ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Carrinho em Plano Inclinado

Autor: Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira
E-mail: ponge@usp.br

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica - PME
Av. Prof. Mello Moraes, 2231
São Paulo SP 05508-970 BRASIL
Tel.: 55 (0)11 3091-9677
Cel: 55 (0)11 97244-0900

São Paulo
2 de agosto de 2018

1^o **Exercício - E1**

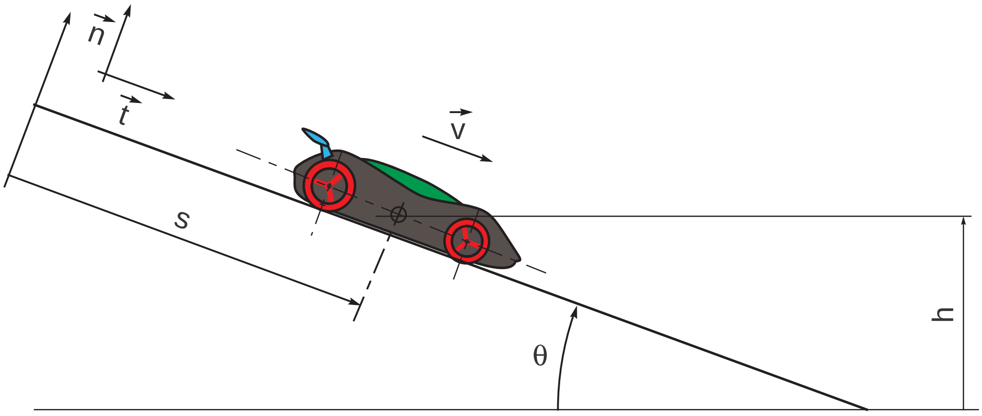

Figura 1: Carrinho em plano inclinado

Deseja-se modelar o movimento de um carrinho *HotWheels*® descendo uma pista inclinada plana com atrito, conforme mostrado na figura 1. O carrinho é lançado com velocidade inicial v_0 de uma altura H_0. O ângulo de inclinação do plano vale θ e o atrito seco entre as rodas e o piso vale μ_S. A aceleração da gravidade em São Paulo vale $g = 9,78$ m/s^2. A coordenada de posição do carrinho na direção tangência medida à partir do ponto de altura H_0 vale $s(t)$.

Podemos considerar três forças de resistência ao movimento:

- Força viscosa
- Resistência ao rolamento
- Força de arrasto aerodinâmico

Os principais parâmetros do carrinho, mostrados na figura 2, são: massa m, momento de inércia J e coeficiente de arrasto C_D do carrinho; distância entre eixos b, posição do centro de massa em relação ao eixo dianteiro a; raios R_1 e R_2 das rodas de massa m_1 e m_2 e momentos de inércia J_1 e J_2; coeficiente de atrito de *rolamento* μ_R do rolamento da roda sobre à pista; raio do cubo da roda r_0 com atrito seco μ_0 no mancal de deslizamento.

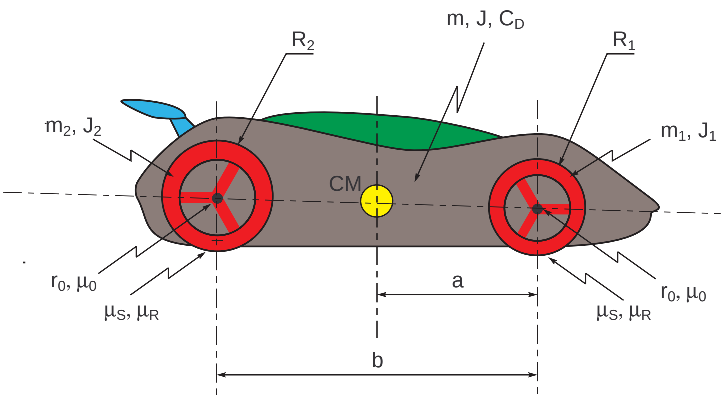

Figura 2: Parâmetros do Carrinho

1 Questão

Considere inicialmente somente a força viscosa.

Para pequenos valores do Número de Reynolds a resistência do ar pode ser simulada por uma força viscosa F_d, dada por:

$$F_d = c\,v \tag{1}$$

onde c é a constante de amortecimento viscoso e v a velocidade do carrinho.

Pede-se:

a) Desenhar o diagrama de corpo livre do corpo do carrinho e das rodas.

b) Determinar a equação diferencial do movimento do carrinho.

c) Medir e estimar os parâmetros do problema para um carrinho real; considere que alguns parâmetros não são necessários, conforme o modelo do carrinho e condições reais do movimento.

d) Esboçar o gráfico da relação $\frac{dv}{ds}$ no plano de fase.

e) Obter analiticamente a solução geral da equação diferencial.

f) Determinar a constante de tempo τ do sistema de primeira ordem.

g) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = 0,0$ m/s.

h) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = 1,0$ m/s.

i) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = -1,0$ m/s.

j) Interpretar as soluções da equação diferencial para as condições iniciais dadas.

2 Questão

Escreva uma algoritmo para solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem para solução do problema anterior.

Pede-se:

a) Escreva um algoritmo para solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem pelo Método de Euler.

b) Escreva uma função para o cálculo das derivadas temporais da posição e da velocidade, i.e., $\frac{ds}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$.

c) Desenhar o gráfico da relação $\frac{dv}{ds}$ no plano de fase com a função *fchamp* do Scilab.

d) Resolva a questão anterior por integração numérica com o algoritmo desenvolvido.

e) Compare os resultados analíticos com os resultados numéricos para os seguintes passos de integração: $h = 1,0$ s, $h = 0,1$ s e $h = 0,01$ s.

f) Interpretar os resultados.

3 Questão

Repita a questão anterior utilizando os recursos do Scilab. Pede-se:

a) Compare a solução numérica obtida anteriormente com a solução obtida com a função *ode* do Scilab para os Métodos de Adams e Runge-Kutta.

b) Construir o diagrama de blocos para representar as equações diferenciais do movimento.

c) Compare a solução numérica obtida anteriormente com a solução obtida pelo *XCos* do Scilab.

4 Questão

Para o mesmo problema anterior, considere agora somente a força de resistência ao rolamento.

A resistência ao rolamento é a combinação de dois mecanismos de dissipação de energia. O atrito seco no mancal de deslizamento das rodas e o atrito de *rolamento*.

A força de atrito seco no mancal de deslizamento é dada pela expressão do atrito de Coulomb entre as superfícies do mancal e do munhão:

$$F_t = \mu_0 \, \tilde{N} \tag{2}$$

onde μ_0 é o coeficiente de atrito dinâmico entre o mancal e o munhão e $\tilde{N}$ é a força normal de contato entre as duas partes. Essa força produz um momento reativo no cubo da roda.

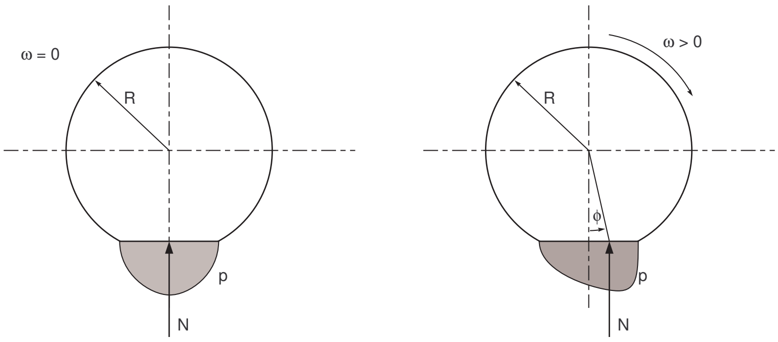

Figura 3: Atrito de *Rolamento*

A resistência decorrente do atrito de *rolamento* é na realidade produzida por um mecanismo bastante diverso do atrito de Coulomb. O atrito de *rolamento* é resultado do achatamento do contato entre a roda e a pista, que produz um campo de pressão na região de contato. Em decorrência do movimento e pela histerese dos materiais, a resultante da força normal avança em relação à direção radial da roda de um ângulo $\phi = \arctan \mu_R$. Esse deslocamento da avanço gera um momento resistivo:

$$M_R = -\mu_R \, N \, R \tag{3}$$

onde μ_R é o dito coeficiente de atrito de *rolamento*, N a resultante normal da pressão de contato e R o raio da roda.

Pede-se:

a) Desenhar o diagrama de corpo livre do corpo do carrinho e das rodas.

b) Determinar a equação diferencial do movimento do carrinho.

c) Medir e estimar os parâmetros do problema para um carrinho real; considere que alguns parâmetros não são necessários, conforme o modelo do carrinho e condições reais do movimento.

d) Esboçar o gráfico da relação $\frac{dv}{ds}$ no plano de fase.

e) Obter analiticamente a solução geral da equação diferencial.

f) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = 0,0$ m/s.

g) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = 1,0$ m/s.

h) Desenhar o gráfico da velocidade e da posição do carrinho no tempo, para as seguintes condições iniciais, $s(0) = 0,0$ m e $v(0) = -1,0$ m/s.

i) Interpretar as soluções da equação diferencial para as condições iniciais dadas.

5 Questão

Utilize o algoritmo do Método de Euler desenvolvido para solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem para solução do problema da questão anterior.

Pede-se:

a) Escreva uma função para o cálculo das derivadas temporais da posição e da velocidade, i.e., $\frac{ds}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$.

b) Desenhar o gráfico da relação $\frac{dv}{ds}$ no plano de fase com a função *fchamp* do Scilab.

c) Resolva a questão anterior por integração numérica com o algoritmo desenvolvido.

d) Compare os resultados analíticos com os resultados numéricos para os seguintes passos de integração: $h = 1,0$ s, $h = 0,1$ s e $h = 0,01$ s.

e) Interpretar os resultados.

6 Questão

Repita a questão anterior utilizando os recursos do Scilab. Pede-se:

a) Compare a solução numérica obtida anteriormente com a solução obtida com a função *ode* do Scilab para os Métodos de Adams e Runge-Kutta.

b) Construir o diagrama de blocos para representar as equações diferenciais do movimento.

c) Compare a solução numérica obtida anteriormente com a solução obtida pelo *XCos* do Scilab.