deslocar a origem do sistema de coordenadas, temos $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon$

1) Mostre que

$$\delta L = \varepsilon \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r_i}} \,. \tag{7.1}$$

2) A partir da propriedade (a) e das equações de Lagrange, mostre que o momento total do sistema é conservado.

7.2 Homegeneidade do tempo e conservação de energia.

Ao se deslocar a origem do tempo, temos $t \to t' = t + \delta t$.

3) Usando a propriedade (c), mostre que $dL/dt = 0$.

4) A partir deste resultado e usando as equaçoes de Lagrange, mostre que a energia mecânica se conserva.

7.3 Isotropia do espaço e conservação do momento angular.

Uma rotação sempre tem um eixo em torno do qual ela resulta. Seja $\hat{z}$ este eixo. Então temos

$$\delta \mathbf{r_i} = \hat{z} \times \mathbf{r_i} \delta\theta \tag{7.2}$$

e

$$\delta \mathbf{v_i} = \hat{z} \times \mathbf{v_i} \delta\theta \,. \tag{7.3}$$

5) Considerando que $L = L(\mathbf{r_i}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i})$, determine a expressão para δL em função de $\delta\mathbf{r_i}$ e de $\delta\mathbf{v_i}$.

6) Usando as equações de Lagrange, mostre que

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{r_i} \times \delta\mathbf{p_i}) \,. \tag{7.4}$$

1. Usando a identidade $\delta\mathbf{p_i}.(\hat{z} \times \delta\mathbf{r_i}) = \hat{z}.(\mathbf{p_i} \times \mathbf{r_i})$, mostre que o momento angular é conservado.

7.4 Invariancia segundo as transformações de Galileu.

Transformações de Galileu correspondem a mudanças de um referencial inercial para outro. Neste caso temos $\mathbf{r_i} \to \mathbf{r'_i} = \mathbf{r_i} + \mathbf{v_o} t$.

7) Mostre que $\mathbf{v_i'} = \mathbf{v_i} + \mathbf{v_0}$.

8) Mostre que na ausência de forças externas, $L' = T' + V = L + dF/dt$, onde $F = (1/2)mv_o^2 t + m\mathbf{v_0}.\mathbf{v_i}$, onde F é chamada função de gauge (ou calibre).

9) Mostre que a presença da função de gauge não altera as equações de Lagrange.

Capítulo 8

Problemas de Forças Centrais - Estudo Dirigido

Considere um sistema de dois corpos de massas m_1 e m_2.

1. Determine as posições $\mathbf{r}'_1$ e $\mathbf{r}'_2$ dos corpos no referencial do centro de massa (CM).

2. Sendo $\mathbf{R}$ a posição do centro de massa, determine a energia cinética do sistema em função de $\dot{\mathbf{R}}$, $\dot{\mathbf{r}}'_1$ e $\dot{\mathbf{r}}'_2$.

3. Agora considere $\mathbf{r}$ a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1. Mostre que a energia cinética é

   $$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 \,. \tag{8.1}$$

   onde $M = m_1 + m_2$ e $\mu = m_1 m_2 / M$.

   Considerando que as partículas estejam sujeitas unicamente a um potencial de interação entre elas,

4. Mostre que

   $$\frac{d\dot{\mathbf{R}}}{dt} = 0 \,. \tag{8.2}$$

   de onde segue que o momento total $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ é constante.

5. Qual o número de graus de liberdade que o problema adquire quando nos restringimos ao referencial do centro de massa?

6. Mostre que para o movimento relativo a Lagrangeana é

   $$L' = \frac{\mu}{2}\left[\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r) \,. \tag{8.3}$$

7. Mostre que o momento é conservado.
8. Mostre que a equação do movimento é

$$\mu \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) , \tag{8.4}$$

onde $l = \mu r^2 \dot{\theta}$.

Conservação de energia

9. A partir da conservação de momento angular, mostre que a área varrida pelo raio médio da órbita é constante (Segunda Lei de Kepler).
10. Usando o momento angular l, mostre que a equação do movimento é

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) + \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr} . \tag{8.5}$$

11. Mostre também que

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) . \tag{8.6}$$

12. Mostre que se $U = U(r)$ então $dU/dt = (\partial U/\partial r)\dot{r}$, mostre que

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2}\right) , \tag{8.7}$$

e daqui conclua a conservação de energia.

Equação diferencial da órbita

13. A partir da euqação

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r} , \tag{8.8}$$

e considerando que $\dot{r} = (dr/d\theta)\dot{\theta}$, mostre que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} . \tag{8.9}$$

14. Sendo $u = 1/r$, mostre que $(du/d\theta) = -(1/r^2)(dr/d\theta)$ e portanto

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta} , \tag{8.10}$$

e portanto

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} . \tag{8.11}$$

15. Mostre que a equação da órbita fica

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=f(1/u)\,, \tag{8.12}$$

onde $f(r) = -(\partial v/\partial r)$.

O problema de Kepler

O problema da gravitaçao envolve uma força $f(r) = -K/r^2$, portanto temos

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-k\right]=0\,, \tag{8.13}$$

onde $k = K\mu/l^2$.

16. Mostre que esta equação é a equação de um oscilador harmônico, isto é

$$\frac{d^ew}{d\theta^2}+w=0\,, \tag{8.14}$$

e portanto a solução da equação da órbita fica

$$\frac{1}{r(\theta)}=Acos(\theta+\varphi)+\frac{K\mu}{l^2}\,. \tag{8.15}$$

17. Mostre que asolução pode ser escrita na forma de equação de uma cônica, isto é,

$$\frac{J}{r}=1+\varepsilon cos(\theta+\varphi)\,, \tag{8.16}$$

e determine J e ε.

18. Mostre que em termos da energia mecânica E temos

$$A=\frac{K\mu}{l^2}\sqrt{1+2l^2E/(\mu K^2)} \tag{8.17}$$

e

$$\varepsilon=\sqrt{1+2l^2E/(\mu K^2)}\,. \tag{8.18}$$

19. Demonstre a Terceira Lei de Kepler, isto é, mostre que

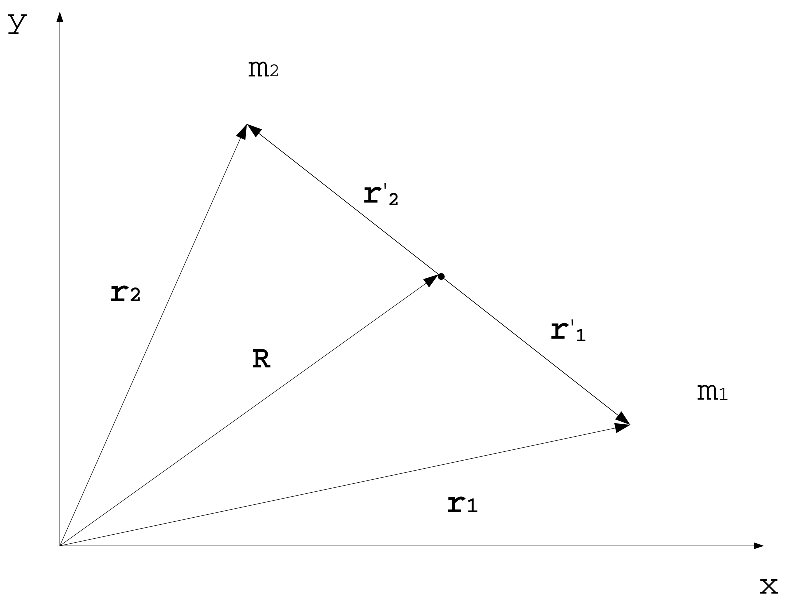
$$T^2=\frac{4\pi^2\mu}{K}a^3\,, \tag{8.19}$$

onde T é o período da órbita e a é o semi-eixo maior da elípse que descreve a órbita do planeta.

Solução do ED de forças centrais

Como estamos tratando de um sistema de dois corpos, será conveniente separarmos as coordenadas do centro de massa das coordenadas relativas. Na figura [8] temos a posição do CM indicada por $\boldsymbol{R}$ e os vetores posição dos corpos, $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$, respectivamente.

Para resolver o problema vão ser necessário o uso do seguinte sistema de vetores:



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{cm}$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Da figura

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1' + \mathbf{R} = \mathbf{r}_1' + \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2' + \mathbf{R} = \mathbf{r}_2' + \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Portanto

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

E

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right) \\ \boldsymbol{r}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right) \end{cases} \tag{8.20}$$

Exercício 2

$$T = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2}$$

Usando

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1' + \dot{R}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2' + \dot{R}$$

chega-se a

$$T = \frac{m_1\left(\dot{\mathbf{r}}_1' + \dot{R}\right)^2}{2} + \frac{m_2\left(\dot{\mathbf{r}}_2' + \dot{R}\right)^2}{2}$$

Desenvolvendo os parêntesis temos

$$T = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^{\,2}}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(m_1\dot{\mathbf{r}}_1' + m_2\dot{\mathbf{r}}_2'\right)\dot{\mathbf{R}}$$

Temos que $m_1\mathbf{r}_1' + m_2\mathbf{r}_2' = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}'$, onde $\dot{\mathbf{R}}'$ é a posição do centro de massas no referencial do centro de massas, portanto, $\dot{\mathbf{R}}' = 0$ e $m_1\mathbf{r}_1' + m_2\mathbf{r}_2' = \mathbf{0}$. Derivando esta última expressão temos que $m_1\dot{\mathbf{r}}_1' + m_2\dot{\mathbf{r}}_2' = \mathbf{0}$, então a energia cinética fica:

$$T = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^{\,2}}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2$$

Exercício 3

Do exercício 1 temos:

$$T = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^{\,2}}{2} + \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 \tag{8.21}$$

e do exercício 1:

$$\mathbf{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{8.22}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{8.23}$$

Derivando 8.22 e 8.23 em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{r}}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}} \qquad \dot{\mathbf{r}}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}$$

e substituindo em 8.21

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)^2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

Exercício 4

Como o sistema é isolado, temos

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$$

e

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt}$$

onde

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$$

. Usando a definição do CM

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

e derivando respeito ao tempo, segue

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

portanto

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

onde $\mathbf{P}$ é o momento do CM considerando toda a massa concentrada no CM

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \dot{\mathbf{P}}$$

Pela terçeira lei de Newton:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

então

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$$

portanto **P** é constante respeito ao tempo.

Exercício 5

Desenvolver o discurso R $\Rightarrow$ três graus de liberdade (R_x, R_y, R_z)
$\mathbf{r} \Rightarrow$ três graus de liberdade (r_x, r_y, r_z)
Em total são três graus de liberdade. Como o movimento do CM já está resolvido (**P**=cte), então só é preciso resolver o problema para a coordenada **r**, portanto, o problema tem três graus de liberdade.

Exercício 6

Introdução do problema Do exercício 3:

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

então

$$L = T - V = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2}_{L_{cm}} + \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)}_{L'}$$

$$L' = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$

Vamos fazer a transformação para coordenadas polares (r, θ):

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

Derivando respeito ao tempo:

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})\hat{\mathbf{i}} + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})\hat{\mathbf{j}}$$

então

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{r}^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)r^2\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

então

$$L' = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Exercício 7

Usando a lagrangiana do exercício anterior

$$L' = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

temos

$$\frac{\partial L'}{\partial\dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = p_\theta \qquad \frac{\partial L'}{d\theta} = 0$$

e substituindo na equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial\theta} = 0$$

chega-se a

$$\frac{dp_\theta}{dt} = 0$$

portanto p_θ é constante.

Exercício 8

Do exercício anterior temos:

$$l = p_\theta = \mu r^2\dot{\theta}$$

portanto

$$\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{\mu^2 r^4} \tag{8.24}$$

Resolvendo a equação de Lagrange para a coordenada r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0$$

obtemos

$$\mu \frac{d\dot{r}}{dt} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

usando 8.24 na equação anterior temos que

$$\mu \frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

pode-se demonstrar que $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{l^2}{\mu r^3}$ então a equação do movimento fica

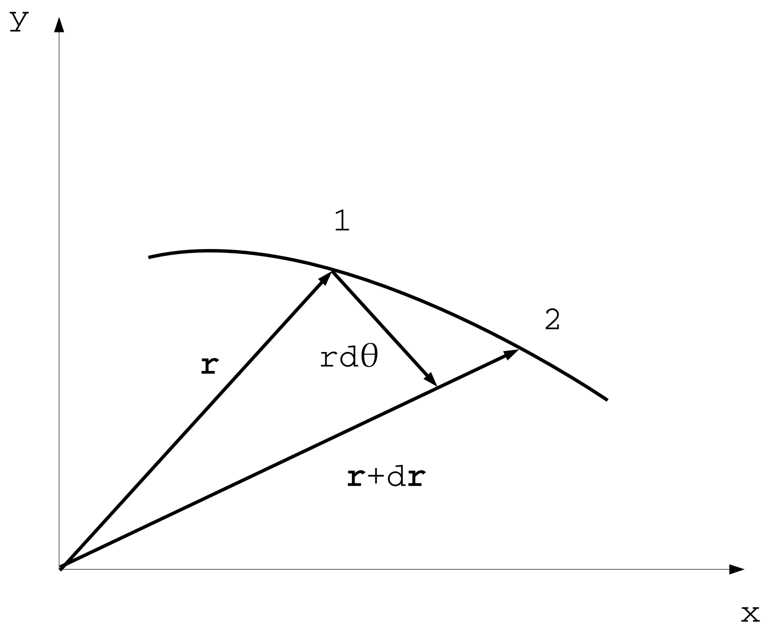
$$\mu \frac{d\dot{r}}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

portanto

$$\mu \frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)$$

Exercício 9

Seja um diferencial de trajetória do ponto 1 ao ponto 2 (figura):



Quando o ponto 2 $\longrightarrow$ 1, o diferencial de área recorrida é:

$$dA = \frac{r \cdot rd\theta}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

Então

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

Levando em conta que o momento angular é constante e que $l = \mu r^2 \dot{\theta}$, então a quantidade $\frac{r^2\dot{\theta}}{2}$ também é constante e

$$\frac{dA}{dt} = CTE$$

Exercício 10

RESOLVIDO NO 8

Exercício 11

RESOLVIDO NO 8

Exercício 12

$$U = U(r)$$
$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{dt} \tag{8.25}$$

No exercício 8 foi obtido

$$\mu\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)$$

fazendo $U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$ e multiplicando a equação anterior por $\dot{r}$

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r})\dot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\dot{r} \tag{8.26}$$

A derivada temporal da energia cinética radial pode desenvolver-se assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}\dot{r}\right) = \mu\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r})\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2\right)$$

substituindo o anterior e a equação 8.25 em 8.26 temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U\right) = 0$$

ou

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = T + V = E = CTE$$

Exercício 13

Do momento angular $l = \mu r^2\dot{\theta}$ temos que $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$. Como $r = r(\theta)$ então:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

Exercício 14

Se $u = 1/r$:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d(1/r)}{d\theta} = \frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

Do exercício 13:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{d\mu}{d\theta}$$

Derivando o anterior respeito ao tempo:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta}$$

Do momento angular $l = \mu r^2\dot{\theta}$ temos que $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, então:

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)\frac{lu^2}{\mu} = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{dt^2}$$

Exercício 15

Nos exercícios anteriores foi demonstrado que:

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \tag{8.27}$$

e

$$\ddot{r} = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{8.28}$$

Usando $r = 1/r$ e substituindo 8.28 em 8.27

$$-\frac{l^2u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2u^3}{\mu} = f(1/u)$$

$$-\frac{l^2u^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = f(1/u)$$

portanto

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -f(1/u)$$

Exercício 16

Temos que resolver a equação:

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - k\right) = 0$$

ou seja

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - k = 0$$

Fazendo $\omega = u - k \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d^2\omega}{d\theta^2}$
então a equação da órbita é:

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega = 0$$

que tem a seguinte solução:

$$\omega = A\cos(\theta + \varphi)$$

onde A e φ são constantes do movimento. Agora fazendo a transformação inversa $\omega = u - k$:

$$u = A\cos(\theta + \Phi) + k = A\cos(\theta + \Phi) + \frac{K\mu}{l^2}$$

Exercício 17

Do exercício anterior:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta + \varphi) + \frac{K\mu}{l^2}$$

Multiplicando por $\frac{l^2}{K\mu}$ obtemos

$$\frac{l^2}{K\mu r} = \frac{Al^2}{K\mu}\cos(\theta + \varphi) + 1$$

Se escrevemos a equação anterior na forma:

$$\frac{J}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\theta + \varphi)$$

temos que

$$J = \frac{l^2}{K\mu} \qquad \varepsilon = \frac{Al^2}{K\mu}$$

Exercício 18

A energia total é:

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}$$

Quando $r = r_{min} \Rightarrow \dot{r} = 0$, e

$$E = \frac{l^2}{2\mu r_{min}^2} - \frac{K}{r_{min}}$$

A equação anterior pode-se transformar em uma equação de segundo grado respeito a r_{min}:

$$Er_{min}^2 + Kr_{min} - \frac{l^2}{2\mu} = 0$$

que aceita as seguintes soluções:

$$r_{min}^{(1,2)} = \frac{K}{2E}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}\right)$$

A expressão anterior só tem sentido físico se $E \geqslant -\frac{\mu K^2}{2l^2}$ para que a parte dentro da raiz quadrada seja não negativa. Para determinar o sinal antes da raiz quadrada é preciso fazer uma análise por faixas de energia:

Para $E \geqslant 0$, temos que $\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}} \geqslant 1$, portanto $r_{min}^{(1)} \geqslant 0$ e $r_{min}^{(2)} \leqslant 0$, esta última não tem sentido físico, então $r_{min} = r_{min}^{(1)}$.

Para $E < 0$ e $E \geqslant -\frac{\mu K^2}{2l^2}$ temos:

$$-1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}} < -1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}} < 0$$

Multiplicando por $\frac{K}{2E}$ e levando em conta que $\frac{K}{2E} < 0$

$$\frac{K}{2E}\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}\right) > \frac{K}{2E}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}\right) > 0$$

ou seja

$$r_{min}^{(2)} > r_{min}^{(1)} > 0$$

portanto $r_{min} = r_{min}^{(1)}$.

Então para todas as energias possíveis temos

$$r_{min} = \frac{K}{2E}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}\right) \tag{8.29}$$

Por outro lado, da equação da órbita

$$\frac{J}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta + \varphi)$$

para que $r = r_{min} \Rightarrow \cos(\theta + \varphi) = 1$, portanto

$$r_{min} = \frac{J}{1+\varepsilon} = \frac{l^2}{K\mu(1+\varepsilon)} \tag{8.30}$$

De 8.29 e 8.30 temos:

$$\frac{l^2}{K\mu(1+\varepsilon)} = \frac{K}{2E}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu K^2}}\right)$$

portanto

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}}$$

No exercício 18 foi obtido que

$$\varepsilon = \frac{Al^2}{K\mu}$$

portanto

$$A = \frac{K\mu}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}}$$

Exercício 19

O comprimento do eixo maior da elipse pode ser calculado assim:

$$d = r_{max}(\theta_0) + r(\theta_0 + \pi)$$

onde θ_0 é o ângulo para o qual $r = r_{max}$

Da equação da órbita

$$\frac{J}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta + \varphi)$$

temos que $r = r_{max}$ quando $\cos(\theta + \varepsilon) = -1$, ou $\theta + \varepsilon = \pi$, portanto

$$\theta_0 = \varphi + \pi$$

$$r_{max} = \frac{J}{1-\varepsilon}$$

e

$$r(\theta_0 + \varepsilon) = \frac{J}{1 + \varepsilon \cos(\theta_0 + \varepsilon + \pi)} = \frac{J}{1 + \varepsilon \cos(2\pi)} = \frac{J}{1+\varepsilon}$$

Então

$$d = \frac{J}{1+\varepsilon} + \frac{J}{1-\varepsilon} = \frac{2J}{1-\varepsilon^2}$$

O semi-eixo maior da elipse é então:

$$a = d/2 = \frac{J}{1-\varepsilon^2}$$

Para calcular o período pode-se usar o resultado do exercício 9:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

$$dA = \frac{l}{2\mu} dt$$

$$\int_0^A dA = \frac{l}{2\mu} \int_0^T dt$$

onde T é o período e A a área da elipse.

$$A = \frac{l}{2\mu} T$$

A área da elipse é:

$$A = \pi ab$$

onde a e b são os semieixos maior e menor da elipse respectivamente. Esses parâmetros estão relacionados através da excentricidade:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

portanto

$$A = \pi a^2 \sqrt{\frac{J}{a}} = \frac{l}{2\mu} T$$

$$T^2 = \frac{(2\pi\mu)^2}{l^2} a^3 J = \frac{4\pi\mu}{K} a^3$$

Capítulo 9

Simetrias e Leis de Conservação

Quando estudamos o movimento de um corpo livre no espaço consideramos que o espaço é homogêneo e isotrópico, e que o tempo é homogêneo. Isso significa que nenhum ponto do espaço ou do tempo tem algum caráter distintivo *per se*, nem o espaço possui uma orientação preferencial, ou o tempo algum instante diferente de outro qualquer. Mais especificamente:

1. O espaço é chamado homogêneo se as propriedades de um sistema físico fechado, isto é, isolado de forças externas, não são afetadas por um deslocamento arbitrário da origem do sistema de referência.

2. O espaço é chamado isotrópico se as propriedades de um sistema físico fechado não variam quando o sistema de referência sofre rotação arbitrária em torno da origem.

3. O tempo é chamado homogêneo se as propriedades de um sistema físico fechado não variam ao se deslocar arbitrariamente a origem do tempo.

Um resultado importante que pode ser obtido a partir do formalismo de Lagrange é o de que as simetrias mencionadas acima estão relacionadas a leis de conservação de grandezas físicas. Veremos a seguir como cada uma dessas simetrias leva a uma lei de conservação diferente. Antes disso, porém, vamos entender o que significa o termo "simetria" no presente caso.

Quando dizemos que há uma simetria num sistema físico queremos dizer que qualquer medida física é insensível a alterações dos parâmetros do sistema que são livres de acordo com essa simetria, ou seja, a evolução do sistema físico não é modificada quando alguns parâmetros, aqueles que determinados pela simetria, são modificados. Suponhamos que os sistema original tenha uma Lagrangeana L, e que depois de uma transformação dos parâmetros permitidos pela simetria, tenhamos outra Lagrangeana, $L' = L + \delta L$. Como a evolução de qualquer sistema físico é determinada pelo princípio de mínima ação de Hamilton, o termo simetria, aqui, indica que ocálculo da ação entre dois dados instantes de tempo, usando a Lagrangeana L, antes da transformação de simetria, ou a Lagrangeana L' depois da transformação, leva ao mesmo resultado, isto é,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L) dt \,. \tag{9.1}$$

Daqui decorre que, sempre que $\delta L = 0$, a evolução do sistema físico não é alterada pela transformação, e portanto temos uma simetria, e as equações de Lagrange ou de Hamiton serão as mesmas antes e depois da transformação.

A condição acima, expressa na equação (9.1), é bastante restritiva. Veremos pelo menos um caso, em seguida, em que essa igualdade não é satisfeita mas mesmo assim as equações de Lagrange ou de Hamilton permanecem inalteradas, e portanto temos ainda uma simetria do sistema.

9.1 Homogeneidade do espaço e conservação do momento linear

De acordo com o princípio da simetria relacionada à homogeneidade do espaço, podemos fazer um deslocamento arbitrário da origem do sistema sem que o sistema físico varie. Isso significa que se fazemos a transformação

$$\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\varepsilon} \,, \tag{9.2}$$

a Lagrangena do sistema não varia, ou seja, $\delta L = 0$ Na expressão acima, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um deslocamento arbitrário, mas que aqui vai ser considerado, por conveniência, infinitesimal. O fato de ser infinitesimal não implica em perda de generalidade do resultado que será obtido, pois qualquer deslocamento finito pode ser dividido em uma sucessão de deslocamentos infinitesimais.

A invariância da Lagrangeana pode ser expressa por

$$\delta L = \sum_i \boldsymbol{\nabla} L . \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \,. \tag{9.3}$$

Observe que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o mesmo para todos os corpos do sistema, pois corresponde a um deslocamento da origem do sistema de coordenadas. Daqui segue que

$$\sum_i \boldsymbol{\nabla} L = 0 \,, \tag{9.4}$$

o que pode ser escrito, em termos das coordenadas x_{ij} para cada corpo i, como

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,. \tag{9.5}$$

Por outro lado, nas coordenas x_j, as Equações de Lagrange do sistema são

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}} \right] = 0\,. \tag{9.6}$$

Usando o resultado dado pela equação (9.5), obtemos que

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right) = 0\,. \tag{9.7}$$

Vimos no formalismo de Hamilton que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right) = p_{ij}\,, \tag{9.8}$$

onde p_{ij} é a componente j do momento do corpo i, portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i p_{ij}\right) = 0\,. \tag{9.9}$$

Esse resultado é válido para todas as componentes do momento, e assim obtemos finalmente, para o momento total do sistema,

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0\,. \tag{9.10}$$

O resultado acima mostra que, a partir da hipótese de que o espaço é homogêneo, obtém-se necessariamente que o momento total do sistema é conservado.

9.2 Homogeneidade do tempo e conservação da energia

Neste caso, temos que a Lagrangeana do sistema é invariante pela transformação

$$t \to t + \delta t\,. \tag{9.11}$$

Aqui consideramos que o tempo varia enquanto todas as outras variáveis permanecem fixas. Assim a invariância da Lagrangenana é expressa por

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = 0\,. \tag{9.12}$$

Como a variação na origem do tempo é arbitrária, resulta então que devemos ter

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,, \tag{9.13}$$

ou seja, a Lagrangenana não depende explicitamente do tempo, e temos então que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{ij}}\dot{x}_{ij} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\ddot{x}_{ij}\right)\,. \tag{9.14}$$

Usando a equação de Lagrange na equação acima e substituindo na equação acima temos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{ij}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right)\dot{x}_{ij} + \sum_{ij}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\ddot{x}_{ij} = 0\,, \tag{9.15}$$

e portanto

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right)\dot{x}_{ij}\right] = 0\,. \tag{9.16}$$

Observe que a equação acima pode também ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right)\dot{x}_{ij} - L\right] = 0\,, \tag{9.17}$$

e usando a definição de momento do formalismo Hamiltoniano, segue que

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{ij} p_{ij}\dot{x}_{ij} - L\right] = 0\,. \tag{9.18}$$

Agora, note que o termo entre colchetes é exatamente a função Hamiltoniana, portanto segue que

$$\frac{dH}{dt} = 0\,. \tag{9.19}$$

Lembre-se que, quando a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo, como ocorre aqui, a função Hamiltoniana é equivalente à energia do sistema, então obtemos finalmente que

$$\frac{dE}{dt} = 0\,. \tag{9.20}$$

Este resultado mostra que, da hipótese de que um deslocamento arbitrário na origem do tempo não altera a Lagrangeana, então decorre a conservação da energia mecânica.

9.3 Isotropia do espaço e conservação do momento angular

A hipótese de isotropia do espaço significa que podemos fazer uma rotação arbitrária dosistema de referências sem que a Lagrangeana do sistema seja alterada. Sendo $\hat{\boldsymbol{z}}$ a direção do eixo de rotação, temos que os vetores posição sofrem, após a rotação, um deslocamento

$$\delta \boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}_i \delta\theta \,, \tag{9.21}$$

e também os vetores velocidade são modificados para

$$\delta \dot{r} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \dot{r}_i \theta \,. \tag{9.22}$$

Temos, novamente,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{ij} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}}\right) \dot{x}_{ij} + \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}} \ddot{x}_{ij} = 0 \,, \tag{9.23}$$

e usando as Equações de Lagrange, e também a definição de momento generalizado, segue que

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{ij}}\right) . \tag{9.24}$$

Então a variação δL fica

$$\delta L = \sum_{ij} \left[\frac{dp_{ij}}{dt} \delta r_{ij} + p_{ij} \frac{d}{dt}(\delta r_{ij})\right] , \tag{9.25}$$

que resulta, finalmente, em

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\sum_i \boldsymbol{p}_i . \delta \boldsymbol{r}_i) \,. \tag{9.26}$$

voltando à notação vetorial.

Agora note que

$$\boldsymbol{p} . \delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}_i . (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}_i \delta\theta) = \delta\theta \dot{\hat{\boldsymbol{z}}} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) \,, \tag{9.27}$$

e substituindo esta expressão naquela para δL, temos

$$\delta L = \delta\theta\hat{\boldsymbol{z}}.\frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i\right) = 0\,. \tag{9.28}$$

Podemos reconhecer que a expressão entre parênteses é o momento angular total do sistema, isto é,

$$\boldsymbol{l} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i\,. \tag{9.29}$$

Assim, sendo $\delta\theta\hat{\boldsymbol{z}}$ comletamente arbitrário, a igualdade acima só pode ser satisfeita se

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = 0\,, \tag{9.30}$$

e assim concluímos que da hipótese de isotropia do espaço resulta a conservação do momento angular.

9.4 Invariância por transformação de Galileu

A invariância dos sistemas físicos por transformação de Galileu é a mais antiga simetria fśica conhecida. De fato, toda a Mecânica foi construída com base na hipótese de que os sistemas físicos são independentes do estado de movimento do referencial inercial, isto é, não acelerado. Esta simetria é descrita pelas transformações

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r'}_i = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_o t \\ \boldsymbol{v}_i \to \boldsymbol{v'}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_o\,. \end{cases} \tag{9.31}$$

Aqui, $-\boldsymbol{v})o$ é a velocidade do referencial inercial R' em relação ao referencial R.

Para um sistema isolado, o potencial é dado pela interação entre as diversas partes do sistema, isto é,

$$V = \sum_{i,j<i} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\,. \tag{9.32}$$

Aqui estamos supondo que a energia potencial não dependa da velocidade e nem do tempo. Segue daqui que, após a transformação para o outro referencial inercial, teremos $V' = V$, já que as posições relativas permanecem inalteradas após essa transformação.

A energia cinética no referencial inicial é

$$T = \sum_i \frac{m}{2} \boldsymbol{v}_i^2 \,, \tag{9.33}$$

enquanto que no referencial R' teremos

$$T' = \sum_i \frac{m}{2} \boldsymbol{v}'^2_i = \sum_i \frac{m}{2} (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_o)^2 \,. \tag{9.34}$$

Expandindo o último termo segue que

$$T' = \sum_i \frac{m}{2} \boldsymbol{v}_i^2 + \sum_i \frac{m}{2} \left(\boldsymbol{v}_o{}^2 + 2\boldsymbol{v}_o.\boldsymbol{v}_i \right) \,. \tag{9.35}$$

Definindo a função

$$F = \sum_i \frac{m}{2} \left(\boldsymbol{v}_o{}^2 t + 2\boldsymbol{v}_o.\boldsymbol{r}_i \right) \,, \tag{9.36}$$

vemos que a energia cinética no referencial R' pode ser escrito como

$$T' = T + \frac{F}{dt} \,. \tag{9.37}$$

Assim, a nova Lafrangeana será

$$L' = T' - V' = T - V + \frac{dF}{dt} \,. \tag{9.38}$$

Com esse resultado, vemos que o princípio de Hamilton permanece inalterado, e consequentemente as equações de Lagrange ou de Hamilton, após essa transformação, já que a ação

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + \frac{dF}{dt}) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + (F(t_2) - F(t_1)) \,, \tag{9.39}$$

sendo o último termo acima uma constante fixada pelos instantes inicial e final no compto da ação, o que leva à invariância das equações de Lagrange e de Hamilton.

Vemos aqui um caso em que as Lagrangeanas, antes e depois da transformação, não permanece idêntica, isto é, $L \neq L'$, mas no entanto as equações de Lagrange ou de Hamilton permanecem inalteradas. Temos, mesmo assim, uma simetria dos sistemas físicos. A função F na equação (9.39) é chamada função de gauge, ou função de calibre.

9.5 Teorema de Noether

As relações entre simetrias e leis de conservação são um resultado bastante abstrato dos formalismos desenvolvidos até aqui. Foi descoberto de forma geral por Emmy Noether, no início do século XX e tem repercussão em todas as teorias físicas modernas, inclusive no âmbito da Mecânica Quântica. Veremos aqui, de forma simplificada, uma prova desse teorema.

As discussões anteriores sobre simetrias individuais nos mostra que, de forma geral, as simetrias relacionadas às coordenadas espaciais e às velocidades são determinadas por transformações do tipo

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r'}_i = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t) \\ \dot{r}_i \to \dot{r'}_i = \dot{r}_i + \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t)\,. \end{cases} \tag{9.40}$$

Aqui, então, consideramos que o tempo não sofre nenhuma alteração, embora aqui também tenhamos a simetria já discutida acima.

A variação da ação, então, é dada por

$$\delta L = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} \varepsilon_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \dot{\varepsilon}_j \right], \tag{9.41}$$

onde, por simplicidade, não foi indicada explicitamente a dependência de ε e $\dot{\varepsilon}$ na posição e no tempo.

Temos, das Equações de Lagrange, que

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \right), \tag{9.42}$$

então segue que

$$\delta L = \sum_{i,j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \right) \varepsilon_j + \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} \frac{d\varepsilon_j}{dt} \right]. \tag{9.43}$$

Para que a transformação seja uma simetria, vamos impor a condição, masi restritiva, de que δL=0. Então segue, da equação acima, que

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \right). \tag{9.44}$$

Vemos então que a grandeza

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \tag{9.45}$$

é uma grandeza conservada, e é conhecida por corrente de Noether.

O teorema demonstrado aqui mostra que para toda simetria do sistema físico corresponde uma lei de conservação. O Teorema de Noether tem aplicações muito gerais e tem importância muito grande inclusive na Mecânica Quântica e na Teoria de Campos. Simetrias mais gerais são abrangidas, mas fogem do escopo deste estudo.

Capítulo 10

Formalismo de Hamilton e Transformações Canônicas

Observe que, a partir das equações de Lagrange, sempre que uma coordenada não aparece explicitamente na Lagrangeana, aparecendo apenas a sua primeira derivada temporal, isto é, sempre que para uma determinada coordenada q_k tivermos

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,, \tag{10.1}$$

então segue que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0\,. \tag{10.2}$$

Então a grandeza

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,, \tag{10.3}$$

chamada momento generalizado, é uma grandeza conservada, ou seja, $\dot{p}_k = 0$. Neste caso, a coordenada q_k é chamada coordenada cíclica.

Pode ser interessante, então, descrever a evolução dinâmica do sistema em termos dos momentos generalizados. Sempre que houver uma coordenada cíclica, seu correspondente momento generalizado será constante. Para fazer isso partimos da Lagrangenana $L = L(q_1.\dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n)$, de onde temos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\dot{q}_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{10.4}$$

Por outro lado, das Equações de Lagrange temos

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\,, \tag{10.5}$$

então
$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\dot{q}_k}{dt}\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{10.6}$$
Observe que
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\dot{q}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right]\,, \tag{10.7}$$
então, usando a definição de momento generalizado e substituindo a equação acima na Equação (10.6), segue que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k p_k\dot{q}_k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{10.8}$$

A função Hamiltoniana é definida como

$$H = \sum_k p_k\dot{q}_k - L\,, \tag{10.9}$$

e portanto temos
$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{10.10}$$
Portanto, sempre que a Lagrangeana não depende explicitamente od tempo, a Hamiltoiana é uma grandeza conservada.

10.1 Função Hamiltoniana e Energia Mecânica

Considere o caso em que o potencial não depende das velocidades, e que a transofrmação das coordenadas originais para as coordenadas generalizadas não depende do tempo, isto é, $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Neste caso temos
$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0\,, \tag{10.11}$$
e então podemos escrever
$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,. \tag{10.12}$$

Com este resultado segue que a Hamiltoniana definida na equação (10.9) pode ser escrita como
$$H = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\,. \tag{10.13}$$

Também já vimos que quando a transformação para coordenadas generalizadas não depende do tempo explicitamente a energia cinética, T, é uma função quadratica homegênea das velocidades. Então

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T\,, \tag{10.14}$$

e assim segue que

$$H = 2T - L = T + V = E\,, \tag{10.15}$$

sendo E a energia mecânica do sistema. Como H é conservada, a energia mecânica, nas condições mencionadas acima, é uma constante do movimento.

10.1.1 Hamiltoniana como a transformada de Legendre da Lagrangeana

A transformação de Legendre permite transformar as bases em que uma função de uma ou mais variáveis é descrita. É um recurso matemático muito utilizado na Termodinâmica, quando se pode obter os diversos potenciais termodinâmicos através de sucessivas aplicações da transformada para diferentes conjuntos de variáveis.

Considere a função $f = f(x, y)$. Temos então que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{10.16}$$

é a variação infintesimal de f quando x e y sofrem as variações infinitesimais dx e dy, respectivamente. Definimos as funções u e v tais que

$$\begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial x} \\ v = \frac{\partial f}{\partial y}\,. \end{cases} \tag{10.17}$$

Agora considere a função $\phi = f - ux$. Temos então que

$$df = -udx - xdu\,. \tag{10.18}$$

Usando a expressão para df acima, obtemos que

$$d\phi = vdy - xdu\,, \tag{10.19}$$

de onde podemos concluir que $\phi = \phi(u, y)$. Ainda, como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,, \tag{10.20}$$

segue que

$$\begin{cases} x = -\frac{\partial \phi}{\partial u} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \,. \end{cases} \tag{10.21}$$

A função $\phi(u, y)$ é a tranformada de Legendre da função $f(x, y)$ na variável x.

Há uma interpretação geométrica muito simples para a Tranformada de Legendre. De fato, seja $z(x)$ a reta tangente à função f num ponto x. Temos

$$z(x) = ux + z_o \,, \tag{10.22}$$

sendo z_o o ponto em que a reta tangente intercepta o eixo vertical. Como a reta é tangente à curva de f no ponto x, $z(x) = f(x)$, então

$$z_o = f - ux \,, \tag{10.23}$$

que é exatamente a expressão para a transformada de Legendre da função f. Assim, dado o valor da derivada u, o valor de z_o é determinado como aquele por onde passa a reta com inclinaçao u que é tangente à função f. A função $z_o(u)$ é a transformada de Legendre da função $f(x)$.

A Transformada de Legendre pode ser generalizada para funções de qualquer número de variáveis. Nesse caso, se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, antão a função transformada fica devinida por

$$f'(u_1, \ldots, u_n) = \sum_k u_k x_k - f \,, \tag{10.24}$$

sendo

$$u_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \,. \tag{10.25}$$

Comparando-se com a expressão para a Hamiltoniana dada na equação (10.9), vemos que a Hamiltoniana é a Transformada de Legendre da função Lagrangeana.

10.2 Equações de Hamilton

Vamos ver agora que a Hamiltoniana permite obter um novo formalismo para obter as equações de movimento, chamado Formalismo de Hamilton. As equações resultantes são equivalentes àquelas obtidas seguindo o formalismo de Lagrange, embora o procedimento que veremos seja razoavelmente diferente. Conceitualmente, os dois formalismos são equivalentes entre si, e ambos equivalentes ao formalismo Newtoniano. É possível, também, obter o formalismo de Hamilton a partir do Princípio de Mínima Ação.

Agora vamos obter as Equação de Hamilton, que são a base do Fomralismo Hamiltoniano. Observe que enquanto $L = L(q, \dot{q}, t)$ depende das coordenadas e das velocidades, $H = H(p, q, t)$ depende dos momentos e das coordenadas. Então

$$\delta H = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \,. \tag{10.26}$$

Por outro lado temos

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \,, \tag{10.27}$$

e portanto

$$\delta H = \sum_k p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p - k - \delta L \,, \tag{10.28}$$

sendo

$$\delta L = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \,. \tag{10.29}$$

Substituindo a equação para δL na equação para δH e rearranjando os termos, segue que

$$\delta H = \sum_k \left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p + \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \,.. \tag{10.30}$$

Segue da definição de momento generalizado, equação (10.3), que o primeiro termo do lado direito da equação acima é nulo. Também segue da equação de Lagrange para a coordenada k que

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \,, \tag{10.31}$$

resultando então

$$\delta H = \dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k - \frac{\partial L}{\partial t} \,. \tag{10.32}$$

Comparando esta equação para δH com a equação (10.28) dada acima, resultam as igualdades

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases} \tag{10.33}$$

As equações acima são conhecidas como Equações de Hamilton, e descrevem totalmente a evolução do sistema, tendo uma aplicação semelhante às Equações de Lagrange.

10.2.1 Equações de Hamilton via método variacional

Assim como as Equações de Lagrange, também as Equações de Hamilton podem ser obtidas diretamente do Princípio de Mínima Ação, como veremos nesta seção. O Princípio de Hamilton afirma que a ação

$$S = \int_{t_1} t_2 L dt \tag{10.34}$$

é minimizada durante a evolução de um sistema dinâmico., isto é, o sistema evolui de modo que $\delta S = 0$. Como

$$L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k, t)\,, \tag{10.35}$$

segue que

$$\delta S = \int_{t_1} t_2 \delta \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(p, q, t) \right] = 0\,. \tag{10.36}$$

Escrevendo explicitamente a variação do termo entre colchetes obtemos

$$\delta S = \int_{t_1} t_2 \sum_k \left[\delta p_k \dot{q}_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right] dt\,. \tag{10.37}$$

Mas usando o fato que

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}(\delta q_k) \tag{10.38}$$

obtemos

$$\int_{t_1}^{t^2} p_k \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t^2} p_k \frac{d}{dt}(\delta q_k)\,. \tag{10.39}$$

Integração por partes do lado direito resulta em

$$\int_{t_1}^{t^2} p_k \frac{d}{dt}(\delta q_k) dt = [p_k \delta q_k]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t^2} \dot{p}_k \delta q_k dt\,. \tag{10.40}$$

O primeiro termo do lado direito é nulo, já que nos pontos iniciais da integração, no método variacional, são fixos, e então $\delta q_k = 0$ nesses pontos. Então obtemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[-\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt = 0\,. \tag{10.41}$$

Como δq_k e δp_k são independentes, a única forma de a segunda igualdade acima ser satisfeita é se

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \,. \end{cases} \tag{10.42}$$

As equações acima são exatamente as Equações de Hamilton já obtidas anteriormente.

10.3 Transformações Canônicas

No desenvolvimento feito a partir do Princípio de D'Alemebrt até a obtenção da Equações de Lagrange, as transformações entre coordenadas não envolviam os momentos, isto é, tínhamos os vetores posição escrito em função das novas coordenadas e do tempo, $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_n)$, para qualquer corpo i do sistema.

O formalismo de Hamilton, no entanto, nos mostra que a descrição do sistema físico é eita a partir de uma função analítica de dimensão $2n$, onde n é o npumero de graus de liberdade do sistema. Essa função determina uma hiper-superfície de dimensão $2n$ cujas coordenadas são as n coordenadas e os n momentos. Mas essas coodernadas são arbtrárias, e como para qualquer superfície, também aqui podemos fazer transformações na base do sistema que descreve a superfície. Essas transformações podem envolver não apenas as n coordenadas, mas também os n momentos.

Sejam (p, q) as coodernadas iniciais do sistema fśico descrito pela função de Hamilton $H(p, q, t)$. Podemos então transformar essas coordenadas para novas coordenadas, (P, Q), tais que

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(p, q, t) \\ P_i = P_i(p, q, t) \,. \end{cases} \tag{10.43}$$

Com isso, a Hamiltoniana se transforma para uma nova função, $K(P, Q, t)$, tal que

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \,, \end{cases} \tag{10.44}$$

garantindo que a nova descrição corresponda à evolução de um sistema dinâmico.

As transformações de coordenadas e momentos que mantém válidas as equações de Hamilton são chamadas transformações canônicas. Vimos que se as coordenadas satisfazem as Euações de Hamilton, então elas são tais que o Princípio de Hamilton permanece válido, então podemos dizer que a condição para que as coordenadas sejam canônicas é a de que satisfaçãm o princípio de mínima ação descoberto por Hamilton. Então devemos ter

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) \right] dt = 0 \,, \tag{10.45}$$

o que garante que as coordenadas (P, Q) satisfazem as Equações de Hamilton. Mas também as coordenadas iniciais devem ser canônicas, e portanto devem satisfazer um equação semelhante, isto é

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i H(p, q, t) \right] dt = 0 \,. \tag{10.46}$$

Para que a transformação seja canônica, as duas equações devem ser válidas simultaneamente. Para isso acontecer, basta que

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i H(p, q, t) + \frac{dF}{dt} \,, \tag{10.47}$$

pois neste caso, ao substituirmos na equação correspondente ao princípio de mínima ação teremos um termo que será

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(t_2) - F(t_1) \,, \tag{10.48}$$

sendo que $F(t_1)$ e $F(t_2)$ são duas constantes, já que os instantes t_1 e t_2 são fixados no processo de extremização do método variacional. Então

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = 0 \,, \tag{10.49}$$

e com isso as novas coordenadas (P, Q) serão canônicas se as coordenadas inciais, (p, q) também forem canônicas.

A função F é chamada função geratriz da transformação. Ela é uma função muito geral, e sua forma determinará o tipo de transformação que teremos. Mas para que sea uma transformação entre as coordenadas (p, q) e (P, Q), ela deve ter a forma geral $F = F(p, q, P, Q, t)$. Porém, como as equações de Hamilton terão de ser satisfeitas, e como elas relacionam dois dos conjuntos de variáveis entre si, isto é, relaciona P_i a Q_i e p_i a q_i, então a forma da função geratriz pode ser reduzida a 4 casos específicos: $F_1 = F_1(q, Q, t)$, $F_2 = F_2(q, P, t)$, $F_2 = F_3(p, Q, t)$ e $F_4 = F_4(p, P, t)$. A seguir estudaremos como a transformação se dá em cada caso.

10.3.1 Caso I: $F_1 = F_1(q, Q, t)$

Neste caso as variáveis independentes são as coordenadas iniciais, q, e as coordenadas finais, Q. Então temos,

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) + \frac{dF_1}{dt}\,, \tag{10.50}$$

com

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{10.51}$$

Substituindo esta expressão para dF/dt na equação da transformação obtemos

$$\sum_i \left(P_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i - K(P, Q, t) = \sum_i \left(p_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - H(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{10.52}$$

Como as variáveis q e Q são independentes neste caso, a única forma de a equação ser satisfeita para quaisquer valores de $\dot{q}_i$ e $\dot{Q}_i$ é se os termos entre colchetesse anularem, isto é

$$\begin{cases} p_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,. \end{cases} \tag{10.53}$$

Então resulta que

$$K(P, Q, t) = H(q, p, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{10.54}$$

Observe que se a a função geratriz da tranformação canônica não depende do tempo, então a Hamiltoniana final é igual à Hamiltoniana inicial, porém expressa em termos das novas coordenadas.

10.3.2 Caso II: $F_2 = F_2(q, P, t)$

Neste caso temos como variáveis independentes as coordenadas iniciais, q, e os momentos finais, P. Teremos então

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) + \frac{dF_2}{dt}\,, \tag{10.55}$$

com

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{10.56}$$

Substituindo esta expressão para dF/dt na equação da transformação obtemos

$$\sum_i \left(P_i\dot{Q}_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i \right) - K(P,Q,t) = \sum_i \left(p_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - H(p,q,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \,. \tag{10.57}$$

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, temos que

$$p_i = -\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \,. \tag{10.58}$$

Por outro lado, se escolhermos

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \tag{10.59}$$

teremos

$$P_i\dot{Q}_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i = P_i\dot{Q}_i + Q_i\dot{P}_i = \frac{d}{dt}(P_iQ_i) \,. \tag{10.60}$$

Substituindo este resultado na equação para o princípio de mínima ação, resulta que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i P_iQ_i \right) - K(P,Q,t) = -H(p,q,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \,, \tag{10.61}$$

e portanto a nova Hamiltoniana será

$$K(P,Q,t) = H(p,q,t) - \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i P_iQ_i \right) \,. \tag{10.62}$$

Vamos mostrar que existe uma função G tal que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i P_iQ_i \right) \,. \tag{10.63}$$

Inicialmente, note que

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{dF_2}{dt} - \sum_i \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i \right] \,, \tag{10.64}$$

e portanto, substituíndo esta expressão an equação para G segue

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dF_2}{dt} - \sum_i \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i \right] + \frac{d}{dt}\left(\sum_i P_iQ_i \right) \,. \tag{10.65}$$

Expandindo o último termo e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dF_2}{dt} - \sum_i \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q_i \right) \dot{P}_i - P_i \dot{Q}_i \right] , \tag{10.66}$$

e usando as equações (10.58) e (10.59), resulta que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dF_2}{dt} - \sum_i \left[p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i \right] , \tag{10.67}$$

Se $G = G(q, Q)$ e

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dF_2}{dt} , \tag{10.68}$$

então teremos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dG}{dt} - \sum_i \left[p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i \right] , \tag{10.69}$$

e esta iguadade vai ser satisfeita sempre que a função G for tal que

$$\begin{cases} p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \\ P_i = \frac{\partial G}{\partial Q_i} . \end{cases} \tag{10.70}$$

Mas as relações acima são exatamente aquelas obtidas para $F_1(q, Q)$ acima, portanto $G = F_1(q, Q)$.

Assim, com esta transformação, as seguintes relações são obtidas:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial P i} \\ K(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \end{cases} \tag{10.71}$$

10.3.3 Caso III: $F_3 = F_3(p, Q, t)$

Este caso é parecido com o caso anterior. Seguindo o mesmo procedimento teremos

$$\frac{dF_3}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} . \tag{10.72}$$

Usando o princípio de mínima ação, obtemos a equação

$$\sum_i \left(P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\dot{P}_i \right) - K(P, Q, t) = \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) - H(p, q, t) - \frac{\partial F_3}{\partial t} . \tag{10.73}$$

Aqui impomos as relações

$$\begin{cases} q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \,. \end{cases} \tag{10.74}$$

Com isso, pode-se mostrar que

$$K = H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{10.75}$$

após mostrar que F_3 é uma transformação de Legendre de $F_1(q, Q, t)$.

10.3.4 Caso IV: $F_4 = F_4(p, P, t)$

Finalmente, para o quarto caso temos,

$$\frac{dF_4}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t} \,. \tag{10.76}$$

Substituindo este termo na equação para o princípio de mínima ação, obtemos a relação

$$\sum_i \left(p_i\dot{q}_i + \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) - H + \frac{\partial F_4}{\partial t} = \sum_i \left(P_i\dot{Q}_i + \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i \right) - K \tag{10.77}$$

Escolhendo

$$\begin{cases} q_i = \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i} \,. \end{cases} \tag{10.78}$$

Segue que

$$K = H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{10.79}$$

após mostrar que F_4 é uma transformação de Legendre de $F_1(q, Q, t)$.

10.4 Parênteses de Poisson

10.5 Transformação de contato infinitesimal

Obviamente a transformação identidade, que transforma os momentos e as coordenadas iniciais nos mesmos momentos e coordenadas, é também uma transformação canônica. Vamos mostrar aqui que a função geratriz que leva a essa trasnformação é

$$F_2(q,P) = \sum_i q_i P_i \,. \tag{10.80}$$

De fato, usando as relações obtidas anteriormente, temos que as novas coordenadas e os antigos momentos são dados, respectivamente, por

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \,, \tag{10.81}$$

e

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \,. \tag{10.82}$$

Com isso vemos que a tranformação gerada pela função F_2 dada acima é $(q,p) \to (Q,P)$.

Com isso podemos definir uma transformação canônica infinitesimal por

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G_2(q,P) \,, \tag{10.83}$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal. De fato, a partir dessa função geratriz temos

$$\begin{cases} Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \\ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \\ H = K \,. \end{cases} \tag{10.84}$$

Daqui segue que

$$\begin{cases} \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \\ \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \,. \end{cases} \tag{10.85}$$

10.6 Parenteses de Poisson

Considere agora uma função quanlquer de $F = F(p,q)$. Temos que

$$\delta F = \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_i \right] \,, \tag{10.86}$$

e, como visto na seção anterior, podemos representar δq_i e δp_i podem ser representados através de uma transformação canônica infinitesimal, isto é,

$$\begin{cases} \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \\ \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \,. \end{cases} \tag{10.87}$$

Substituindo essas equações na expressão para δF, segue que

$$\delta F = \varepsilon \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G_2}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \right] . \tag{10.88}$$

Chamamos Parênteses de Poisson, indicado por $[F, G]_{p,q}$, ao termo

$$[F, G]_{p,q} = \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G_2}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \right] . \tag{10.89}$$

Os parênteses de Poisson apresentam várias propriedades interessantes, como veremos a seguir. eles são importantes não só na Mecânica Clássica, mas também na Mecânica Quântica.

Um caso especial, que ilustra o significado e a importância dos parênteses de Poisson, é aquele em que ele está relacionado à derivada temporal da função. De fato, neste caso temos

$$\frac{dF}{dt} = \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial F}{\partial t} , \tag{10.90}$$

e como

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \end{cases} \tag{10.91}$$

segue, após subistituírmos essas igualdades na equação para dF/dt, que

$$\frac{dF}{dt} = [F, H]_{p,q} + \frac{\partial F}{\partial t} . \tag{10.92}$$

Daqui seguem diretamente alguns casos de interesse:

$$\begin{cases} F = q_k \to \dot{q}_k = [q_k, H] \\ F = p_k \to \dot{p}_k = [p_k, H] \\ F = H \to \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} . \end{cases} \tag{10.93}$$

As equações acima representam as equações de movimento de Hamilton escritas em termos dos parênteses de Poisson.

10.7 Interpretação geométrica

Vamos considerar o caso em que as funções F e G são coordenadas e momentos obtidos a partir das coordenadas (p, q) por meio de uma tranformação canônica. Por exemplo, podemos ter $F = Q_j(p,q)$ e $G = Q_k(p,q)$, obtidos a partir de uma transformação $F_1(q,Q)$ e neste caso os parênteses de Poisson resultam em

$$[Q_j, Q_k]_{p,q} = \sum_k \left[\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right] . \tag{10.94}$$

Mas, com as regras de transformações canônicas para este caso, temos

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial T}{\partial P_k}\right) , \tag{10.95}$$

onde $T(q,Q)$ é a função geratriz da transformação. Daqui segue que

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) , \tag{10.96}$$

e usando novamente as regras de trasnformação para este caso, obtemos

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial P_k} . \tag{10.97}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial T}{\partial P_k}\right) , \tag{10.98}$$

e usando também as regras de transformção, segue que

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) , \tag{10.99}$$

e finalmente

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial P_k} . \tag{10.100}$$

Substituindo estes resultados na expressão para os parênteses de Poisson, obtemos

$$[Q_j, Q_k]_{p,q} = -\sum_k \left[\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right] . \tag{10.101}$$

Porém, a somatória no lado esquerdo pode ser identificado por

$$\frac{dQ_j}{dP_k} = \sum_k \left[\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right] , \tag{10.102}$$

e como as coordenadas P e Q são independentes entre si essa derivada é nula. Obtemos, então, que

$$[Q_j, Q_k]_{p,q} = 0 . \tag{10.103}$$

Resultado semelhante é obtido para $[P_j, P_k]_{p,q}$. De fato, sendo

$$[P_j, P_k]_{p,q} = \sum_k \left[\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right], \qquad (10.104)$$

e usando as relações relevantes para este caso, que seguem da transformação canônica e que são

$$\begin{cases} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} \\ \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}, \end{cases} \qquad (10.105)$$

obtemos

$$[P_j, P_k]_{p,q} = \frac{dP_j}{dQ_k} = 0. \qquad (10.106)$$

Finalmente, podemos avaliar os parênteses de Poisson $[P_j, Q_k]_{p,q}$, seguindo o mesmo raciocínio usado nas expressões anteriores. Temos

$$[P_j, Q_k]_{p,q} = \sum_k \left[\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right], \qquad (10.107)$$

que, usando as relações de transformação canônica, resulta em

$$[P_j, Q_k]_{p,q} = -\sum_k \left[\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} + \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \right], \qquad (10.108)$$

que resulta em

$$[P_j, Q_k]_{p,q} = -\frac{dP_j}{P_k} = -\delta_{jk}. \qquad (10.109)$$

Aqui podemos dar uma interpretação geométrica para os parênteses de Poisson. De fato, num caso geral, se num conjunto de coordenadas uma superfície tem uma superfície determinada pelo vertor $d\boldsymbol{a} = \Delta u \Delta v \hat{w}$, então com as transformações para novas coordenadas,

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(uv) \end{cases} \qquad (10.110)$$

a área desse elemento de superfície será dada por

$$d\boldsymbol{a}' = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v, \qquad (10.111)$$

sendo o termo entre colchetes chamado Jacobiano da transformação. Quando o Jacobiano é unitário, a transformação preserva a área.

Daqui vemos que as transformações canôicas preserva, a área da superfície formada pelos versores na direções da coordenada e de seu momento conjugado.

10.8 Formalismo de Hamilton-Jacobi, e variáveis ação-ângulo

As transformações canônicas nos permitem transformar momentos e coordenadas generalizadas de modo amplo, e portanto constituem uma formidável ferramenta para solução de problemas mais complexos. A seguir estudaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi, que permite descrever todo o sistema físico a partir de suas constantes de movimento. Para isso, vamos introduzir uma nova função que é baseada no conceito de ação, introduzido por Hamilton, mas generalizando esse conceito para criar a ação como função das coordenadas. Veremos que essa função apresenta propriedades muito interessantes.

10.8.1 Ação como função das coordenadas

O Princípio de Hamilton estabelece que todo sistema físico evolui de modo a minimizar a ação, S, que é definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \,. \tag{10.112}$$

Ao aplicarmos esse princípio, sempre temos a integral calculada entre dois pontos fixos no espaço de fase, com o sistema partindo de um ponto A no instante t_1 e chegando no ponto B no instante t_2. Vamos agora generalizar esse conceito, calculando a ação para o caso em que o sistema evolua a partir do ponto A no instante t_1 para diferentes pontos no instante t_2, como mostra a figura ?.

Nesse caso, a ação para cada um dos casos não é mais a mesma, mas ainda assim é o valor mínimo para cada trajetória entre o ponto inicial A e os pontos finais B_i, satisfazendo o Princípio de Hamilton, de forma que a ação agora depende do ponto final da trajetória, ou seja, $S = S(q)$. A variação da ação quando mudamos o ponto final da trajetória é dada por

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] dt \,. \tag{10.113}$$

Como anteriorment já fizemos, temos

$$d\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \,, \tag{10.114}$$

e também podemos escrever

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i \,. \tag{10.115}$$

Substituíndo este resultado na equação para δS, obtemos

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dq_i dt + \sum_i \int_{t_1}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right) dt\,. \quad (10.116)$$

O último termo do lado direito desta equação pode ser trivialmente feita, resultando

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dq_i dt + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right) |_{t_1}^{t}\,. \quad (10.117)$$

Esta última equação já foi obtida antes, quando estudamos a derivação das Equações de Lagrange a partir do Princípio de Hamilton. Lá, porém, os extremos eram fixos, o que nos permitia concluir que o últio termo do lado direito da equação acima deveria se anular, e obrigando a variação δS a se anular, a fim de termos o extremo da ação, chegávamos às Equações de Lagrange. Aqui a situação é diferente, pois o extremos não é fixo. De fato, dq aqui se refere justamente à variação da posição do ponto final, e assim o último termo do lado direito não deve ser nulo. Por outro lado, quando mudamos a posição final da trajetoria percorrida no espaço de fase, assumimos que o sistema evolui satisfazendo o Princípio de Hamilton, e portanto o primeiro termo ao lado direito da equação deve ser nulo, isto é

$$\sum_i \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dq_i dt = 0 \quad (10.118)$$

e restamos com

$$\delta S = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i \right) |_{t_1}^{t}\,. \quad (10.119)$$

Por outro lado, como $S = S(q)$, temos

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i\,, \quad (10.120)$$

e comparando as duas equações acia resulta que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,. \quad (10.121)$$

Do formalismo de Hamilton temos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i\,, \quad (10.122)$$

e portanto obtemos que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i\,. \tag{10.123}$$

Até agora estamos supondo que o instante de tempo final, t, é fixo. Podemos dexar esse tempo variável, de forma que S depende de q e t, ouseja, $S = S(q,t)$. Neste caso temos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}\,, \tag{10.124}$$

e usando a relação entre S e p_i obtemos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{10.125}$$

Da definição de S temos que

$$\frac{dS}{dt} = L\,, \tag{10.126}$$

então segue que

$$L - \sum_i p_i d\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{10.127}$$

Mas o lado direito, de acordo com a definição de função Hamiltoniana, é $-H$, então concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\,. \tag{10.128}$$

As equações 10.123 e 10.128 são semelhantes às equações obtidas para a função geratriz do tipo 2, F_2, quando estudamos transformações canônicas. Veremos a seguir que, de fato, S pode ser interpretada como uma função geratriz com propriedades muito interessantes.

10.8.2 Uma função geratriz particular

Vamos determinar uma função geratriz do tipo $F_2 = F_2(q,P,t)$ tal que a Hamiltoniana obtida ao final da transformação seja nula, isto é, queremos que

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0\,. \tag{10.129}$$

Daqui já segue que

$$H = -\frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{10.130}$$

As coordenadas e momentos após a tranformação, (Q, P), são tais que

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0\,, \end{cases} \tag{10.131}$$

já que a Hamitoniana $K = 0$. Daqui segue que

$$\begin{cases} Q_i = \beta_i \\ P_i = \alpha_i\,, \end{cases} \tag{10.132}$$

com α_i e β_i constantes.

Da equação 10.129, que é uma das equações que seguem das regras de transformações canônicas, temos

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,, \tag{10.133}$$

e usando outra regra de transformação, temos

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{10.134}$$

Assim podemos escrever

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0\,. \tag{10.135}$$

Por outro lado, como $F_2 = F_2(q, P, t)$, temos

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i\right] + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,, \tag{10.136}$$

e como $P_i = \alpha_i$ é constant, segue que $\dot{P}_i = 0$. Asim obtemos

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i\right] + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,, \tag{10.137}$$

e usando 10.134, temos

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i p_i\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,. \tag{10.138}$$

Porém, suando a equação 10.130, obtemos finalmente que

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i p_i\dot{q}_i - H\,. \tag{10.139}$$

O lado direito da equação acima é exatamente a função lagrangeana, L. Portanto

$$\frac{dF_2}{dt} = L\,, \tag{10.140}$$

ou

$$F_2 = \int L dt\,, \tag{10.141}$$

que é a definição da função ação que introduzimos na seção anterior, ou seja, $F_2(q,P) = S(q,t)$. Assim, vemos que a função ação é uma função geratriz que leva a uma Hamiltoniana identicamente nula, onde os momentos e as coordenadas finais são constantes.

A equação que dá a transformação da função Hamiltoniana quando se usa a ação como geratriz, equação 10.130, fica, então

$$H\left(q_1,\ldots,q_n,\partial S/\partial q_1,\ldots \partial S/\partial q_n,t\right) + \partial S/\partial t = 0\,, \tag{10.142}$$

e esta é conhecida como Equação de Hamilton-Jacobi.

10.8.3 Relação entre Mecânica Clássica e Ótica Geométrica

Já na primeira metade do século XIX Hamilton havia notado uma relação entre a Mecânica Clássica e a Ondulatória, mais precisamente no caso da aproximação geométrica da ótica. Nesta seção vamos estudar essa semelhança e verificar como ela pode nos levar a equações típicas da Mecânica Quântica.

Vamos considerar uma Hamiltoniana independente do tempo. Neste caso a Equação de Hamilton-Jacobi pode ser separada em uma parte dependente das coordenadas e outra dependente do tempo, isto é

$$H\left(q_1,\ldots,q_n,\partial S/\partial q_1,\ldots \partial S/\partial q_n\right) = -\partial S/\partial t\,, \tag{10.143}$$

e a igualdade é satisfeita apenas se cada um dos lados for igual a uma constante, α_o.

Neste caso, a solução da equação de Hamilton-Jacobi pode ser escrita na forma

$$S(q,t) = W(q) + T(t)\,, \tag{10.144}$$

e portanto obtemos as duas equações

$$\left\{\begin{array}{l} H\left(q_1,\ldots,q_n,\partial W/\partial q_1,\ldots \partial W/\partial q_n\right) = \alpha_o \\ \partial S/\partial t = -\alpha_o\,. \end{array}\right. \tag{10.145}$$

Já vimos que, quando a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela pode ser igualada à energia mecânica, E, portanto podemos fazer $\alpha_o = E$. Da parte temporal resulta facilmente que

$$T(t) = -Et + T_o\,, \tag{10.146}$$

onde T_o é uma constante. Da parte das coordenadas, temos

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \partial W/\partial q_1, \ldots \partial W/\partial q_n\right) = E\,. \tag{10.147}$$

A função W é chamada função característica de Hamilton, e depende apenas das coordenadas.

É óbvio que, para um instante de tempo fixo, S depende apenas de W. Podemos desenhar as linhas de nível de S num dado instante no espaço das coordenadas. Se n é o npumero de graus de liberdade do sistema, teremos hiper-superfícies de dimensão $n-1$, em cujos pontos S tem o mesmo valor. Esta hipersuperfçie corresponde à hipersuperfície W_o no espaço de coordenadas. Mas S depende tambpem do tempo, então após um intervalo de tempo Δt, a ação correspondente a cada um dos pontos passa a ser $S = W_o - E\,\Delta t$. Então essa novo valor de S corresponde a uma nova hipersuperfície, W_1, no espaço de coordenadas, como mostrado na figura ???.

Se usarmos coordenadas cartesianas, teremos

$$\left\{\begin{array}{l} p_x = \partial S/\partial x = \partial W/\partial x \\ p_y = \partial S/\partial y = \partial W/\partial y \\ p_z = \partial S/\partial z = \partial W/\partial z\,, \end{array}\right. \tag{10.148}$$

portanto

$$\mathbf{p} = \nabla W\,. \tag{10.149}$$

O gradiente de uma função é sempre perpendicular às linhas de superfçie, portanto o momento do sistema é perperndicular às linhas equipotenciais de $W(q)$. A variação de W, quando permitimos que o sistema se desloque de uma distância Δs, é

$$\Delta W = |\nabla W| \Delta s\,. \tag{10.150}$$

Num intervalo de tempo infinitesimal, dt, teremos uma variação da função W dada por

$$dS = -Edt\,, \tag{10.151}$$

portanto a superfície que no instante $t + dt$ tem o mesmo valor W_o é tal que

$$W(q) = W_o(q) + Edt\,, \tag{10.152}$$

de tal forma que $S(q, t + dt) = W(q) - Edt = W_o$.

Essa variação corresponde a um deslocamento da superfície W de uma distância ds tal que

$$dW = |\nabla W| ds\,. \tag{10.153}$$

Note que dW deve ser igual nos dois casos. A taxa com que a superfície W avança no espaço de coordenadas é

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{E}{|\frac{\nabla}{W}|}\,. \tag{10.154}$$

Claramente $u = ds/dt$ tem dimensões de velocidade, e representa a velocidade com que se desloca a hipersuperfçie de S que tem, em cada instante t, o mesmo valor W_o. Se entendermos o deslocamento dessa superfície como o deslocamento de uma frente de onda no espaço, a velocidade u pode ser entendida como a velocidade de grupo.

Vamos investigar a correspondência entre propagação de uma onda e o sistema mecânico um pouco mais profundamente. Notemos que o deslocamentoda superfçie em cada ponto se dá sempre perpendicularmente à superfçie, já que a variação é dada pelo gradiente de W. Se a superfície é um plano, sua propagação é sempre perpendicular à própria superfície, como ocorre para uma onda plana. A equação de uma onda plana é

$$\nabla^2\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2\phi}{dt^2}\,, \tag{10.155}$$

onde ϕ é a função de onda plana, n é o índice de refração do meio e c é a velocidade da luz, no caso de a onda ser uma onda eletromagnética. A função de onda plana é

$$\phi = \phi_o exp[i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)]\,, \tag{10.156}$$

onde

$$|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda\,, \tag{10.157}$$

com λ sendo o comprimento de onda, e n é o índice de refração, de modo que

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}\,. \tag{10.158}$$

Definindo $k_o = \omega/c$, podemos escrever

$$\phi = \phi_o exp[ik_o(nz - ct)]\,. \tag{10.159}$$

Num meio homegêneo, n é constante. Há um caso mais interessante, no entanto, em que n varia suavemente com a posição, de modo que numa distância da ordem do comprimento de onda, λ, a variação de n é pequena, isto é, $\Delta n/n << 1$. Esta é a aproximação utilizada na ótica geométrica, e por isso a conecção que estamos estabelecendo é entre a mecânica clássica e a ótica geométrica. Nesse caso, podemos incluir a variação de n introduzindo as funções reais $A(\mathbf{r})$ e $L(\mathbf{r})$ de modo que

$$\phi = \phi_o exp[iA(\mathbf{r})k_o(L(\mathbf{r}) - ct)] \, . \tag{10.160}$$

A equação acima deve satisfazer a equação de onda no meio não homogêneo, onde $n = n(\mathbf{r})$. Temos

$$\begin{cases} \nabla\phi = \phi\nabla(A + ik_oL) \\ \nabla^2\phi = \phi\left\{\nabla^2(A + ik_oL) + [\nabla(A + ik_oL)]^2\right\} \, , \end{cases} \tag{10.161}$$

de modo que a equação de onda fica

$$ik_o\phi[2\nabla A.\nabla L + \nabla^2 L] + [\nabla^2 A + (\nabla A)^2 - k_o^2(\nabla L)^2 + n^2k_o^2] = 0 \, . \tag{10.162}$$

A igualdade só é satisfeita para qualquer posição se

$$\begin{cases} \nabla^2 A + (\nabla A)^2 - k_o^2(n^2 + \nabla L) = 0 \\ 2\nabla A.\nabla L + \nabla^2 L = 0 \, . \end{cases} \tag{10.163}$$

Como estamos supondo que a variação do índice de refração é pequena no intervalo da ordem do comprimento de onda, a variação da funçao de onda deve ser pequena, e portanto também a variação dos campos A e L, para distâncias dessa ordem. Isso significa que podemos utilizar a chamada aproximação eikonal, em que $k_o^2 = 4\pi^2/\lambda^2$ é grande comparado com as variações dos campos. Com isso podemos considerar que ∇A e $nablaL$ são pequenos comparados com k_o^2, e as equações acima resultam na condição

$$(\nabla L)^2 = n^2 \, , \tag{10.164}$$

que é conhecida como equação eikonal na ótica geométrica.

Com base nisso, vamos agora retornar ao caso da mecânica clássica e suas semelhanças com a ótica geomética. Vimos que

$$\nabla W = \mathbf{p} \, , \tag{10.165}$$

portanto

$$(\nabla W)^2 = p^2 = 2m[E - V(\mathbf{r})] \, , \tag{10.166}$$

que é uma equação semelhante à equação eikonal da ótica. A função principal de Hamilton, W, tem papel semelhante à função L da ótica geométrica. Variações do potencial, $V(\mathbf{r})$, correspondem, na ótica, a variações do índice de refração. O sistema mecânico sofre desvios na sua propagação devido à presença de potenciais da mesma forma como a luz se desvia ao se propagar por um meio heterogêneo. Assim, fica claro o significado do Princípio de Fermat na ótica, e sua semelhança com o Princípio de Hamilton da mecânica. Vemos que o Princípio de Mpinima Ação da mecânica é equivalente ao Princípio de Huygens da ondulatória.

Conexão com a Mecânica Quântica

Da equação de onda temos

$$k_o(L - ct) = 2\pi(L/\lambda - \nu t)\,. \tag{10.167}$$

Vamos escrever

$$\nu = E/h\,, \tag{10.168}$$

sendo h uma constante. A análise dimensional mostra que h tem unidade de ação. Temos

$$\lambda = \frac{u}{\nu}\,, \tag{10.169}$$

e como vimos no caso mecânico,

$$u = E/p\,, \tag{10.170}$$

então obtemos

$$\lambda = h/p\,. \tag{10.171}$$

Observe que esta é a mesma relação utilizada por De Broglie para estabelecer a igualdade entre partícula e onda na mecância quântica.

Utilizando a igualdade $W = L$ discutida acima, resulta que

$$2\pi(L/\lambda - \nu t) = \frac{2\pi}{\lambda_o h}(W - Et)\,. \tag{10.172}$$

A função de onda pode ser escrita na forma

$$\phi(\mathbf{r}), t) = \phi_o(\mathbf{r})e^{-iEt/h}\,, \tag{10.173}$$

portando a equação de onda resulta

$$\nabla^2\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2\phi}{dt^2} = \nabla^2\phi_o - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\phi = 0\,. \tag{10.174}$$

Usando as relações acima, ontemos

$$\nabla^2\phi_o - \frac{4\pi^2}{h^2}p^2\phi = 0\,, \tag{10.175}$$

ou ainda

$$\nabla^2\phi_o - \frac{8\pi^2 m}{h^2}[(E - V(\mathbf{r})]\phi = 0\,, \tag{10.176}$$

que é semelhante à equação de Schroedinger da mecânica quântica.

Discussão sobre se Hamilton estava a um passo da MQ

10.8.4 Variáveis ação-ângulo

10.9 Exercícios

1. Obtenha a solução do oscilador harmônico simples pelo método de Hamilton-Jacobi.

Capítulo 11

Teoria da Relatividade Restrita

11.1 Invariância de Galileu

Um dos aspectos fundamentais da Mecânica Clássica é sua invariância sob mudanças entre referências que se movem com velocidades relativas constantes. Estes referenciais são ditos "inerciais", e dado um referencial inercial R, e um outro referencial R' que se move com velocidade $\vec{V}$ em relação ao primeiro, e um ponto material cujo vetor posição é $\vec{r'}$ no referencial R' e $\vec{r}$ no referencial R, temos a relação $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$ onde $\vec{R}$ é o vetor posição de R' em R. Estes vetores podem ser dependentes do tempo, e derivando obtemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{V'} + \vec{v'}} \tag{11.1}$$

onde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é a velocidade do ponto material no referencial R, $\vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}$ é a velocidade do mesmo ponto no referencial R', e $\vec{V'} = \frac{d\vec{R'}}{dt}$ é a velocidade com que R' se move quando observado do referencial R.

A equação (11.1) é a lei de adição de velocidades de galileu, e a transformação de $R \Rightarrow R'$ é chamada transformação de Galileu. Sendo R e R' referenciais inerciais, por definição devemos ter $\vec{V}$ constante, porém $\vec{v'}$ e $\vec{v}$ podem variar com o tempo t. Derivando a equação (11.1) em relação ao tempo obtemos

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V'}}{dt} + \frac{d\vec{v'}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a'}} \tag{11.2}$$

sendo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ a aceleração do ponto material no referencial R e $\vec{a'} = \frac{d\vec{v'}}{dt}$ a aceleração do mesmo ponto no referencial R'.

Um observador parado em R associa, através da 2ª Lei de Newton, a aceleração $\vec{a}$ a uma força $\vec{F} = m\ \vec{a}$, enquanto um observador parado em

R' associa a uma força $\vec{F'} = m\ \vec{a'}$. Usando o resultado (11.2) e supondo que a massa do ponto material seja invariante na mudança de referencial, concluímos que $\vec{F'} = \vec{F}$, ou seja, a força resultante sobre o ponto material é invariante na transformação de Galileu.

Este é um resultado fundamental, já que toda a conexão entre Dinâmica e Cinemática, na Mecânica Clássica, se dá através da conexão entre força e aceleração que aparece com a grandeza fundamental.

Os problemas começaram a aparecer com o Eletromagnetismo, no qual surge uma lei em que a principal grandeza cinemática não é a aceleração, maas a velocidade. essa lei é a Equação da Onda Eletromagnética, obtida por Maxwell. Essa equação nos dá a velocidade da luz no meio, e é independente do referencial. Como não é a aceleração que aparece na lei, ela gera problemas para a Mecânica Clássica.

A forma de se contornar esse problema foi assumir que a velocidade da luz que aparece na eq. de onda é a da propagação em um meio, que passou a ser chamado de éter, e portanto é a velocidade para um observador parado em relação ao meio.Como a luz se propaga por todo o espaço, o éter deve ser um meio que permeia todoas os objetos no universo.

Várias teorias foram propostas descrevendo as propriedades do éter, e vários experimentos foram realizados para detectá-lo, todos, no entanto, sem sucesso. O mais famoso desses experimentos foi o de Michelson e Morley.

11.1.1 Teoria da Relatividade Restrita

É possível recuperar a invariância dos sistemas físicos para mudança de referenciais inerciais, mas para isso temos que propor uma modificação significativa nos conceitos de espaço e tempo. Para compreendermos melhor essas modificações, vamos analisar o conceito de simultaneidade entre dois eventos físicos, já que este está intimamente relacionado ao conceito de tempo.

Simultaneidade

Um observador diz que dois eventos são simultâneos se eles ocorrem num mesmo instante de tempo, t, medido em seu relógio. Digamos que Alice encontra-se exatamente no ponto médio entre Beto e Carlos, separados entre si de uma distância *2l*, e que ambos disparam os flashes de suas máquinas fotográficas. Para Alice, os flashes são simultâneos se a luz das duas máquinas chegam em sua posição ao mesmo tempo.

Enquanto Alice afirma que os flashes são simultâneos, Beto diz que disparou o seu flash antes de ver o flash disparado por Carlos. Já Carlos alega o oposto, que disparou seu flash antes daquele de Beto. Todas as afirmações são corretas quando levamos em conta que a velocidade da luz é finita, e portanto, gasta um tempo finito para percorrer as distâncias entre os três observadores.

Vemos assim, que a velocidade finita da luz nos leva a concluir que a simultaneidade entre dois eventos é um conceito relativo, isto é, depende do referencial em que os eventos são observados.

Vamos agora supor que um ponto observador, Daniel, ocupava a mesma posição de Alice no instante em que os flashes foram disparados por Beto e Carlos, porém se deslocava em relação a Alice, indo em direção a Carlos. Algum tempo depois de ter passado por Alice, Daniel terá visto os dois flashes, mas eles não serão simultâneos para Daniel. Para este, o flash disparado por Carlos chegará antes daquele de Beto. Portanto, a simultaneidade depende não apenas de posição dos observadores, mas também do seu estado de movimento relativo.

Teoria da Relatividade Restrita

Considere dois observadores, Alice e Beto, parados num referencial *R'* que se move em relação ao referencial *R*, onde outro observador, Carlos, encontra-se parado. Suponha ainda que Carlos está na origem de *R*, que Alice está na origem de *R'*, e que Beto esta na posição *x'* de *R'*

Alice e Beto querem sincronizar seus relógios, e para isso usam o seguinte método: no instante $t_A'^{(0)}$, Alice envia um sinal luminoso em direção a Beto, que assim que o recebe, envia de volta um sinal luminoso para Alice. Para ambos a luz se desloca com velocidade c no percurso de ida e volta, e portanto podem sincronizar os seus relógios de modo que

$$t_B' = \frac{t_A'^{(0)} + t_A'^{(1)}}{2}$$

onde $t_A'^{(1)}$ é o instante em que Alice recebe o sinal luminoso enviado por Beto, e t_B' é o instante em que Beto recebeu o sinal de Alice. Dessa forma Alice pode sincronizar seu relógio ao de Beto.

Do ponto de vista de Carlos, no entanto, esse procedimento não deixa os relógios sincronizados, e a defasagem depende da posição em que Beto se encontra. Realmente, do ponto de vista de Carlos, Alice acertou seu relógio num tempo $\tau(t, x')$, tal que

$$\tau(t_B, x') = \frac{1}{2}\left[\tau\left(t_A^{(1)}, 0\right) - \tau\left(t_A^{(1)}, 0\right)\right],$$

mas se $t_A^{(0)} = 0$, $t_B = \frac{x'}{c-v}$ e $t_A^{(1)} = \frac{x'}{c+v} + \frac{x'}{c-v} = \frac{2c}{c^2-v2}\, x'$.

$$\tau\left(\frac{x'}{c-v}, x'\right) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(\frac{2c}{c^2-v^2}\, x', 0\right) - \tau(0,0)\right] \tag{11.3}$$

Fazendo $x' = d\ x'$ e $\tau(0,0) = 0$, e usando $\tau(dt, dx') = \frac{\partial\tau}{\partial t}\, dt + \frac{\partial\tau}{\partial x'}\, dx'$ segue

$$\frac{dx'}{c-v}\,\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial x'}\, dx' = \frac{1}{2}\left[\frac{2c\ dx'}{c^2-v^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial t}\right] = \frac{c\ dx'}{c^2-v^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.4}$$

de onde obtemos

$$\boxed{\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2-v^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0} \tag{11.1}$$

Esta equação diferencial descreve como o tempo τ(de um observador na posição x')no referencial R' se relaciona ao tempo t do referencial R. Vamos escrever a solução geral como $\tau(t, x') = at + bx'$ e substituir na equação, obtendo

$$b + \frac{av}{c^2-v^2} = 0 \ \Rightarrow \boxed{b = -\frac{av}{c^2-v^2}}$$

e portanto a solução geral fica

$$\boxed{\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right),} \tag{11.2}$$

ou, substituindo x' por $x' = x - vt$, segue

$$\tau = a\left(t + \frac{v^2}{c^2-v^2}t - \frac{v}{c^2-v^2}x\right)$$

então

$$\tau = a\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}t - \frac{v}{c^2-v^2}x\right) = \frac{a}{c}\left(\frac{ct}{1-\beta^2} - \frac{\beta}{1-\beta^2}x\right),$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$

Portanto

$$c\tau = a\left[\gamma^2(ct) - \gamma^2\beta x\right] \tag{11.3}$$

com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

A equação (11.3) permite calcular o tempo marcado nos relógios em repouso no referencial *R'*, dado o tempo t e a posição x desses relógios no referencial R. Agora precisamos encontrar a equação que relaciona a posição ξ em *R'* com x e t em R. Novamente a partir da equação (11.2), podemos ver que um raio de luz emitido por Alice ou Carlos no instante em que ambos estão na mesma posição (isto é, as origens de *R* e *R'* coincidem) atingirá Beto, que, visto por Carlos encontra-se uma distância *x'* em relação a Alice, no instante

$$t = \frac{x'}{c - v} \tag{11.4}$$

de acordo com o relógio de Carlos.

Para Alice ou Beto (que sincronizaram seus relógios), este instante é obtido pela equação II,

$$\tau = a\left(\frac{x'}{c-v} - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

e portanto

$$\tau = a\frac{c}{c^2 - v^2}x'$$

Como, para Alice e Beto, a luz viaja a uma velocidade constante c, eles podem medir a distância entre eles, usando o valor de τ, já que

$$\xi = c\tau = a\frac{c^2}{c^2 - v^2}x'$$

Como $x' = x - vt$, segue que

$$\boxed{\xi = \tfrac{a}{1-\beta^2}(x - vt)} \tag{11.5}$$

Podemos igualmente obter as equações para coordenadas perpendicular à velocidade do referencial *R'* em relação a *R*. Digamos que um quarto observador, Daniel, encontra-se a uma distância y de Alice, mas com a mesma coordenada x'=o dela. Alice envia um sinal luminoso a Daniel, o qual percorrera um caminho perpendicular ao eixo ξ do referencial *R'*, segundo Alice e Daniel. Para Carlos, a luz percorrerá uma reta inclinada em relação ao eixo x, não perpendicular a este. A distância percorrida pela luz até Daniel será

$$S = \sqrt{y^2 + v^2t^2}$$

e o instante t em que Daniel recebe o sinal é dado por $s = ct$. Portanto

$$s^2 = c^2t^2 = y^2 + v^2t^2 \Rightarrow \boxed{ct = \tfrac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Para Alice, no entanto, a distância percorrida pela luz até Daniel é

$$\eta = ct = act \Rightarrow \boxed{\eta = a\tfrac{y}{\sqrt{1-\beta^2}},} \tag{11.6}$$

onde foi usada a equação (II) com $x' = 0$, já que Daniel encontra-se sempre sobre o eixo η. Da mesma forma, para o eixo z, obtemos

$$\boxed{\xi = a\frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{11.7}$$

Podemos reescrever as equações III - VI como

$$\begin{cases} c\tau = \phi(v)\gamma(ct - \beta x) \\ \xi = \phi(x - \beta ct) \\ \eta = \phi(v)y \\ \xi = \phi(v)z \\ \end{cases}$$

onde $\phi(v) = \frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}}$ deve ser determinado. Para isso, consideremos um terceiro referencial, *R"*, que se move com velocidade - v em relação a *R'*, e portanto está parado em relação a R. Por isso, o tempo *t"* nesse referencial deve ser t"=t, e então

$$\begin{aligned} ct'' = ct = \phi(-v)\gamma(ct + \beta\xi) = \\ = \phi(-v)\phi(v)\gamma^2[ct - \beta x + \beta x - \beta^2 ct] = \phi(-v)\ \phi(v)ct \end{aligned} \tag{11.8}$$

Portanto $\phi(-v)\ \phi(v) = 1$.

Assim obtemos as chamadas Transformações de Lorentz, dadas portanto

$$c\tau = \gamma(ct - \beta x) \tag{11.9}$$
$$\xi = \gamma(x - \beta ct) \tag{11.10}$$
$$\eta = y \tag{11.11}$$
$$\zeta = z\,. \tag{11.12}$$

Essas transformações haviam sido obtidas por Lorentz alguns anos antes de Einstein, para explicar o fato de que a existênciado éter para a propagação da luz não era observada experimentalmente. Porém Lorentz jamais descartou a existência desse meio, nem que a luz se propagaria no vácuo com velocidade constante e independente do movimento do observador. Outra importante contribuição de Einstein foi perceber que o tempo τ tem o mesmo significado e importância do ponto de vista da Física, que o tempo t.

Uma forma mais usual de escrever essas transformações é a partir da definição de uma grandeza matemática nova, chamada quadri-vetor (4-vetor), dado por $x = (x_o, x_1, x_2, x_3)$, sendo $x_o = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. A transformação de Lorentz de $x \to x'$ pode ser escrita na forma de matriz, como

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.13}$$

É interessante também termos a transformação $x' \to x$, bastando apra isso fazer a substituição $\beta \to -\beta$, como vimos no caso de Eduardo, obtendo

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

11.2 Adição de Velocidades na Relatividade Restrita

Considere um objeto que se move com velocidade u no referencial R', sendo que este se move com velocidade V em relação a um outro referencial R. Qual é a velocidade v do objetivo em relação ao referencial R?

Para responder esta pergunta, vamos antes escrever as equações que fazem a transformação lorentz invésa, isto é, das coordenadas de R‘ para R. Isto é facilmente obtido é levando em conta que R se move em relação a R' com velocidade -V. Com isso obtemos as equações

$$\begin{cases} x_o = \gamma\, x'_o + \gamma\beta x'_1 \\ x_1 = \gamma\beta\, x'_o + \gamma x'_1 \end{cases} \tag{11.15}$$

portanto

$$\begin{cases} dx_o = \gamma\, x'_o + \gamma\beta x'_1 \\ dx_1 = \gamma\beta\, x'_o + \gamma x'_1 \end{cases} \tag{11.16}$$

O movimento do corpo nem relação a R' é tal que

$$c\frac{dx'_1}{dx'_o} = u => dx'_1 = \frac{u}{c}dx'_o \tag{11.17}$$

Usando essa relação na equação a r' é tal que

$$\begin{cases} dx_o = \gamma(1 + \beta\frac{u}{c})dx'_o \\ dx_1 = \gamma(\frac{\beta c}{u} + 1)dx'_1 \end{cases} \tag{11.18}$$

de onde obtemos

$$c\frac{dx_1}{dx_o} = \frac{\left(\frac{\beta c}{u} + 1\right)}{\left(1 + \frac{\beta u}{c}\right)} c\frac{dx_1'}{dx_o'} \tag{11.19}$$

Como $c\,(dx_1/dx_o) = v$, $c\,(dx_1'/dx_o') = u$ e $\beta = V/c$, temos

$$v = \frac{V + u}{1 + \frac{uV}{c^2}}\,. \tag{11.20}$$

Observe que para $u << c$ e $V << c$ temos $v \approx V + u$, que é o resultado clássico.

11.3 Massa relativística

Considere agora que no referencial de Alice existe uma parede, em repouso, em cuja direção aquela lança uma bola com velocidade inicial $u^i << c$ na direçao x'. A bola colide elasticamente com a parede formando um angulo de incidência de 90^o, retornando com velocidade u^f. A velocidade da bola em relação à parede é

$$\begin{cases} u_r^i = u^i \\ u_r^f = u^f \end{cases} \tag{11.21}$$

respectivamente antes e depois da colisão. Devido à conservação de energia, resulta que $u_r^f = -u_r^i$ e portanto a variação de velocidade relativa fica $\Delta u_r = -2u_r^i$.

Este resultado é um fato observável e independente do referencial: numa colisão elástica de um objeto contra uma parede, a variação da velocidade do objeto é em módulo o dobro da velocidade inicial. Vamos mostrar que Daniel, em cujo referencial Alice se move com velocidade V ao longo do eixo x, essa relação também é válida. De acordo com a transformação de velocidades relativística, Eq. **??**, segue que

$$v^i = \frac{V + u}{1 + uV/c^2} \tag{11.22}$$

e

$$v^f = \frac{V - u}{1 - uV/c^2}\,. \tag{11.23}$$

Portanto as velocidades relativas entre bola e muro ficam

$$v_r^i = v^i - V = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + uV/c^2} u \tag{11.24}$$

e

$$v_r^f = v^i - V = \frac{1 - V^2/c^2}{1 - uV/c^2}(-u)\,, \tag{11.25}$$

onde $u = u^i$.

Usando o fato de que $u << c$, obtemos

$$v_r^i = v^i - V = (1 - V^2/c^2)u \tag{11.26}$$

e

$$v_r^f = v^i - V = -(1 - V^2/c^2)u\,, \tag{11.27}$$

de onde segue que

$$\Delta v_r = -2v_r^i = -2\gamma^{-2}u\,. \tag{11.28}$$

Com isso confirmamos que na TL esse fato observável de que na colisão elástica com uma pareda a variação de velocidade é em módulo o dobro da velocidade inicial permanece inalterado.

A força exercida por um corpo sobre outro também é um observável físico, e então também deve permanecer invariante sob a TL. No caso da força exercida pela parede sobre a bola temos

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,, \tag{11.29}$$

portanto

$$m\frac{dv_r}{dt} = m_o\frac{du_r}{d\tau}\,. \tag{11.30}$$

Observe que m_o é a massa da bola no referencial de Alice, onde esta se move com velocidade muito inferior à da luz. Chamamos esta de massa de repouso. Já indicamos na equação acima que no referencial de Daniel a massa pode ser diferente, e indicamos por m.

Como $dt = \gamma^{-1}d\tau$ segue que

$$m\gamma^{-1}\frac{du_r}{d\tau} = m_o\frac{du_r}{d\tau}\,, \tag{11.31}$$

de onde segue que

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{11.32}$$

A equação acima mostra que a massa de um corpo cresce à medida que aumenta sua velocidade. Quando esta velocidade se aproxima da velocidade da luz, a massa tende a infinito e a aceleração tende a zero, o que é consistente com o fato de a velocidade da luz ser a velocidade limite para qualquer objeto.

11.4 Energia Relativística

No exemplo anterior, a força exercida pela parede sobre a bola também é um observável, e portanto todos os observadores devem concordar sobre o valor da força. Durante a colisão entre a bola e a parede, a força exercida sobre a bola exerce um trabalho, que resulta em deformação da boa até esta chegar ao repouso, e depois nova deformação até esta ganhar velocidade na direção oposta e se afastar da parede. Estamos supondo que a colisão é elástica, portanto a energia mecânica da bola é conservada. Como a colisão entre a bola e a parede tem uma duração finita, isto é, a colisão dura um intervalo de tempo não nulo, podemos calcular a potência da força exercida sobre a bola por

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}.\vec{v}\,. \tag{11.33}$$

Por outro lado, temos Portanto a potência fica

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}\vec{v}\,, \tag{11.34}$$

e portanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\vec{v}\,. \tag{11.35}$$

A derivada do vetor momento é dada por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}\,, \tag{11.36}$$

e portanto temos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt}v^2 + \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}\,. \tag{11.37}$$

A derivada temporal da massa relativística fica

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\frac{m_o}{c^2}\frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,. \tag{11.38}$$

Das equações acima resulta

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_o}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{11.39}$$

de onde resulta

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right], \tag{11.40}$$

e portanto temos

$$\boxed{E = mc^2}. \tag{11.41}$$

Daqui também resulta facilmente que

$$E^2 = (pc)^2 + (m_o c^2)^2 . \tag{11.42}$$

11.5 Invariantes Relativísticos

Considere que no instante em que Alice passa por Daniel um sinal luminoso é emitido no local do encontro. Visto de Daniel, o sinal se propaga na forma de uma frente esférica de raio ct. Assim, qualquer ponto sobre a superfície dessa esfera é tal que

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 . \tag{11.43}$$

Por outro lado, sempre segundo Daniel, Alice não se encontra, num instante $t \neq 0$, no centro dessa esfera.

Para Alice, ela também verá a luz se propagando de forma que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 . \tag{11.44}$$

Com a Transformação de Lorents, essa aparente contribuição pode ser compreendida. Note que

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \\ x' = \gamma(\beta ct + x) \rightarrow x'^2 = \gamma^2[\beta^2(ct)^2 + x^2 + 2\beta ctx] \end{cases} \tag{11.45}$$

Então

$$x'^2+y'^2+z'^2 = \gamma^2(1-\beta^2)x^2+\gamma^2\beta^2+y^2+z^2+\gamma^2(ct)^2-(ct)^2+2\gamma^2\beta ctx . \tag{11.46}$$

Usando o fato de que $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$, segue

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 . \tag{11.47}$$

Generalizando, qualquer 4-vetor v se transforma por TL de modo que $v_o^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = k^2$, onde k é uma constante, e portanto invariante por TL. Dessa forma, leis físicas, que expressam invariâncias por mudança de referencial inercial, são necessariamente escritas em forma de produtos de quadrivetores.

11.6 4-vetor energia-momento

A relação entre energia e momento dada na equação 11.42 pode ser escrita na forma

$$(E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_o c^2 \,, \tag{11.48}$$

sendo m_o e c cosntantes. Assim essa equação expressa um invariante, o que sugere que podemos definir o quadrivetor

$$p = (E/c, p_x, p_y, , p_z) \,. \tag{11.49}$$

Esse quadrivetor pode ser escrito também na forma

$$p = m_o c\gamma(1, \beta_x, \beta_y, \beta_z) \,, \tag{11.50}$$

onde $\beta_i = v_i/c$, o que indica que

$$u = \gamma v \,, \tag{11.51}$$

onde $v = (c, \beta_x, \beta_y, \beta_z)$, é um quadrivetor.

É possível mostrar que a transformação de u pela TL é compatível com as formulas de adição de velocidades relativísticas. Para isso, vamos calcular

$$(\gamma v)' = L(\gamma v) \,, \tag{11.52}$$

que resulta em

$$\begin{cases} \gamma' c = \Gamma\gamma(c + Bv_x) = \Gamma\gamma(1 + B\beta)c \\ \gamma' v_x' = \Gamma\gamma(Bc + v_x) = \Gamma\gamma(V + v_x) \\ \gamma' v_y' = \gamma v_y \\ \gamma' v_z' = \gamma v_z \end{cases} \tag{11.53}$$

Note que

$$(\Gamma\gamma)^{-2} = \left(1 - \frac{V^2 + v^2}{c^2} + \frac{V^2 v^2}{c^4}\right) . \tag{11.54}$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$(\Gamma\gamma)^{-2} = \left(1 + 2\frac{Vv}{c^2} + \frac{V^2v^2}{c^4}\right) = \left(1 + \frac{Vv}{c^2}\right)\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{V + v}{1 + Vv/c^2}\right)^2\right] . \tag{11.55}$$

Como, de acordo com as transformações de velocidades temos

$$v_x' = \frac{V + v}{1 + Vv/c^2} \,, \tag{11.56}$$

então segue que

$$\Gamma\gamma = \frac{\gamma'}{1 + B\beta}\,. \tag{11.57}$$

Com isso obtemos

$$\gamma' c = \frac{\gamma'}{1 + B\beta}(1 + B\beta)c \tag{11.58}$$

mostrando que a velocidade da luz é invariante por transformações de Lorentz, como esperávamos.

Também segue que

$$\gamma' v'_x = \frac{\gamma'}{1 + B\beta}(V + v_x)\,, \tag{11.59}$$

em acordo com a equação correspondente à adição de velocidade.

Para as componentes transversais, usamos que

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma}\,, \tag{11.60}$$

e obtemos

$$v'_y = \frac{v_y}{\Gamma(1 + V v_x/c^2)}\,, \tag{11.61}$$

e para a outra componente, segue

$$v'_z = \frac{v_z}{\Gamma(1 + V v_x/c^2)}\,. \tag{11.62}$$

Assim concluímos que as fórmulas de adição de velocidades é compatível com a hipótese de que γv é um quadrivetor, com $v = (c, \vec{v})$.

11.7 Geometria do espaço-tempo

Vimos que o fato de a velocidade da luz ser uma constante finita determinada pela equação de Maxwell para ondas eletromaginéticas leva ao fato de espaço e tempo serem conceitos relativos ao movimento e posição do observador.A relação entre essas grandezas é dada pela transformação de Lorentz , que é escrita como

$$\begin{cases} x'_o = \gamma x_o - \gamma\beta x_1 \\ x'_1 = -\gamma x_o + \gamma x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \tag{11.63}$$

onde $x_o = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, e suas correspondentes para o referencial R' Estás relações podem ser escritas em forma matricial , como veremos a seguir.Inicialmente definimos o quadrivetor(4-vetor)

$$x_\mu = (x_o, x_1, x_2, x_3) \tag{11.64}$$

que é o correspondente ao vetor tridimencional (3-vetor) no espaço euclidiano usual . Da mesma forma ,

$$x_\mu = (x'_o, x'_1, x'_2, x'_3) \tag{11.65}$$

para o referencial R'.

As transformações acima podem ser escritas na forma

$$x' = Lx \tag{11.66}$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.67}$$

é a matriz correspondente à transformação de Lorentz. Note que a teoria da relatividade de Einstein é obtida a partir da observação de que a velocidade da luz é uma constate universal válida em qualquer referencia inercial. A transformação L é uma consequência desse fato , e portanto essa velocidade deve ser constante na transformação . Para um observador em R , um fóton se move de forma que

$$ct - x - y - z = o \tag{11.68}$$

ou

$$x_o - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \tag{11.69}$$

Um observador em R' afirma , para o mesmo fóton , que

$$x'_o - x'_1 - x'_2 - x'_3 = 0 \tag{11.70}$$

e os dois observadores estão certos nessas afirmações . Isso significa que a soma dos quadrados dos componentes do 4-vetor , levando - se em conta os sinais apropriados deve ser invariante pela transformação L . De fato , L preserva essa soma , como pode ser facilmente verificado por substituição direta .

As somas acia podem ser escritas na forma

$$s = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \, , \tag{11.71}$$

onde S é uma constante e $g^{\mu\nu}$ é uma matriz 4×4 que define a métrica da geometria do espao - tempo . Aqui , s representa a distância em relação à origem . Podemos também definir o produto escalar de dois 4 - vetores x , y , como

$$p = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu \tag{11.72}$$

Nas definições acima , subentende - se que índices , por exemplo

$$g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = \sum_{\mu=0}^{4} \sum_{\nu=0}^{4} g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu \, . \tag{11.73}$$

Para que essa forma represente os produtos definidos acima. a métrica $g^{\mu\nu}$ deve ser definida como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.74}$$

A métrica define várias características do espaço. No caso do espaço euclideano a métrica é dada por

$$e^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.75}$$

e a distância fica

$$d^2 = e^{ij} x_i x_j \, , \tag{11.76}$$

e o produto escalar fica

$$p^2 = e^{ij} x_i y_j \, . \tag{11.77}$$

Para simplificar ainda mais a notação, podemos escrever o produto entre dois 4-vetores p, x, na forma

$$p^\mu x_\nu \, , \tag{11.78}$$

onde

$$p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu \, , \tag{11.79}$$

e para distinguir os vetores com índices acima ou abaixo, chamamos x^μ de vetor contra-variante, e x_μ de vetor covariante. Com essas esses vetores podemos escrever

$$s^2 = x^\mu x_\mu \, . \tag{11.80}$$

As expressões acima definem o espaço-tempo relativístico e o produto escalar entre os vetores nesse espaço. Essas são as ferramentas matemáticas mais adequadas para se lidar com as consequências da Teoria da Relatividade.

11.8 Relatividade no Cone de Luz

Como vimos, um evento no espaço-tempo é descrito, dentro da Relatividade Restrita, por um 4- vetor:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v \tag{11.81}$$

sendo a métrica do espaço-tempo dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.82}$$

A transformação de Lorentz para mudança entre referenciais inerciais é dada por

$$L_{tx} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.83}$$

Como as coordenadas y e z permanecem inalteradas neste caso, podemos simplificar a notação restringindo a matriz de Lorentz para as coordenas t e x, obtendo

$$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \tag{11.84}$$

e a Transformação de Lorentz fica

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \tag{11.85}$$

com a métrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.86}$$

Neste ponto, é interessante compararmos a Transformação de Lorentz com a Transformação por rotação, dada por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{11.87}$$

Porém $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \geq 1$, o que impede a comparação entre as duas transformações. Podemos, no entanto, escrever

$$\begin{cases} \cosh\varphi = \gamma \\ \sinh\varphi = \gamma\beta \end{cases} \tag{11.88}$$

pois $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$, e

$$cosh^2\varphi - senh^2\varphi = 1 \tag{11.89}$$

com

$$cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \tag{11.90}$$

e

$$senh = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \tag{11.91}$$

de onde obtemos

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \tag{11.92}$$

Portanto

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} cosh\varphi & -senh\varphi \\ -senh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{11.93}$$

Observe ainda que L(φ) L($-\varphi$) $= I$. Portanto, dado β obtém-se φ e L(φ). Então a transformada de Lorentz continua dependendo apenas de β.

$$\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x^1 \end{pmatrix} = L(\beta)\begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -senh\varphi \\ -senh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi x_0 - senh\varphi x \\ -senh\varphi x_0 + \cosh\varphi x \end{pmatrix} \tag{11.94}$$

Agora vamos introduzir a mudança de variáveis $(x_0, x) \to (\xi, \nu)$ tais que

$$\begin{cases} \xi = (x_0 + x)/\sqrt{2} \\ \nu = (x_0 - x)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{11.95}$$

que obedecem à seguinte lei de transformação

$$\xi' = \left[(\cosh x_0 - senhx) + (-senhx_0 + \cosh\varphi x)\right]/\sqrt{2} \tag{11.96}$$

e

$$\xi' = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)x_0 - \left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)x_0\right] + \left[\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)x - \left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)x\right]\right\} \tag{11.97}$$

$$\xi' = \frac{1}{2}\left(e_{x_0}^{-\varphi} + e^{-\varphi}x\right) = e^{-\varphi}\xi \Longrightarrow \xi' = \frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{2}}\xi \tag{11.98}$$

$$\xi' = \frac{1}{2}\left(e_{x_0}^{-\varphi} + e^{-\varphi}x\right) = e^{-\varphi}\xi \Longrightarrow \xi' = \frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{2}}\xi \tag{11.99}$$

e para a outra coordenada

$$\nu' = \left[(\cosh\varphi x_0 - senhx) - (-senhx_0 + \cosh x)\right]/\sqrt{2} \tag{11.100}$$

$$\nu' = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)x_0 - \left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)x_0\right] + \left[\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)x - \left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)x\right]\right\} \tag{11.101}$$

e finalmente

$$\nu' = \left(e^{-\varphi}x_0 + e^{-\varphi}x\right) = e^{\varphi}\nu \Longrightarrow \nu' = e^{\varphi}\nu \tag{11.102}$$

As variáveis ξ, ν são chamadas variáveis cinemáticas em um cone de luz. Em geral o 4-vetor é indicado por $(\xi, \nu, 0_\perp)$, onde $0_\perp$representa as coordenadas perpendiculares ao movimento.

No cone de luz, o 4-vetor momento-energia fica:

$$p = \left(\frac{E/c}{\sqrt{2}}, \frac{p_x}{\sqrt{2}}c, p_y c, p_z c\right) \longrightarrow \rho = \left(\frac{E/c + p_x c}{\sqrt{2}}, \frac{E/c - p_x c}{\sqrt{2}}, 0_\perp\right). \tag{11.103}$$

Observe que

$$\xi, \nu = \left(\frac{E}{c} + p_x c\right)\left(\frac{E}{c} - p_x c\right) = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 c^2 = m_0^2 c^2 \tag{11.104}$$

Na representação $x = (x_0, x, y, z)$ a métrica fica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.105}$$

de modo que

$$x^2 = x_\mu x^\mu = g^{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} \tag{11.106}$$

Na representação ξ, temos

$$\left[\xi - \left(\frac{x_0 + x}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{x_0 - x}{\sqrt{2}}\right), y.z\right] \tag{11.107}$$

$$\xi^2 = 2\xi_0\xi - y^2 - z^2 = 2\left[\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - y^2 - z^2 \tag{11.108}$$

e portanto a nova métrica é

$$\xi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{11.109}$$

Com isso podemos escrever

$$\xi^2 = \xi_\mu \xi^\mu = \xi^{\mu\nu}\xi^\mu \xi^\nu \tag{11.110}$$

11.9 Aplicação: String model para produção de jets

Considere 2 hadrons de momentos

$$p_1 = \left(E_1^+, \frac{m^2}{E_1^+}, 0_\perp\right), p_2 = \left(\frac{m^2}{E_2^-}, E_2^-, 0_\perp\right) \tag{11.111}$$

Daqui podemos concluir que a massa invariante $\mathrm{m}^2 = \mathrm{p}^2$ é:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1^2 = m_1^2 = p_0^{(1)} p_1 i^{(1)} = m^2 \\ p_2^2 = m_2^2 = p_0^{(2)} p_1^{(2)} = m^2 \end{array} \right. \tag{11.112}$$

portanto os 2 hadrons possuem a mesma massa.

Agora vamos supor que 2 partons participantes espalham on-shell. Os momentos iniciais dos parton (quark ou gluon) são

$$k_1 \approx \left(x^+ E_1^+, 0, 0_\perp\right) \tag{11.113}$$

e

$$k_2 \approx \left(0, x^- E_2^-, 0_\perp\right) \tag{11.114}$$

Podemos concluir que a massa dos partons é nula, já que

$$k_1^2 = \xi^2 = \left(x^+ E_1^+\right) + 0 + 0 = 0\,, \tag{11.115}$$

e $k_2^2 = 0$.

Também podemos concluir que os momentos são tais que para o parton(1):

$$\xi_0^{(1)} = E^{(1)} + p_x^{(1)} = x^+ E_1^-$$
$$\xi^{(1)} = E^{(1)} - p_x^{(1)} = 0 \Longrightarrow p_x^{(1)} = E^{(1)} \Longrightarrow 2E^{(1)} = x^+ E_1^+ \Longrightarrow E^{(1)} = \frac{x^+ E_1^+}{2} \tag{11.116}$$

e para o parton (2):

$$\begin{cases} \xi_0^{(2)} = E^{(2)} + p_x^{(2)} = 0 \Longrightarrow p_x^{(2)} = -E^{(2)} \\ \xi^{(2)} = E^{(2)} - p_x^{(2)} = x^- E_2^- \Longrightarrow E^{(2)} = \dfrac{x^- E_2^-}{2} \end{cases} \tag{11.117}$$

Os partons têm momentos iniciais opostos. No espalhamento há uma transferência de momento q = (-q_+, q_-, q_1), e se o espalhamento é na camada de massa (on-shell) teremos

$$\begin{cases} k_1^1 = k_1 + q = (x^+ E_1^+ - q_+, q_-, q_\perp) \\ k_2^1 = k_2 - q = (q_+, x^- E_2^- - q_-, -q_\perp) \end{cases} \tag{11.118}$$

Portanto teremos:

$$k_1^{1^2} = q_-(x^+ E_1^+ - q_+) - q_\perp^2 = 0 \tag{11.119}$$

(on-shell, massa do parton é nula)

$$x^+ E_1^+ \gg q_+ \Longrightarrow k_1^{1^2} \approx q_- \left(x^+ E_1^+\right) = q_\perp^2 \Longrightarrow q_- \approx \frac{q_\perp^2}{x^+ E_1^+} \tag{11.120}$$

e para $k_2^{1^2}$, da mesma forma, resulta

$$q_+ \approx \frac{q_\perp^2}{x^- E_2^-} \tag{11.121}$$

11.10 Rapidity

A representação ξ dos 4-vetores é feita com auto-vetores da Transformação de Lorentz, L(β), já que

$$L(\varphi)\xi_0 = L(\varphi) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ \xi_\perp \end{pmatrix} = e^{-\varphi} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ \xi_\perp \end{pmatrix} = e^{-\varphi}\xi_0 \tag{11.122}$$

e

$$L(\varphi)\xi = L(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \xi_1 \end{pmatrix} = e^{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \xi_1 \end{pmatrix} = e^{\varphi}\xi_0 \tag{11.123}$$

e, obviamente,

$$L(\varphi)\xi_1 = L(\varphi)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1 \tag{11.124}$$

O ângulo φ da rotação hiperbólica é chamado rapidity (rapidez), e, como vimos, é dado por:

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \tag{11.125}$$

Das transformações acima, também obtemos que

$$\frac{\xi'}{\xi_0'} = \frac{e^{\varphi}\xi}{e^{-\varphi}\xi_0} = e^{2\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \Longrightarrow \ln\left(\frac{\xi'}{\xi_0'}\right) = 2\varphi + \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \tag{11.126}$$

Se ξ_0, ξ são dados no referencial de repouso da partícula, p = 0 e ξ_0 = E + p = E, ξ = E - p = E, então $\frac{\xi}{\xi_0} = 1$ e $\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = 0$, portanto segue que

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi'}{\xi_0'}\right) \tag{11.127}$$

Podemos então calcular a rapidez dos partons após a colisão:

$$\varphi_1' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{q_-}{x^+E_1^+ - q_+}\right) \approx \frac{1}{2}\ln\left(\frac{q_\perp^2}{\left(x^+E_1^+\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{q_\perp}{x^+}\right) \Longrightarrow \varphi_1' = \ln\left(\frac{q_\perp}{x^+}\right) \tag{11.128}$$

e da mesma forma obtemos

$$\varphi_2' = \ln\left(\frac{q_+}{x^-}\right) \tag{11.129}$$

Se consideramos que inicialmente a rapidez era $y_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \neq 0$, a variação da rapidez (rapidity gap) é:

$$y = \varphi\,,\,,y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi'}{\xi_0'}\right) - y_0 \Longrightarrow \Delta y = y - y_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi'}{\xi_0'}\right) \tag{11.130}$$

Na colisão, portanto, é formado um "gap"de rapidez entre o parton que colide e os espectadores. Devido ao confinamento dos quarks forma-se um "tubo de cor"entre o quark participante e os espectores. O tubo de cor ou corda é caracterizada pelos sabores dos quarks componentes e pelo 4-momento resultante da soma dos 4-momentos dos quarks nos pontos extremos da corda.

Para calcular o 4-momento da corda precisamos considerar diferentes possibilidades: 1) não há troca de cor entre os hadrons; 2) há troca de cor. Vamos analisar cada um destes casos.

11.10.1 Pseudo-rapidez

A pseudo-rapidez é muitas vezes usada no lugar da rapidez, y, pela simplicidade no cálculo. A pseudo-rapidez, η, é definida como

$$\eta = -ln\,[tg\,(\theta/2)] \tag{11.131}$$

onde $\theta = p_t/p_l$, sendo usual que se escolha $p_l = p_z$ e $p_t = [p_x^2 + p_y^2]^{1/2}$. Vamos mostrar que para ângulos pequenos, $\theta \approx 0$, essas duas grandezas coincidem. Neste caso podemos escrever, para martons de massa "nula" $E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p$, então a rapidez fica

$$y = ln\left(\sqrt{\frac{p + p_l}{p - p_l}}\right). \tag{11.132}$$

Como $p^2 = p_t^2 + p_l^2 \therefore (p + p_l)(p - p_l) = p^2 - p_l^2 = p_t^2$, segue que

$$y = ln\left(\sqrt{\frac{(p + p_l)^2}{p^2 - p_l^2}}\right) = ln\left(\sqrt{\frac{(p + p_l)^2}{p_t^2}}\right), \tag{11.133}$$

de onde segue que

$$y = ln\left(\frac{(p + p_l)^2}{p_t^2}\right). \tag{11.134}$$

Para $\theta \approx 0$ devemos ter $p_l >> p_t$, e portanto $p \approx p_l$, então

$$y \approx ln\left(\frac{2p_l}{p_t}\right) = -ln\left(\frac{p_t}{p_l}\right), \tag{11.135}$$

e como

$$\frac{p_t}{p_l} = tg\theta \therefore \frac{p_t}{p_l} = \frac{tg\theta}{2} \approx tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{11.136}$$

pois $\theta \approx 0$, segue que

$$y \approx -ln\,[tg(\theta/2)] = \eta \tag{11.137}$$

Capítulo 12

Sistemas contínuos

Até o momento estudamos sistemas formados por um número finito de corpos discretos. Existem problemas que podem ser mais facilmente tratados como se fossem contínuos, como uma corda, uma membrana elástica, o movimento de fluídos, a dinâmica de campos eletromagnéticos, a propagação do som, entre muitos outros. Neste capítulos vamos generalizar os formalismos de Lagrange e de Hamilton para sistemas contínuos.

12.1 Lagrangeana de sistemas contínuos

Para os sistemas discretos, vistos até agora, a Lagrangeana é dada por

$$L = \sum_i T_i - V_i\,, \tag{12.1}$$

onde o índice $i = 1, 2, 3, \ldots$ indica a i-ésima partícula do sistema. Essa abordagem é válida para sistemas discretos, onde cada um dos componentes, as partículas, podem ser individualizadas e contadas. Existem, porém sistemas em que isso não é possível ou não é apropriado, como por exemplo, no estudo da eletrodinâmica, quando campos elétricos e magnéticos interagem entre si. Oras, campos são definidos no contínuo, isto é, em cada ponto do espaço, e portanto não podemos contar o número de componentes, e portanto não podemos definir o número de graus de liberdade, da mesma forma como vínhamos fazendo.

Para resolver esse problema, notemos que os campos são determinados como uma função contínua do espaço e do tempo, istp é, um campo escalar ϕ é uma função do tipo $\phi = \phi(\boldsymbol{f}, t)$. Em termos de coordenadas generalizadas, podemos escrever $\phi = \phi(q, t)$, onde $q = q_1, q_2, \ldots, q_n$. A Lagrangeana, então, passa a ser determinada em função do campo em cada ponto. Se aproximássemos o espaço contínuo por uma rede discreta, teríamos

$$L = \sum_{i \in l} T(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) - V(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) , \tag{12.2}$$

sendo i um ponto da rede l, que tem as mesmas dimensões do espaço em que o sistema está imerso.

Para fazermos a passagem para o contínuo, fazemos a seguinte transformação:

$$\sum_{i \in l} \to \int d^3 r , \tag{12.3}$$

onde a soma sobre todos os pontos da rede é substituída pela integração sobre todo o espaço. Dessa forma teremos

$$L = \int d^3 r \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) , \tag{12.4}$$

com

$$\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) = T(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) - (\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) . \tag{12.5}$$

$\mathcal{L}$ é chamada densidade Lagrangeana, e representa a contribuição para a Lagrangeana total dada pela parte do sistema que se encontra num volume do espaço de dado por $dV = d^3 r$.

Com isso, a ação, que é a grandeza minimizada no Princípio de Hamilton, fica

$$S = \int \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) d^3 r dt . \tag{12.6}$$

Podemos escrever, ainda, de forma a tratar tempo e espaço de modo simétrico, como

$$S = \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) d^4 x , \tag{12.7}$$

sendo $x = x_1, x_2, x_3, t$.

12.2 Equações de Lagrange para sistemas contínuos

Para obter as equações de Lagrange, aplicamos o princípio de Hamilton, minimizando a ação definida na equação (12.6). Para isso, note que

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \sum_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_{\mu} \phi} \delta(\partial_{\mu} \phi) , \tag{12.8}$$

onde o índice $\mu = 1, 2, 3, 4$ indica as 3 coordenadas espaciais e o tempo. O símbolo ∂_μ indica uma derivada parcial na coordenada x_μ, ou seja

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \,. \tag{12.9}$$

Portanto temos

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \,. \tag{12.10}$$

Podemos usar a relação

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta(\phi) \,, \tag{12.11}$$

que nada mais é do que uma generalização para mais dimensões da relação já usada na derivação do Princípio de Hamilton, onde tivemos

$$\delta(\dot{\phi}) = \frac{d}{dt} \delta\phi \,. \tag{12.12}$$

Com isto temos que a variação da ação fica

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta(\phi) \,. \tag{12.13}$$

O segundo termo da equação acima pode ser escrito como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta(\phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \delta(\phi) \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \right) \delta(\phi) \,, \tag{12.14}$$

e substituíndo este resultado na equação para δS, obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \right) \right] \delta\phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \delta(\phi) \right) \,. \tag{12.15}$$

O último termo do lado direito da equação acima pode ser facilmente integrado, resultando

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \delta(\phi) \right) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \delta(\phi) \right]_C \,, \tag{12.16}$$

onde o índice C indica que o termo entre colchetes deve ser calculado na borda C dos limites de integração. Essa borda representa o contorno da região que delimita o sistema espacialmente nos instantes inicial e final. Como no método variacional utilizado para obter as Equações de Lagrange pelo método variacional, aqui também consideramos que nessa borda determinada pelas condições de contorno o campo ϕ não varia, isto é, no contorno C, $\delta\phi = 0$. Com isso temos que o termo considerado aqui é nulo. Assim, a equação para δS fica

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \right) \right] \delta\phi = 0 \,, \tag{12.17}$$

sendo a igualdade com zero resultante da aplicação do Princípio de Mínima Ação de Hamilton.

Esta igualdade deve ser satisfeita para qualquer $\delta\phi$, e isso só é possível se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \,, \tag{12.18}$$

que representam as Equações de Lagrange para sistemas contínuos.

12.2.1 Exemplos

1. Considere a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}(\boldsymbol{x})^2 - a\phi(\boldsymbol{x})^2 - b\phi(\boldsymbol{x})^4 - c^2 \left(\boldsymbol{\nabla}\phi \right)^2 \,. \tag{12.19}$$

Obtenha a equação de movimento.

Solução: Da densidade Lagrangeana temos os seguintes termos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -2a\phi - 4b\phi^3 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \phi} = -2c^2 \partial_x \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\partial_t \phi \,, \end{cases} \tag{12.20}$$

Substituindo estes resultados na Equação de Lagrange, equação (12.18), temos

$$-2a\phi - 4b\phi^3 + 2c^2 \partial_x \partial_x \phi - 2\partial_t \partial_t \phi = 0 \,, \tag{12.21}$$

ou, em forma mais usual, podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + a\phi + 2b\phi^3 - c^2 \nabla^2 \phi = 0 \,. \tag{12.22}$$

12.3 Teorema de Noether para sistemas contínuos

Vimos que no caso de sistemas contínuos a Lagrangeana é tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Vamos considerar que devido a alguma transformação nos campos ou mesmo no espaço e no tempo o campo ϕ sofra a transformação

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = \phi + \delta\phi \\ \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi' = \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi)\,. \end{cases} \tag{12.23}$$

Se a transformação está relacionada a uma simetria do sistema, isto é, se o sistema é invariante pela transformação utilizada, devemos ter, após a trasnformação,

$$\delta S = \int d^4x \delta\mathcal{L} = 0\,, \tag{12.24}$$

já que a nova Lagrangeana continua satisfazendo o Princípio de Hamilton. Para que isso ocorra devemos ter:

$$\int d^4x \delta\mathcal{L}' = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}\right] = 0\,, \tag{12.25}$$

e como a integração sobre o primeiro termo do lado direito é nula, já que $\mathcal{L}$ representa a Lagrangeana do sistema antes da transformação, devemos ter

$$\int d^4x \delta\mathcal{L} = 0\,. \tag{12.26}$$

Para isso, não é necessário que $\delta\mathcal{L}$, basta que tenhamos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu\,, \tag{12.27}$$

onde Λ é um campo vetorial nulo na borda do espaço considerado.

Por outro lado, com estas transformações, a variação da Lagrangeana fica

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \sum_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi)\,. \tag{12.28}$$

Além disso, o sistema evolui de modo a obedecer as equações de Lagrange, assim temos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\right)\,, \tag{12.29}$$

e com isso temos

$$\delta\mathcal{L} = \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\right)\,. \tag{12.30}$$

Com isso temos duas relações complementares para $\delta\mathcal{L}$ dadas pelas equações (12.27) e (12.30). Subtraindo uma equação da outra resulta

$$\sum_\mu \partial_\mu \left[\Lambda^\mu - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\right)\right] = 0\,. \tag{12.31}$$

Isso significa que a grandeza dada por

$$\boldsymbol{J}^\mu = \Lambda^\mu - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\right) \tag{12.32}$$

é uma grandeza conservada.

12.3.1 Conservação de energia e momento - tensor momento-energia

Vamos considerar, incialmente, as simetrias que resultam da homogeneidade do tempo e do espaço. Como vimos no caso das simetrias em sistemas discretos, essas simetrias levam à conservação da energia e do momento, respectivamente. Veremos que também no caso contínuo essas grandezas são conservadas.

Podemos tratar simultaneamente as duas simetrias considerando a transformação das 4 coordenas do tipo $x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu$, sendo a_μ o deslocamento nas coordenadas espaciais para $\mu = 1, 2, 3$ e no tempo para $\mu = 4$. A variação do campo ϕ, nesse caso, fica

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} a_\nu = \partial^\nu\phi a_\nu\,, \tag{12.33}$$

e para suas derivadas, obtemos

$$\delta\partial_\mu\phi = \frac{\partial\partial_\nu\phi}{\partial x_\nu} a_\nu = (\partial^\mu\partial_\nu\phi) a_\nu\,, \tag{12.34}$$

Com essa variação do campo ϕ, obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi a_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi) a_\nu\,,\,, \tag{12.35}$$

e portanto

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi)\right] a^\nu\,, \tag{12.36}$$

e podemos reconhecer o termo entre colchetes como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi) = \partial_\nu\mathcal{L}\,, \tag{12.37}$$

de onde segue que

$$\delta\mathcal{L} = (\partial^\nu \mathcal{L})a_\nu \,. \tag{12.38}$$

Agora, usando o fato de que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu(\partial^\mu\phi) = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi\right) - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\right)\partial^\nu\phi\,, \tag{12.39}$$

podemos escrever a equação (12.35) como

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \left(\partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\right)\right]\partial^\nu\phi a_\nu + \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi a_\nu\right)\,, \tag{12.40}$$

Mas o primeiro termo do lado direito dessa equação representa exatamente as equações de Lagrange dos sistemas contínuos, e durante a evolução do sistema esse termo é nulo, e portanto temos que

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi a_\nu\right)\,. \tag{12.41}$$

Assim, temos duas equações diferentes para $\delta\mathcal{L}$, a equação (12.38) e a equação (12.41). Subtraindo uma da outra obtemos

$$\left[\partial^\nu\mathcal{L} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi\right)\right]a_\nu = 0\,. \tag{12.42}$$

Como

$$\partial^\nu\mathcal{L} = \partial^\mu\mathcal{L}\delta^\nu_\mu\,, \tag{12.43}$$

obtemos

$$\partial^\mu\left[\mathcal{L}\delta^\nu_\mu - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi\right)a_\nu\right] = 0\,. \tag{12.44}$$

Assim, o termo

$$\Theta^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi\right) \tag{12.45}$$

com

$$\Lambda^\nu_\mu = \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\,. \tag{12.46}$$

Assim, Θ^ν_μ é uma grandesa conservada, e é geralmente chamado Tensor Energia-Momento. A sua conservação está relacionada à conservação da energia e do momento, em decorrência da isotropia do tempo e do espaço, da mesma forma em que obtivemos essas leis de conservação para o caso de sistemas discretos.