Resposta à Excitação Periódica Série de Fourier

Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira
E-mail: ponge@usp.br

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica - PME
Av. Prof. Mello Moraes, 2231
São Paulo SP 05508-900 BRASIL
Tel.: 55 (0)11 818 5355
FAX: 55 (0)11 818 5461

Resumo

Nessa nota é feita uma breve revisão sobre Séries de Fourier e sua aplicação em sistemas lineares. A Série de Fourier é apresentada em termos de parcelas em seno e cosseno e em termos de amplitude e fase. Com auxílio da Identidade de Euler a expressão da Série de Fourier é apresentada como série de parcelas complexas. Em seguida são apresentadas algumas propriedades úteis da Série de Fourier. A expressão da Transformada de Fourier é apresentada sem maiores comentários. Então é apresentada a expressão da Transformada Discreta de Fourier e são sugeridas as estratégias que levam à Transformada Rápida de Fourier - FFT. Em seguida é apresentada a expressão para cálculo do valor eficaz e sua aplicação para sinais periódicos. Então são apresentados os dois princípios que definem um sistema linear e sua aplicação no cálculo da resposta de um sistema linear a uma excitação periódica pelo uso da Série de Fourier.

28 de maio de 2003

1 Introdução

O matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier formalizou em 1807 que uma função periódica $x(t)$ pode ser decomposta em uma série de funções ortogonais, i.e.,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \psi_k \tag{1}$$

Essa nova forma de encarar as funções matemáticas foi revolucionária na época e fundou um novo campo da matemática chamado de análise. A grande vantagem dessa nova abordagem é permitir reescrever uma função complicada como a somatória de funções mais simples. Para sistemas lineares ou equações diferenciais lineares, isso permite que se obtenha a solução da equação para as funções mais simples e posteriormente compõe-se a solução completa, somando-se as respostas obtidas separadamente, graças ao *Princípio da Superposição*.

A ideia de transformar o sinal do domínio do tempo para o domínio da freqüência mostrou-se bastante útil e funda todo um ramo da engenharia conhecido como análise espectral. Além de representar um conceito matemático poderoso, a idéia da transformada é uma ferramenta técnica importante para análise de equações diferenciais, para o estudo de sistemas dinâmicos e para análise de sinais.

O assunto da decomposição de funções em séries de funções mais simples ainda hoje é bastante moderno. Na década de 80 do século XX ocorreram grandes desenvolvimentos na matemática e na área de processamento digital de sinais com o desenvolvimento de uma nova família de funções usadas nessa decomposição. Atualmente explora-se a aplicação em engenharia dessas novas técnicas baseadas nessas famílias de funções, chamadas *wavelets* ou *ondaletas* em português.

2 Série de Fourier

Todo sinal periódico $x(t) = x(t+T)$, fisicamente possível, pode ser decomposto em uma série harmônica chamada de *Série de Fourier*:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k \cdot \omega_0 t\right) + b_k \sin\left(k \cdot \omega_0 t\right) \right] \tag{2}$$

onde T é o período em segundos e $\omega_0 = 2 * \pi / T$ é a freqüência fundamental em rad/s do sinal periódico.

Os coeficientes de Fourier $\frac{a_0}{2}$, a_k e b_k representam o valor médio e a contribuição de cada harmônico para a composição do sinal.

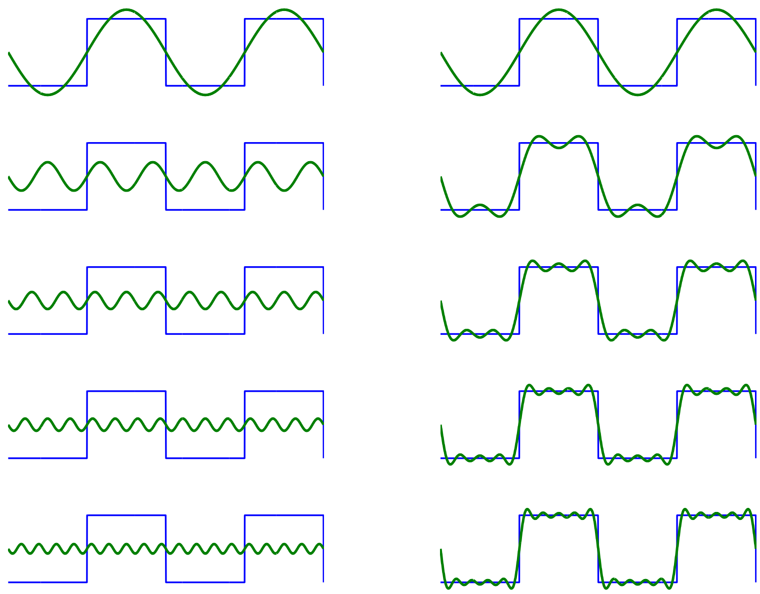

Figura 1: Série de Fourier de uma onda quadrada

Esses coeficientes são calculados pelas seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt \tag{3}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos\left(k\cdot\omega_0 t\right)\,dt \tag{4}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin\left(k\cdot\omega_0 t\right)\,dt \tag{5}$$

Os coeficientes a_k e b_k podem ser rearranjados na forma de amplitude c_k e fase φ_k das componentes harmônicas:

$$a_k = c_k\cos(\varphi_k) \tag{6}$$

$$b_k = c_k\sin(\varphi_k) \tag{7}$$

Logo:

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \tag{8}$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \tag{9}$$

Assim:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k\right) \tag{10}$$

ou ainda incorporando-se a parcela constante à somatória:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos\left(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k\right) \tag{11}$$

onde $c_0 = a_0/2$ e $\varphi_0 = 0$.

Aos gráficos da amplitude c_k e da fase φ_k em função da freqüência ω dá-se os nomes de *Espectro de Amplitude* e *Espectro de Fase* respectivamente. A Série de Fourier representa o sinal $x(t)$ no domínio da freqüência e têm o mesmo conteúdo informativo do sinal de origem.

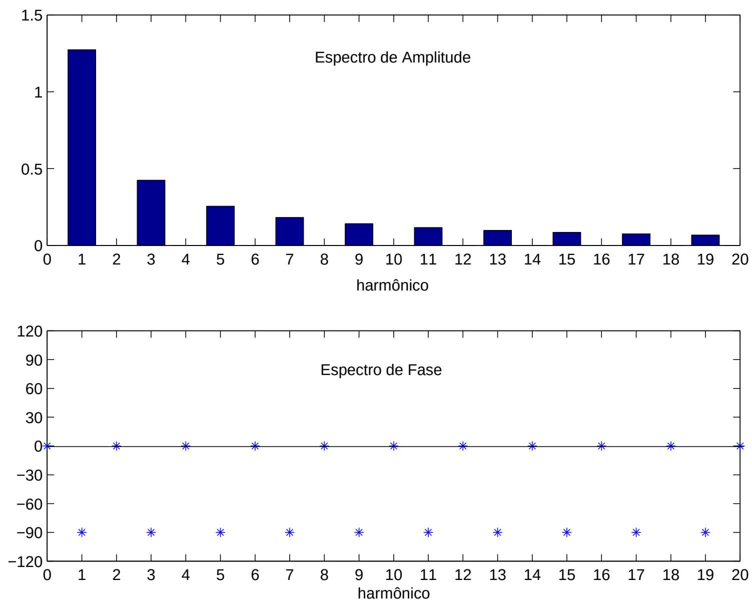

Figura 2: Espectro da onda quadrada

Observa-se que um sinal $x(t)$ periódico produz um espectro discreto ou de linhas, onde só existem componentes em valores discretos da freqüência, todas múltiplas da freqüência fundamental ω_0, i.e., para $\omega = k \cdot \omega_0$. À componente na freqüência fundamental dá-se o nome de harmônico fundamental ou primeiro harmônico. Às componentes superiores dá-se o nome de harmônicos superiores. Chama-se de segundo harmônico, terceiro harmônico e sucessivamente as componentes em $2 \cdot \omega_0$, $3 \cdot \omega_0$, etc.

Também podemos representar o espectro na forma de uma função complexa $X_k = \frac{1}{2}\,(a_k - jb_k)$ introduzindo-se a *Identidade de Euler*:

$$e^{+j\,\theta} = \cos\theta + j\,\sin\theta \tag{12}$$

$$e^{-j\,\theta} = \cos\theta - j\,\sin\theta \tag{13}$$

donde pode-se representar as funções seno e cosseno como combinações de duas exponenciais complexas:

$$\cos\theta = \frac{e^{+j\,\theta} + e^{-j\,\theta}}{2} \tag{14}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{+j\,\theta} - e^{-j\,\theta}}{2j} \tag{15}$$

Assim:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{jk\omega_0 t} \tag{16}$$

e

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cdot e^{-j\,k\cdot\omega_0 t}\,dt \tag{17}$$

onde:

$$\|X_k\| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{c_k}{2} \tag{18}$$

$$fase(X_k) = -\varphi_k \tag{19}$$

3 Propriedades da Série de Fourier

A Série de Fourier exibe diversas propriedades úteis que facilitam a sua utilização, bem como a interpretação dos espectros.

A relação a seguir apenas apresenta algumas propriedades da Série de Fourier - $\mathcal{SF}\left\{\,\right\}$, e não pretende ser completa.

- $$\mathcal{SF}\left\{x(t) + c\right\} = \mathcal{SF}\left\{x(t)\right\} + c \qquad \forall\, c \in \Re \tag{20}$$

- $$\mathcal{SF}\left\{\alpha\cdot x(t)\right\} = \alpha\cdot\mathcal{SF}\left\{x(t)\right\} \qquad \forall\, \alpha \in \Re \tag{21}$$

- $$\mathcal{SF}\left\{x(t) + y(t)\right\} = \mathcal{SF}\left\{x(t)\right\} + \mathcal{SF}\left\{y(t)\right\} \tag{22}$$

- $$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \qquad \forall\, x(t) \in \Re \tag{23}$$

- função par

$$x_p(t) = +x_p(-t) \longrightarrow \mathcal{SF}\left\{x_p(t)\right\} \text{ só tem termos em cosseno} \tag{24}$$

- função impar

$$x_i(t) = -x_i(-t) \longrightarrow \mathcal{SF}\left\{x_i(t)\right\} \text{ só tem termos em seno} \tag{25}$$

- $$\mathcal{SF}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{SF}\left\{x(t)\right\}\right) \tag{26}$$

- $$\mathcal{SF}\left\{\int x(t)\,dt\right\} = \int \mathcal{SF}\left\{x(t)\right\}\,dt \tag{27}$$

- deslocamento no tempo

  - $$\|\mathcal{SF}\left\{x(t+t_0)\right\}\| = \|\mathcal{SF}\left\{x(t)\right\}\| \tag{28}$$

  - $$fase\left(\mathcal{SF}\left\{x(t+t_0)\right\}\right) = fase\left(\mathcal{SF}\left\{x(t)\right\}\right) + (k \cdot \omega_0 t_0) \tag{29}$$

- obviamente um deslocamento do intervalo de integração não altera a Série de Fourier

4 Transformada de Fourier

Tomando-se o limite do período tendendo a infinito, i.e., $T \rightarrow \infty$, teremos:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\,\omega t}\,dt \tag{30}$$

que é a chamada *Transformada de Fourier*.

A transformada de Fourier permite obter o espectro de um sinal qualquer (com energia finita), não necessariamente periódico.

5 Transformada Discreta de Fourier - DFT

Tratando-se de sinais amostrados, temos uma série temporal de valores x_l amostrados do sinal contínuo $x(t)$ em N instantes separados de intervalos iguais Δt, i.e., $x_l = x(l \cdot \Delta t)$ com $l = 0, \cdots, N-1$.

Podemos obter a versão discreta da transformada de Fourier fazendo-se:

$$dt \rightarrow \Delta t \tag{31}$$

$$\int \rightarrow \sum \tag{32}$$

Com $T = N \cdot \Delta t$ e $\omega_0 = 2\pi/(N\Delta t)$, vem:

$$X_k = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cdot e^{\left(-j2\pi \frac{k}{N\Delta t} \cdot l\Delta t\right)} \Delta t \tag{33}$$

simplificando-se:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cdot e^{\left(-j2\pi \frac{k \cdot l}{N}\right)} \tag{34}$$

obtemos a *Transformada Discreta de Fourier*.

Ou adotando-se:

$$W = e^{-j2\pi \frac{1}{N}} \tag{35}$$

pode-se escrever:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cdot W^{k \cdot l} \tag{36}$$

Observa-se que a expressão representa uma média ponderada dos valores amostrados, onde os coeficientes de ponderação $W^{k \cdot l}$ são coeficientes complexos. Ela extrai da série temporal x_l aquela parcela do sinal que oscila na mesma freqüência da variação do sinal da exponencial.

6 Transformada Rápida de Fourier - FFT

Os algoritmos numéricos que realizam a transformada discreta de uma maneira mais rápida e precisa são conhecidos como FFT, *Fast Fourier Transform*. O mais famoso deles foi publicado por *Cooley & Tokey* em 1965.

Esses algoritmos aproveitam-se de simetrias dos coeficientes da exponencial $\left(W^r = -W^{r-N/2}\right)$ e da possibilidade de reescrever a somatória da DFT de forma recursiva reordenando-se os elementos da série temporal.

Esses algoritmos viabilizaram a aplicação prática da transformada discreta de Fourier pois reduzem de maneira significativa o número de operações necessárias para se obter o espectro de sinais discretos. Para obter a transformada discreta de Fourier - DFT são necessárias N^2 operações complexas. Com os algoritmos otimizados da FFT o número de operações reduz-se a $2N \log_2 N$. O impacto dessa redução pode ser observado na tabela 1. Além de acelerar o cálculo do espectro, a FFT também reduz o erro numérico do resultado.

N	DFT N^2	FFT $2N \cdot \log_2 N$	redução
512	262.144	9.216	28
1024	1.048.576	20.480	51
2048	4.194.304	45.056	93
4096	16.777.216	98.304	171
8192	67.108.864	212.992	315

Tabela 1: Redução do número de operações pela FFT

7 Valor Eficaz

O valor eficaz de um sinal periódico $x(t)$ é definido como:

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt} \tag{37}$$

considerando-se o sinal decomposto em Série de Fourier é fácil ver que:

$$X_{ef} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^2}{2}} \tag{38}$$

O *valor eficaz* representa a energia do sinal e também é conhecido como *valor RMS*, do inglês, *root mean square*.

8 Sistemas Lineares

Os sistemas dinâmicos são ditos lineares quando obedecem a duas propriedades:

- *Princípio da Proporcionalidade*

  Se:

  $$u(t) \rightarrow y(t)$$

  então:

  $$\alpha \cdot u(t) \rightarrow \alpha \cdot y(t) \tag{39}$$

- *Princípio da Superposição*

  Se:

  $$\begin{array}{rcl} u_1(t) & \rightarrow & y_1(t) \\ u_2(t) & \rightarrow & y_2(t) \end{array}$$

então:

$$u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \tag{40}$$

De uma maneira genérica temos para sistemas lineares:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \rightarrow \alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 \tag{41}$$

9 Resposta de Sistemas Lineares à Excitação Periódica

Sistemas dinâmicos lineares obedecem a uma equação diferencial ordinária linear. De forma que vale o princípio da superposição, i.e., a saída de uma soma de excitações é a soma das respostas do sistema quando excitado individualmente por cada uma dessas excitações que compõe a entrada do sistema.

Aproveitando-se desse princípio foi possível deduzir a *Integral de Duhamel*, que expressa no domínio do tempo a relação entre entrada $F(t)$ e saída $x(t)$ de um sistema linear com *função de resposta ao impulso unitário* $h(t)$, i.e.,

$$x(t) = F(t) * h(t) \tag{42}$$

ou:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau \tag{43}$$

No domínio da freqüência essa relação é bem mais simples:

$$X(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega) \tag{44}$$

onde :

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} && (45)\\ F(j\omega) &= \mathcal{F}\{F(t)\} && (46)\\ H(j\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} && (47) \end{aligned}$$

As funções transformadas para o domínio da freqüência são em geral funções complexas com parte real e imaginária, ou dito de outra forma, com amplitude e fase.

A transformada de Fourier da função de resposta ao impulso unitário $h(t)$:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\,\omega t}\, dt \tag{48}$$

conhecida como *Função de Resposta em Freqüência - FRF* caracteriza o comportamento dinâmico do sistema no domínio da freqüência.

Um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade excitado por uma força harmônica $F_k(t) = F_k \sin(\omega_k t - \varphi_k)$ responde harmonicamente na mesma freqüência da excitação ω_k, com:

$$x(t) = \|X_k\| \sin(\omega_k t - \varphi_k - \gamma_k) \tag{49}$$

onde:

$$\|X_k\| = \frac{F_k}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{50}$$

e:

$$\gamma_k = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} \tag{51}$$

onde:

$$r = \frac{\omega_k}{\omega_n} \tag{52}$$

Portanto a função de resposta em freqüência H_k desse sistema expressa na forma complexa fica:

$$H_k = \frac{X_k}{F_k} = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{(1-r^2) + j2\zeta r} \tag{53}$$

onde:

$$\|H_k(\omega_k)\| = \frac{\|X_k(\omega_k)\|}{F_k(\omega_k)} \tag{54}$$

$$fase\{H_k(\omega_k)\} = \gamma_k \tag{55}$$

Portanto para uma excitação periódica pode-se decompor o sinal de excitação em Série de Fourier. Cada componente da excitação representa uma excitação harmônica. Calcula-se a resposta do sistema a cada uma das componentes harmônicas da excitação aproveitando-se a simplicidade da propriedade da convolução no domínio da freqüência. Finalmente somam-se todas as respostas às excitações harmonicas para obter a resposta completa à excitação periódica original. Esta também fica expressa na forma de uma Série de Fourier e portanto representa um sinal periódico.

Nos casos práticos, em geral somente as primeiras componentes da Série de Fourier apresentam magnitude significativa. Exceção são os registros de movimentos alternativos e com impactos repetitivos, onde surge um grande número de componentes harmônicas significativas.

Os sistemas mecânicos atuam como filtros mecânicos, privilegiando as componentes de baixa freqüência. Rigorosamente, somente as componentes da excitação próximas das freqüências naturais do sistema produzem saídas significativas, além das componentes predominantes da excitação.

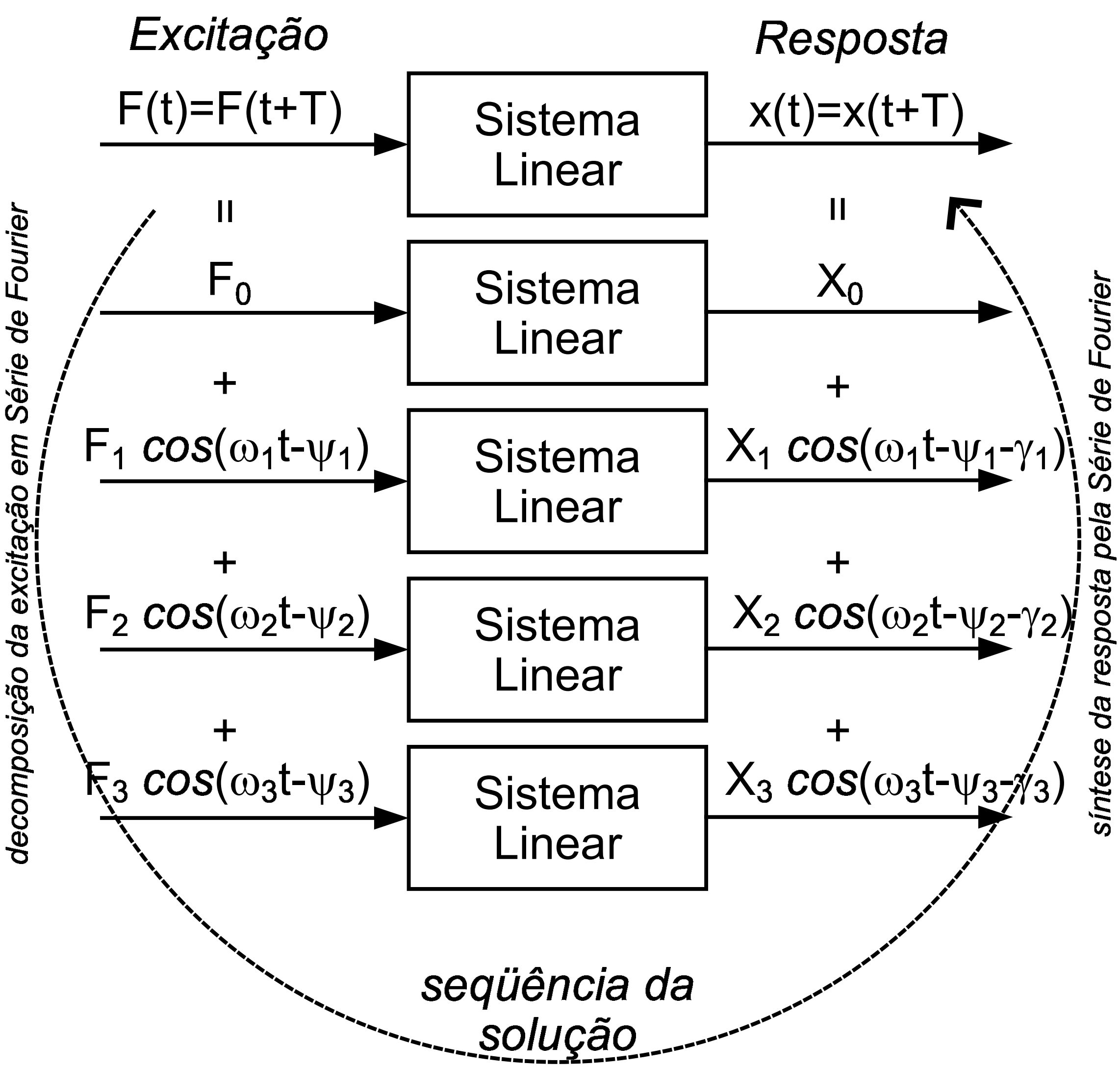

Figura 3: Resposta de Sistemas Lineares à Excitação Periódica

10 Conclusão

A Série de Fourier é uma ferramenta matemática e numérica importante para análise de sinais periódicos. A caracterização de sinais reais no domínio da freqüência em geral é mais simples e realça aspectos importantes dos sinais.

A Série de Fourier pode ser usada para determinar a resposta de sistemas lineares à excitação periódica qualquer. No domínio da freqüência a relação entre entrada e saída de sistemas lineares é muito mais simples que no domínio do tempo, onde esta se dá pela integral de convolução.