Introdução à Física Nuclear
Resolução de Exercícios

8 de novembro de 2012

Espalhamento por uma esfera rígida

Função de onda completa para todo $r > R$,

$$\langle \mathbf{x}|\Psi^+\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum i^l (2l+1) A_l(r) P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

com

$$A_l(r) = e^{i\delta_l} \left[\cos\delta_l\, j_l(kr) - sen\delta_l\, n_l(kr)\right] \tag{2}$$

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{se } r \leqslant R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \tag{3}$$

Como a esfera é impenetrável

$$A_l(r)|_{r=R} = 0 \tag{4}$$

Portanto,

$$cos\,\delta_l\, j_l(kR) - sen\delta_l\, n_l(kR) = 0 \tag{5}$$

$$tan\,\delta_l = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)} \tag{6}$$

Para o caso $l = 0$ (espalhamento de onda S), temos

$$tan\,\delta_0 = \frac{sen\,kR\,/\,kR}{-cos\,kR\,/\,kR} = -tan\,kR \tag{7}$$

Logo,

$$\delta_0 = -kR \tag{8}$$

$$A_{l=0}(r) \propto \frac{\sin\ kr}{kr} \cos\ \delta_0 + \frac{\cos\ kr}{kr} \sin\ \delta_0 = \frac{1}{kr} \sin(kr + \delta_0) \quad (9)$$

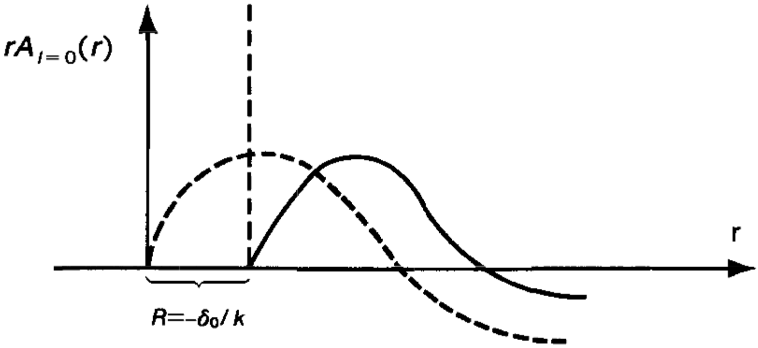


Figura: Fator $e^{i\delta_0}$ omitido. Linha pontilhada representa ausência do potencial. Linha sólida mostra a solução da eq. de Schrödinger com o deslocamento de fase.

Capítulo 8

8.2 Considere um espalhamento por um potencial repulsivo de casca esférica dado por

$$\frac{2m}{\hbar^2}V(r) = \gamma\delta(r - R), \; (\gamma > 0) \tag{10}$$

a) Determine uma equação para o deslocamento de fase δ_0 da onda S em função de k ($E = \hbar^2 k^2/2m$)

b) Considere γ muito grande, $\gamma \gg \frac{1}{R}, k$. Mostre que se $tan\, kR$ é próxima de zero, o deslocamento de fase da onda S se assemelha ao de um espalhamento por uma esfera rígida. Mostre ainda que se $tan\, kR$ não é próxima de zero, há ressonância, o que significa que $cotg\delta_0$ vai a zero com valores positivos à medida que k aumenta. Determine aproximadamente as posições das ressonâncias mantendo termos de ordem $1/\gamma$ e compare-as com as energias dos estados ligados para uma partícula confinada no interior da casca esférica de mesmo raio,

$$V = 0,\ r < R; \quad V = \infty,\ r > R. \tag{11}$$

c) Obtenha ainda uma expressão aproximada para a largura de ressonância Γ, definida por

$$\Gamma = \frac{-2}{\left[d(cotg\delta_0)/dE\right]_{E=E_r}} \tag{12}$$

Note que as ressonâncias se tornam extremamente estreitas à medida que γ aumenta.

Solução:

a)

A equação da parte radial é

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l = 0 \tag{13}$$

e para $l = 0$, temos

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\right] u_0 = 0 \tag{14}$$

Com o potencial dado acima, segue

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \left[k^2 - \gamma\delta(r - R)\right] u_0 = 0 \tag{15}$$

Para $r < R$, temos

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + k^2 u_0 = 0 \tag{16}$$

e, com a condição de contorno $u(0) = 0$, segue que

$$u_0(r) = Asen(kr), \quad r < R \tag{17}$$

Para $r > R$, temos

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + k^2 u_0 = 0 \tag{18}$$

então

$$u_0(r) = Bsen(kr + \delta_0), \quad r > R \tag{19}$$

Para $r = R$, devemos ter a continuidade da função de onda, e portanto

$$Asen(kR) = Bsen(kR + \delta_0) \tag{20}$$

Como o potencial é infinito em $r = R$, não há continuidade da derivada da função de onda. De fato, integrando a equação 15 segue

$$\frac{du_0(r)}{dr} = -\int_0^r \left[k^2 - \gamma\delta(r-R)\right] u_0(r)\, dr \tag{21}$$

e, para $r < R$, temos

$$\frac{du_0(r)}{dr} = -k^2 \int_0^r Asen(kr)\, dr = Ak^2 \left[cos(kr) - 1\right] \tag{22}$$

Para $r > R$, temos

$$\frac{du_0(r)}{dr} = -k^2 \int_0^r u_0(r)\, dr + \gamma \int_0^r \delta(r-R) u_0(r)\, dr \tag{23}$$

então

$$\frac{du_0(r)}{dr} = -k^2 \int_0^R Asen(kr)\, dr - k^2 \int_R^r Bsen(kr + \delta_0)\, dr + \gamma u_0(R) \tag{24}$$

e, portanto

$$\frac{du_0(r)}{dr} = k^2 \left\{ \frac{A}{k} [cos(kR) - 1] + \frac{B}{k} [cos(kr + \delta_0) - cos(kR + \delta_0)] \right\} + \gamma u_0(R) \tag{25}$$

Assim, para $r > R$ segue

$$\frac{du_0(r)}{dr} = Ak [cos(kR) - 1] + Bk [cos(kr + \delta_0) - cos(kR + \delta_0)] + \gamma u_0(R) \tag{26}$$

Usando 22, temos a derivada para $r \to R$ pela esquerda,

$$\frac{du_0}{dr}(r_- \to R) = Ak [cos(kR) - 1] \tag{27}$$

e de 26 obtemos a derivada para $r \to R$ pela direita,

$$\frac{du_0}{dr}(r_+ \to R) = Ak [cos(kR) - 1] + \gamma u_0(R) \tag{28}$$

portanto

$$\frac{du_0}{dr}(r_+ \to R) - \frac{du_0}{dr}(r_- \to R) = \gamma u_0(R) \tag{29}$$

mostrando que a derivada de $u_0(r)$ é descontínua em $r = R$.
Mas para $r < R$

$$\frac{du_0}{dr} = Akcos(kr) \tag{30}$$

e para $r > R$

$$\frac{du_0}{dr} = Bkcos(kr + \delta_0) \tag{31}$$

então, usando a equação 29, temos

$$Bkcos(kR + \delta_0) - Akcos(kR) = \gamma u_0(R) \tag{32}$$

portanto

$$B = A\frac{cos(kR)}{cos(kR + \delta_0)} + \frac{\gamma u_0(R)}{kcos(kR + \delta_0)} \tag{33}$$

Da equação 20, temos

$$A = B\frac{sen(kR+\delta_0)}{sen(kR)} \tag{34}$$

assim, substituindo em 33, segue que

$$B = B\frac{tan(kR+\delta_0)}{tan(kR)} + B\frac{\gamma}{k}tan(kR+\delta_0) \tag{35}$$

onde usamos $u_0(R) = Bsen(kR+\delta_0)$. Daqui, obtemos

$$tan(kR+\delta_0) = \frac{1}{\frac{1}{tan\,kR}+\frac{\gamma}{k}} \tag{36}$$

Usando a identidade trigonométrica
$tan(a+b) = \dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)\,tan(b)}$, chegamos, finalmente a

$$tan\delta_0 = \frac{(-\gamma/k)sen^2(kR)}{1+(\gamma/k)sen(kR)cos(kR)} \tag{37}$$

b)

Assumindo, agora, $\gamma \gg 1/R$, k, temos de (36) que

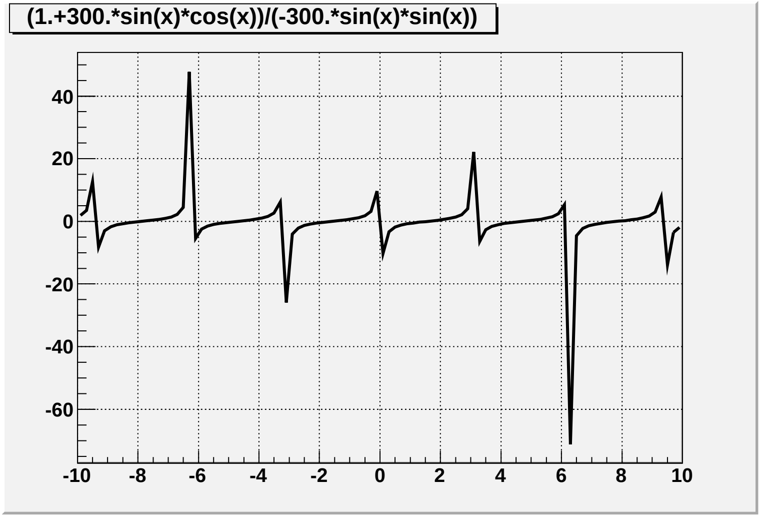
$$tan(kR+\delta_0) \cong \frac{tan(kR)}{(\gamma/k)tan(kR)} = \frac{k}{\gamma} \ll 1 \qquad (38)$$

o que implica que $-kR \cong \delta_0$, o que reproduz um espalhamento por uma esfera rígida.

De (37), temos, desde que $tan\, kR$ não seja próxima de zero, que

$$cotg\, \delta_0 = 0 \text{ quando } 1 + (\gamma/k) sen(kR) cos(kR) = 0 \qquad (39)$$

ou seja, $sen(2kR) = -2k/\gamma \cong 0$, cujas soluções possíveis são $kR \cong n\pi$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. A solução $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ é descartada pois nesse caso $cotg\, \delta_0$ iria a zero por valores negativos.


(1.+300.*sin(x)*cos(x))/(-300.*sin(x)*sin(x))
40
20
0
-20
-40
-60
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Então fazemos,

$$\begin{aligned} kR &\cong n\pi \\ kR &= n\pi - \varepsilon \quad \text{onde} \quad \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{40}$$

De modo que

$$sen(2kR) = -sen(2\varepsilon) = -\frac{2k}{\gamma} \tag{41}$$

sendo $\varepsilon \cong \dfrac{k}{\gamma}$ em primeira ordem, e $kR = n\pi - \dfrac{k}{\gamma}$, sendo esta a condição de ressonância. A energia de ressonância é, então

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{R^2}\left(1 - \frac{2}{R\gamma}\right) \tag{42}$$

Para uma partícula confinada no interior da casca esférica de mesmo raio, sabemos que $u(r) = Asen\,kr$ para $r < R$. Com a condição de contorno $kR = n\pi$, temos que a energia do estado ligado é

$$E_b = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mR^2} \tag{43}$$

Logo,

$$E_r = E_b \left(1 - \frac{2}{R\gamma}\right) \tag{44}$$

c)

A partir de (37), calculamos, então

$$\begin{aligned}\frac{d(cotg\,\delta_0)}{dE} &= \frac{d(cotg\,\delta_0)}{dk}\frac{dk}{dE}\\ &= \frac{1}{\gamma sen^4(kR)}\left[Rcos(kR)\left(k+\frac{\gamma sen(2kR)}{2}\right)sen(kR)-\right.\\ &\left.(1+\gamma Rcos(kR))\,sen^2(kR)\right]\frac{m}{\hbar^2 k}\end{aligned} \tag{45}$$

Em $E = E_r$, considerando que $k_r R \cong n\pi\left(1-\frac{1}{\gamma R}\right)$,

$sen^2(k_r R) \cong \left(\frac{n\pi}{\gamma R}\right)^2$ e $cos(2k_r R) \cong 1$, temos, a partir de (45),

$$\Gamma = \frac{-2}{[d(cotg\,\delta_0)/dE]\,|_{E=E_r}} \cong \frac{2\hbar^2}{m}\frac{(n\pi)^3}{\gamma^2 R^4} \tag{46}$$

E nota-se que, de fato, $\Gamma \rightarrow 0$ quando γ aumenta. O que significa que a ressonância se torna estreita.

Capítulo 8

8.3 Considere o potencial dependente do tempo, $V(t) = V_0 e^{-i\omega_0 t}$. Mostre que em aproximação de Born de primeira ordem tem-se a matriz de transição

$$\langle k', +\infty | V(t) | k, -\infty \rangle = 2\pi \langle k' | V_0 | k \rangle \delta(\omega_{k'k} - \omega_0) \qquad (47)$$

Solução:

Em primeira ordem temos $T = V(t) = V_0 e^{-i\omega_0 t}$.
Se para $t = -\infty$ temos o sistema no estado $|k\rangle$, o elemento de matriz de transição para $|k'\rangle$ em $t = +\infty$ é dado por

$$\langle k', +\infty | T | k, -\infty \rangle = \langle k' | \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_{k'k} t} dt | k \rangle.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_{k'k} - \omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega_{k'k} - \omega_0), \text{segue que}$$

$$\langle k', +\infty | V(t) | k, -\infty \rangle = 2\pi \langle k' | V_0 | k \rangle \delta(\omega_{k'k} - \omega_0) \qquad (48)$$

Observe que, devido à Delta, a transição ocorre somente entre os estados tais que $(\omega_{k'} - \omega_k) = \omega_0$. Como ω_k e k estão relacionados através de $\omega_k = \dfrac{\hbar k^2}{2m}$, segue que a transição ocorre somente entre estados com momentos p bem definidos.