Introdução à Física Nuclear
Gabarito Prova 1

29 de agosto de 2012

- Considere um espalhamento de uma partícula de massa m e energia E por um poço de potencial $V(r) = -V_0$ para $r < r_0$. Supondo que a energia seja suficientemente baixa, podemos considerar apenas a contribuição do estado $l = 0$ para o estado espalhado.

1. Defina $R(r) = u(r)/r$, substitua na equação radial e obtenha a equação para $u(r)$.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2}u \tag{1}$$

e, portanto

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r\frac{d^2u}{dr^2} \tag{2}$$

Substituindo este resultado na equação radial, obtemos

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}u = 0 \tag{3}$$

2. Justifique a afirmação de que somente $l = 0$ é relevante para o espalhamento.

   Se a energia da partícula incidente é baixa, também é baixo seu momento angular. Devido a isso e à quantização do momento, o estado seguinte, com momento angular $l \neq 0$, já não contribui no espalhamento.

   Interpretação semiclássica:

$$l = bk \qquad \text{(momento angular: } l\hbar = bp) \tag{4}$$

   b, parâmetro de impacto e $p = \hbar k$.

$$l_{máx} = kr_0. \tag{5}$$

Baixa energia, $E \approx 0 \Rightarrow kr_0 \ll 1$.

3. Obtenha a solução geral da equação de Schrödinger para a região $r < r_0$, $u_1(r)$.

$$\frac{d^2}{dr^2} u_1(r) + \kappa^2 u_1(r) = 0, \text{ com } \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0). \tag{6}$$

Solução geral:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= A cos(\kappa r) + B sen(\kappa r) \\ u_1(0) &= A = 0 \Longrightarrow u_1(r) = B sen(\kappa r) \end{aligned} \tag{7}$$

4. Sem resolver explicitamente a equação para a região $r > r_0$, $u_2(r)$, mostre que esta solução deve satisfazer a relação

$$\frac{u_2'}{u_2} = \kappa cotg(\kappa r_0)\,, \tag{8}$$

onde $\kappa^2 = 2m(E + V_0)/\hbar^2$.

$$\frac{u_2'(r_0)}{u_2(r_0)} = \frac{u_1'(r_0)}{u_1(r_0)} = \kappa cotg(\kappa r_0). \tag{9}$$

5. Agora, suponha que $E \approx 0$ e mostre que a solução da equação de Schrödinger para $r > r_0$ é da forma

$$u_2(r) = C(r - a)\,, \tag{10}$$

com C e a sendo parâmetros ajustados às condições iniciais e à condição de normalização da função de onda.

$$E \approx 0, \quad V = 0; \tag{11}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} u_2(r) = 0 \Longrightarrow u_2(r) = C(r - a). \tag{12}$$

6. Usando os resultados anteriores, mostre que no espalhamento a energia extremamente baixa (também chamado espalhamento a energia nula), devemos ter a relação

$$\lim_{k \to 0} \kappa cotg(\kappa r_0) = \frac{1}{r - a} \tag{13}$$

Sabemos que

$$\frac{u_2'(r_0)}{u_2(r_0)} = \kappa cotg(\kappa r_0). \tag{14}$$

Além disso, $u_2(r)$ foi obtida para $V = 0$ e na condição $E \to 0$. Portanto,

$$\lim_{k \to 0} \kappa cotg(\kappa r_0) = \frac{C}{C(r - a)} = \frac{1}{r - a} \tag{15}$$