Introdução à Física Nuclear
Resolução de exercícios

29 de agosto de 2012

Capítulo 4

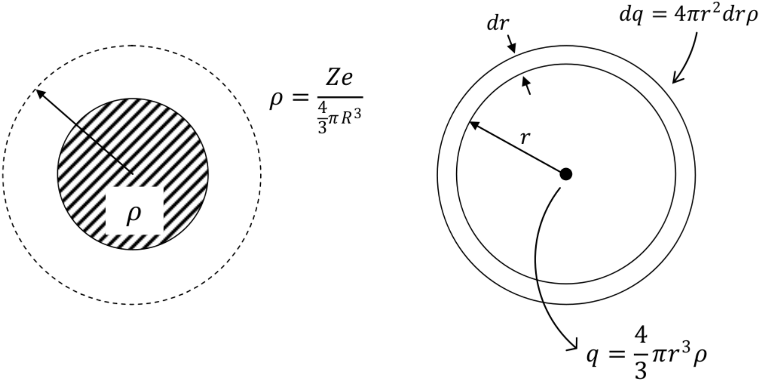
- Mostre que a energia Coulombiana de um núcleo esférico pode ser escrita na forma

$$E_c = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R}. \tag{1}$$

Por que a expressão utilizada na fórmula de massa é

$$E_c \propto \frac{Z(Z-1)}{R}? \tag{2}$$

Solução:


ρ
$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
dr
$dq = 4\pi r^2 dr \rho$
r
$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$
\begin{aligned}
E_c =& \int \frac{q}{r}\, dq = \int_0^R \frac{1}{r}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, 4\pi r^2 dr \rho \\
=& \frac{16\pi^2}{3}\rho^2 \int_0^R r^4\, dr \\
=& \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 R^5 \\
E_c =& \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Para esse cálculo se considera uma distribuição uniforme, contínua de carga. Isso introduz um termo de "auto-interação", $\frac{3e^2}{5R}$ pra cada próton. A fim de obter a energia de interação correta entre os pares de ṕrotons, é necessário subtrair Z prótons.

$$
E_c = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{R} \tag{4}
$$

4.4 Obtenha as expressões para N e U a partir de Ξ.
No limite termodinâmico,

$$N = \gamma \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \left[exp\left(\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m} - \beta\mu \right) + 1 \right]^{-1} \qquad (5)$$

e

$$U = \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[exp\left(\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m} - \beta\mu \right) + 1 \right]^{-1} \qquad (6)$$

Solução:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle \tag{7}$$

No limite termodinâmico $N \to \infty$.

$$N = \gamma \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) n(\varepsilon) \tag{8}$$

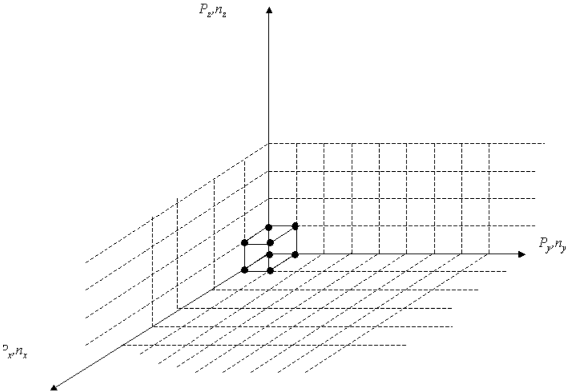


Figura: Diagrama do espaço de fase: número de estados $\Rightarrow$ volume $dn_x\, dn_y\, dn_z$.

$$\vec{k} = (\hat{x} n_x + \hat{y} n_y + \hat{z} n_z)\frac{\pi}{L}, \quad n_i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{9}$$

$$\begin{aligned} N &= \gamma \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z\, n(\varepsilon) \\ &= \gamma \int_0^\infty dk_x\, dk_y\, dk_z \frac{L^3}{\pi^3} n(\varepsilon) \\ N &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{k} \left[exp\left(\frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m} - \beta\mu \right) + 1 \right]^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U &= \sum_k \langle n_k \rangle\, \varepsilon_k \\ U &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\vec{k} \left[exp\left(\frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m} - \beta\mu \right) + 1 \right]^{-1} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{aligned} \tag{11}$$

Capítulo 5

5.3 A partir da expressão $a_n(t) = \dfrac{T_{sn} e^{i(\omega_{sn} - i\alpha)t}}{\hbar(\omega_{sn} + i\alpha)}$ obtenha a Regra de Ouro de Fermi para V independente do tempo. T_{sn} é o operador relacionado à transição entre diferentes estados, e $a_n(t)$ é o coeficiente da expansão do estado final (depois da interação).

Solução:

A taxa de transição é dada por $\frac{d}{dt}|a_n(t)|^2$. A partir da equação acima temos

$$|a_n(t)|^2 = \frac{|T_{sn}|^2 e^{2\alpha t}}{\hbar^2(\omega_{sn}^2 + \alpha^2)} \tag{12}$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}|a_n(t)|^2 = \frac{2\alpha |T_{sn}|^2}{\hbar^2(\omega_{sn}^2 + \alpha^2)} e^{2\alpha t} \tag{13}$$

O parâmetro α foi introduzido para facilitar os cálculos, então devemos fazer $\alpha \to 0$. Nesse limite a taxa de transição fica

$$\frac{d}{dt}|a_n(t)|^2 = \frac{2|T_{sn}|^2}{\hbar^2} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\omega_{sn}^2 + \alpha^2} \tag{14}$$

O limite na expressão acima, de acordo com as representações da Delta de Dirac, corresponde a

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\omega_{sn}^2 + \alpha^2} = \pi \delta(\omega_{sn}) \tag{15}$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} |a_n(t)|^2 = \frac{2\pi |T_{sn}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{sn}) \tag{16}$$